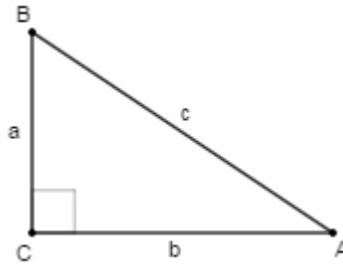


CAPÍTULO 1.- GENERALIDADES.

Definición 1.1. Se llama terna pitagórica a un elemento $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tal que $a^2 + b^2 = c^2$, estando esta nomenclatura asociada al Teorema de Pitágoras, que afirma que, en cualquier triángulo rectángulo, se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, por lo que, en lo sucesivo, dada una terna pitagórica (a, b, c) , a y b se denominarán catetos y c hipotenusa:



En lo sucesivo, denotaremos por $T = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : a^2 + b^2 = c^2\}$ al conjunto de todas las ternas pitagóricas.

Definición 1.2. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$, se dice que es primitiva cuando $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ y se dice que está ordenada cuando $a < b < c$.

Propiedades 1.1. Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica, se verifica que:

- ① Sus catetos son distintos.
- ② Alguno de sus catetos es par.
- ③ Algunos de sus catetos es múltiplo de 3, por lo que $ab \equiv 0 \pmod{3}$.
- ④ $ab \equiv 0 \pmod{4}$, por lo que, si uno de sus catetos es impar, el otro cateto ha de ser múltiplo de 4.
- ⑤ Alguno de sus términos es múltiplo de 5, por lo que $abc \equiv 0 \pmod{60}$.
- ⑥ Si (a, b, c) es ordenada, entonces, $a \geq 3$, $b \geq 4$ y $c \geq 5$, lo cual implica que, para cualquier terna pitagórica, el menor de sus catetos es mayor o igual que 3, por lo que no puede existir ninguna terna pitagórica formada por tres números primos.
- ⑦ Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $(ka, kb, kc) \in T$ también es una terna pitagórica.
- ⑧ Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \mid \text{mcd}(a, b, c)$, $(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}) \in T$ también es una terna pitagórica.
- ⑨ Si (a, b, c) es primitiva, entonces, uno y sólo uno de sus catetos es impar y su hipotenusa es impar.
- ⑩ Si (a, b, c) es primitiva, entonces, existen $u, v \in \mathbb{N}$ con $u > v$ y tales que:

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (\text{si } a \text{ es impar y } b \text{ es par}) \quad \text{ó} \quad \begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (\text{si } a \text{ es par y } b \text{ es impar})$$

siendo, además, $\text{mcd}(u, v) = 1$ y $u - v \equiv 1 \pmod{2}$.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

❶ Si (a, b, c) es una terna pitagórica cualquiera, entonces, existen $u, v \in (0, +\infty)$ con $u > v$ y tales que:

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (\text{si } a \text{ es impar y } b \text{ es par}) \quad \text{ó} \quad \begin{cases} a = 2uv \\ b = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (\text{si } a \text{ es par y } b \text{ es impar})$$

Demostración:

① Si $a = b$, entonces:

$$c^2 = 2a^2 \Rightarrow c = \sqrt{2} a \notin \mathbb{N}$$

y se llega a una contradicción.

② Basta tener en cuenta que 2 no es resto cuadrático módulo 4.

③ Basta tener en cuenta que 2 no es resto cuadrático módulo 3.

④ Si bc no fuese múltiplo de 4, como, según la segunda propiedad, alguno de los catetos es par, podrían ocurrir dos cosas:

❶ Si a fuese impar y b fuese par (pero no múltiplo de 4), entonces:

$$\begin{cases} \begin{cases} a \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ \text{ó} \\ a \equiv \pm 3 \pmod{8} \\ b \equiv \pm 2 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{8} \\ b^2 \equiv 4 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

lo cual es imposible, ya que 5 no es resto cuadrático módulo 8.

❷ Si a fuese par y b fuese impar (pero no múltiplo de 4), se razonaría de forma totalmente análoga.

⑤ Si $a \equiv 0 \pmod{5}$ ó $b \equiv 0 \pmod{5}$ no habría nada que probar. En caso contrario, como los únicos restos cuadráticos no nulos módulo 5 son 1 y 4, puede ocurrir que:

$$\begin{cases} \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{5} \rightarrow \text{imposible} \\ \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow c \equiv 0 \pmod{5} \\ \begin{cases} a^2 \equiv 4 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow c \equiv 0 \pmod{5} \\ \begin{cases} a^2 \equiv 4 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \equiv 3 \pmod{5} \rightarrow \text{imposible} \end{cases}$$

Finalmente, como $\text{mcd}(3,4) = 1$, según los dos apartados anteriores, $ab \equiv 0 \pmod{12}$ y, como $\text{mcd}(5,12) = 1$, entonces, $abc \equiv 0 \pmod{60}$.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

⑥ Si $a < 3$, puede ocurrir que:

☺ $a = 1$, en cuyo caso:

$$(c+b)(c-b) = c^2 - b^2 \stackrel{*}{=} 1 \Rightarrow \begin{cases} c+b=1 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \notin \mathbb{N} \\ c=1 \end{cases} \rightarrow \text{imposible}$$

☹ $a = 2$, en cuyo caso:

$$(c+b)(c-b) = c^2 - b^2 \stackrel{*}{=} 4 \underset{c+b>c-b}{\Rightarrow} \begin{cases} c+b=4 \\ c-b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \\ c=\frac{5}{2} \notin \mathbb{N} \end{cases} \rightarrow \text{imposible}$$

y, por tanto, $a \geq 3$. Además, como $a < b < c$, necesariamente, debe ocurrir que $b \geq 4$ y $c \geq 5$.

Además, si existiese una terna pitagórica tal que el menor de sus catetos fuese menor que 3, la correspondiente terna pitagórica ordenada contradiría lo anterior. Finalmente, si una terna pitagórica estuviese formada por tres números primos, uno de sus catetos tendría que ser igual a 2 (ya que, al menos, uno de los catetos ha de ser par), lo cual es imposible (más adelante, en el Teorema 6.11., se probará la inexistencia de ternas pitagóricas distintas de $(3^1, 2^2, 5^1)$ cuyos elementos sean potencias de números primos).

⑦ Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, como:

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$$

entonces, $(ka, kb, kc) \in T$ también es una terna pitagórica.

⑧ Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \mid \text{mcd}(a, b, c)$, como:

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{k^2} = \frac{c^2}{k^2} = \left(\frac{c}{k}\right)^2$$

entonces, $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right) \in T$ también es una terna pitagórica.

⑨ Si la terna pitagórica (a, b, c) es primitiva, como $\text{mcd}(a, b, c) = 1$, entonces, al menos uno de estos tres números naturales ha de ser impar. Además:

☺ Si ambos catetos fuesen pares, la hipotenusa sería par, lo cual contradice lo dicho anteriormente.

☹ Si ambos catetos fuesen impares, tendríamos que:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2} \\ b \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \Rightarrow c^2 \equiv 2 \pmod{4}$$

lo cual es imposible, ya que los únicos restos cuadráticos módulo 4 son 0 y 1.

Por tanto, uno de los catetos ha de ser par y el otro impar, lo cual implica que la hipotenusa ha de ser impar.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

- ⑩ Si la terna pitagórica (a, b, c) es primitiva, suponiendo que a es impar y que b es par (en caso contrario se razonaría de forma totalmente análoga), en caso de existir la parametrización propuesta, debería ser:

$$\begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ c = u^2 + v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\frac{c+a}{2}} \\ v = \sqrt{\frac{c-a}{2}} \end{cases}$$

Además, como c es impar, resulta que:

$$\exists n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \begin{cases} a = 2n + 1 \\ c = 2m + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c+a}{2} = m + n + 1 \in \mathbb{N} \\ \frac{c-a}{2} = m - n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

siendo:

$$\left(\frac{c+a}{2}\right)\left(\frac{c-a}{2}\right) = \frac{c^2 - a^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \in \mathbb{N}$$

y:

$$\begin{aligned} \text{mcd}\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}\right) &= \text{mcd}(m+n+1, m-n) \\ &= \text{mcd}(2n+1, m-n) \\ &= \text{mcd}(2n+1, 2(m-n)) \\ &= \text{mcd}(2n+1, 2m+1) \\ &= \text{mcd}(a, c) \\ &= 1 \end{aligned}$$

por lo que, necesariamente, ha de ocurrir que $\frac{c \pm a}{2}$ sean cuadrados perfectos y, por tanto:

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{c+a}{2}} \in \mathbb{N} \\ v = \sqrt{\frac{c-a}{2}} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

siendo $u > v$, ya que $\frac{c+a}{2} > \frac{c-a}{2}$ y la función raíz cuadrada es estrictamente creciente. Además, si:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mcd}(u, v) = d > 1 \Rightarrow \begin{cases} d^2 \mid a = u^2 - v^2 \\ d^2 \mid b = 2uv \\ d^2 \mid c = u^2 + v^2 \end{cases} \Rightarrow d^2 \mid \text{mcd}(a, b, c) = 1 \Rightarrow d = 1 \rightarrow \text{imposible} \\ u - v \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow u \equiv v \pmod{2} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{2} \\ b \equiv 0 \pmod{2} \\ c \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \mid \text{mcd}(a, b, c) \rightarrow \text{imposible} \end{array} \right.$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

- ❶ Si (a, b, c) es una terna pitagórica cualquiera y $\text{mcd}(a, b, c) = k \in \mathbb{N}$, como la terna pitagórica $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ es primitiva, suponiendo que a es impar y que b es par (en caso contrario se razonaría de forma totalmente análoga), según el caso anterior:

$$\exists \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{N} / \bar{u} > \bar{v} : \begin{cases} \frac{a}{k} = \bar{u}^2 - \bar{v}^2 \\ \frac{b}{k} = 2\bar{u}\bar{v} \\ \frac{c}{k} = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 \end{cases} \Rightarrow \exists u = \sqrt{k}\bar{u}, v = \sqrt{k}\bar{v} \in (0, +\infty) / u > v : \begin{cases} a = k(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) = u^2 - v^2 \\ b = 2k\bar{u}\bar{v} = 2uv \\ c = k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Propiedades 1.2.

- ① No existe ninguna terna pitagórica formada por tres cuadrados perfectos.
- ② No existe ninguna terna pitagórica formada por tres potencias de 2 (más adelante, en el Teorema 6.10., se probará la inexistencia de ternas pitagóricas (primitivas) distintas de $(3^1, 2^2, 5^1)$ cuyos elementos sean potencias de números primos).
- ③ No existe ninguna terna pitagórica cuyos elementos estén en progresión geométrica.
- ④ Cualquier terna pitagórica cuyos elementos estén en progresión aritmética debe ser proporcional a $(3, 4, 5)$.

Demostración:

- ① Si existiese una terna pitagórica de la forma (u^2, v^2, w^2) ($u, v, w \in \mathbb{N}$), entonces:

$$\exists u, v, w \in \mathbb{N} : u^4 + v^4 = w^4$$

lo cual contradice el Teorema de Fermat.

- ② Si existiese una forma pitagórica (que podemos suponer ordenada sin pérdida de generalidad) de la forma $(2^u, 2^v, 2^w)$ ($u, v, w \in \mathbb{N}$, $u < v < w$), entonces:

$$2^{2u} + 2^{2v} = 2^{2w} \Rightarrow 1 + 2^{2(v-u)} = 2^{2(w-u)}$$

lo cual es imposible.

- ③ Si existiese una terna pitagórica de la forma $(a, ak, ak^2) \in T$ ($k > 1$), según el octavo apartado de Propiedades 1.1., $(1, k, k^2)$ también sería una terna pitagórica, lo cual contradice el sexto apartado de dichas propiedades. Por tanto, no existe ninguna terna pitagórica ordenada cuyos elementos estén en progresión geométrica.

- ④ Si existiese una terna pitagórica de la forma $(a-d, a, a+d) \in T$ ($d \in \mathbb{N}$, $d < a$), entonces:

$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \Rightarrow a^2 = 4ad \xrightarrow{a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \neq 0} a = 4d$$

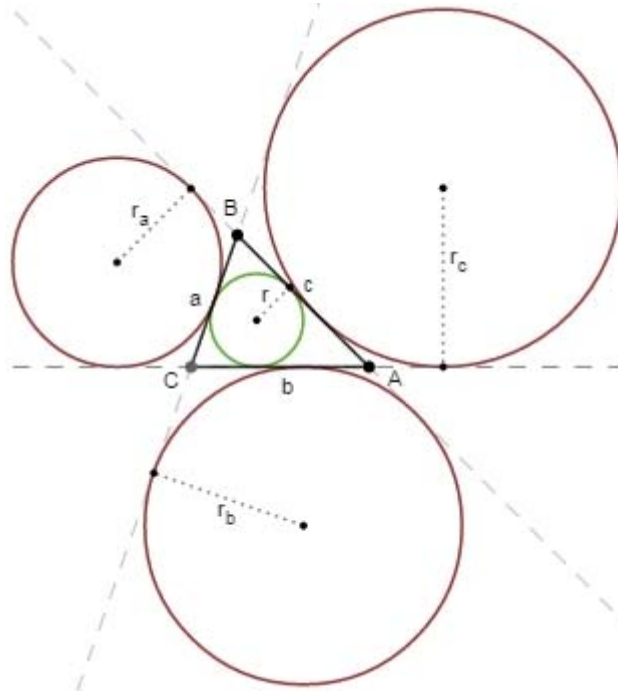
por lo que las únicas ternas pitagóricas ordenadas cuyos elementos están en progresión aritmética son las de la forma $(3d, 4d, 5d)$, con $d \in \mathbb{N}$.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Definición 1.3. Dado un triángulo ABC , se llama inradio al radio r de su circunferencia inscrita y se llama exinradios a los radios r_a , r_b y r_c de sus circunferencias exinscritas.



Definición 1.4. Se llama área, semiperímetro, inradio y exinradios de una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ al área, semiperímetro, inradio y exinradios del correspondiente triángulo rectángulo ABC .

Teorema 1.1. Si ABC es un triángulo con área Δ_{ABC} , semiperímetro s y exinradios r_a , r_b y r_c , se verifica que:

$$\begin{cases} r_a = \frac{\Delta_{ABC}}{s-a} \\ r_b = \frac{\Delta_{ABC}}{s-b} \\ r_c = \frac{\Delta_{ABC}}{s-c} \end{cases}$$

Demostración:

Las demostraciones de las tres fórmulas son totalmente análogas, por lo que vamos a probar únicamente la primera. En el gráfico que se muestra al final de la demostración, la recta DE es paralela a la recta BC , siendo:

$$\begin{aligned} \Delta_{ADE} &= \Delta_{ABC} + \Delta_{I_aBD} + \Delta_{I_aDE} + \Delta_{I_aEC} + \Delta_{I_aCB} \\ &= \Delta_{ABC} + \frac{r_a c'}{2} + \frac{r_a a'}{2} + \frac{r_a b'}{2} + \frac{r_a a}{2} \\ &= \Delta_{ABC} + \frac{r_a}{2}(a' + b' + c') + \frac{r_a a}{2} \end{aligned}$$

Además, como el semiperímetro del triángulo ADE es:

$$s_{ADE} = \frac{a' + b + b' + c + c'}{2} = \frac{a' + b' + c'}{2} + \frac{b + c}{2}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y el radio de la circunferencia inscrita en este triángulo es r_a , entonces:

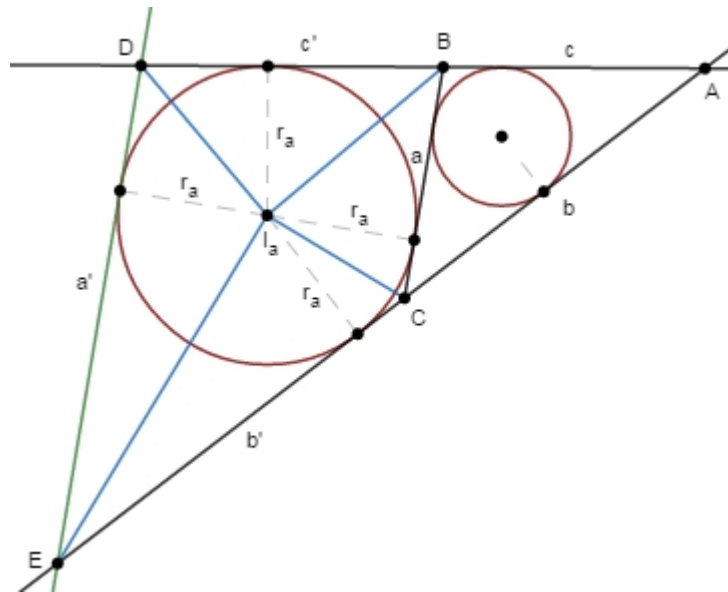
$$\Delta_{ADE} = r_a \left(\frac{a' + b' + c'}{2} + \frac{b+c}{2} \right)$$

por lo que, igualando ambas expresiones, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta_{ABC} + \frac{r_a}{2}(a' + b' + c') + \frac{r_a a}{2} &= r_a \left(\frac{a' + b' + c'}{2} + \frac{b+c}{2} \right) \\ \Delta_{ABC} &= r_a \left(\frac{-a+b+c}{2} \right) \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$r_a = \frac{\Delta_{ABC}}{s-a}$$



Propiedades 1.3. Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica cualquiera, según hemos probado anteriormente:

$$\exists u, v \in (0, +\infty) / u > v : \begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}$$

por lo que, si Δ , s , r , r_a , r_b y r_c denotan su área, su semiperímetro, su inradio y sus exinradios, respectivamente, se verifica que:

$$\textcircled{1} \quad \Delta = \frac{ab}{2} = \frac{2uv(u^2 - v^2)}{2} = uv(u+v)(u-v)$$

$$\textcircled{2} \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2u^2 + 2uv}{2} = u(u+v)$$

$$\textcircled{3} \quad r = \frac{\Delta}{s} = \frac{uv(u+v)(u-v)}{u(u+v)} = v(u-v)$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

$$\textcircled{4} \quad r_a \stackrel{\text{Teorema 1.1.}}{=} \frac{\Delta}{s-a} = \frac{2\Delta}{-a+b+c} = \frac{2uv(u+v)(u-v)}{2v^2+2uv} = \frac{uv(u+v)(u-v)}{v(u+v)} = u(u-v)$$

$$\textcircled{5} \quad r_b \stackrel{\text{Teorema 1.1.}}{=} \frac{\Delta}{s-b} = \frac{2\Delta}{a-b+c} = \frac{2uv(u+v)(u-v)}{2u^2-2uv} = \frac{uv(u+v)(u-v)}{u(u-v)} = v(u+v)$$

$$\textcircled{6} \quad r_c \stackrel{\text{Teorema 1.1.}}{=} \frac{\Delta}{s-c} = \frac{2\Delta}{a+b-c} = \frac{2uv(u+v)(u-v)}{2uv-2v^2} = \frac{uv(u+v)(u-v)}{v(u-v)} = u(u+v) = s$$

Teorema 1.2. Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica y Δ , r , r_a , r_b y r_c denotan su área, su inradio y sus exinradios, respectivamente, se verifica que:

$$rr_a r_b r_c = \Delta^2$$

Demostración 1:

Aplicando las propiedades anteriores, resulta que:

$$rr_a r_b r_c = v(u-v)u(u-v)v(u+v)u(u+v) = [uv(u+v)(u-v)]^2 = \Delta^2$$

Demostración 2:

$$rr_a r_b r_c = \frac{\Delta^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \stackrel{\text{Fórmula de Herón}}{=} \frac{\Delta^4}{\Delta^2} = \Delta^2$$

Teorema 1.3. Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica y Δ , s , r , r_a , r_b y r_c denotan su área, su semiperímetro, su inradio y sus exinradios, respectivamente, se verifica que:

$$r + r_a + r_b + r_c = 2s$$

Demostración:

Aplicando las propiedades anteriores, resulta que:

$$r + r_a + r_b + r_c = v(u-v) + u(u-v) + v(u+v) + u(u+v) = (u+v)[u-v+u+v] = 2u(u+v) = 2s$$

Teorema 1.4. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio r y exinradios r_a , r_b y r_c , se verifica que:

$$\textcircled{1} \quad r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad r_a = \frac{a-b+c}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad r_b = \frac{-a+b+c}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad r_c = \frac{a+b+c}{2}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Demostración:

Si llamamos Δ y s al área y al semiperímetro, respectivamente, de la terna pitagórica (a, b, c) , resulta que:

$$\textcircled{1} \quad r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad r_a \stackrel{\text{Teorema 1.1.}}{=} \frac{\Delta}{s-a} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{-a+b+c}{2}} = \frac{ab}{-a+b+c} = \frac{ab(a-b+c)}{(-a+b+c)(a-b+c)} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} \frac{ab(a-b+c)}{2ab} = \frac{a-b+c}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad r_b \stackrel{\text{Teorema 1.1.}}{=} \frac{\Delta}{s-b} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a-b+c}{2}} = \frac{ab}{a-b+c} = \frac{ab(-a+b+c)}{(a-b+c)(-a+b+c)} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} \frac{ab(-a+b+c)}{2ab} = \frac{-a+b+c}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad r_c \stackrel{\text{Teorema 1.1.}}{=} \frac{\Delta}{s-c} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{ab}{a+b-c} = \frac{ab(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} \frac{ab(a+b+c)}{2ab} = \frac{a+b+c}{2} = s$$

Corolario 1.1.

- ① (Teorema de invarianza) Si en una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ se intercambia el orden de los catetos, entonces, su inradio y su semiperímetro no varían.
- ② (Teorema de reciprocidad) Si en una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con exinradios r_a, r_b y r_c se intercambia el orden de los catetos, entonces, su exinradios r_a y r_b también se intercambian.

Demostración:

- ① Si $r_{(a,b,c)}$ y $s_{(a,b,c)}$ son el inradio y el semiperímetro, respectivamente, de la terna pitagórica (a, b, c) y $r_{(b,a,c)}$ y $s_{(b,a,c)}$ son el inradio y el semiperímetro, respectivamente, de la terna pitagórica (b, a, c) , entonces:

$$\textcircled{1} \quad r_{(a,b,c)} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{a+b-c}{2} = \frac{b+a-c}{2} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} r_{(b,a,c)}$$

$$\textcircled{2} \quad s_{(a,b,c)} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{a+b+c}{2} = \frac{b+a+c}{2} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} s_{(b,a,c)}$$

- ② Si $r_{a(a,b,c)}$ y $r_{b(a,b,c)}$ son los exinradios de la terna pitagórica (a, b, c) y $r_{a(b,a,c)}$ y $r_{b(b,a,c)}$ son los exinradios de la terna pitagórica (b, a, c) , entonces:

$$r_{a(a,b,c)} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{a-b+c}{2} = \frac{-b+a+c}{2} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} r_{b(b,a,c)}$$

Corolario 1.2. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que estas cuatro magnitudes toman valores distintos.

Demostración:

$$\textcircled{1} \quad r = r_a \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{\Rightarrow} \frac{a+b-c}{2} = \frac{a-b+c}{2} \Rightarrow b = c \rightarrow \text{imposible}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

- ② $r = r_b \xrightarrow{\text{Teorema 1.4.}} \frac{a+b-c}{2} = \frac{-a+b+c}{2} \Rightarrow a = c \rightarrow \text{imposible}$
- ③ $r = r_c \xrightarrow{\text{Teorema 1.4.}} \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow c = 0 \rightarrow \text{imposible}$
- ④ $r_a = r_b \xrightarrow{\text{Teorema 1.4.}} \frac{a-b+c}{2} = \frac{-a+b+c}{2} \Rightarrow a = b \rightarrow \text{imposible}$
- ⑤ $r_a = r_c \xrightarrow{\text{Teorema 1.4.}} \frac{a-b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow b = 0 \rightarrow \text{imposible}$
- ⑥ $r_b = r_c \xrightarrow{\text{Teorema 1.4.}} \frac{-a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow a = 0 \rightarrow \text{imposible}$

Corolario 1.3. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que:

$$(a, b, c) = (r_a + r, r_b + r, r_c - r)$$

Demostración:

Utilizando las fórmulas demostradas en el Teorema 1.4., resulta que:

$$(r_a + r, r_b + r, r_c - r) = \left(\frac{a+b-c}{2} + \frac{a-b+c}{2}, \frac{a+b-c}{2} + \frac{-a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{2} - \frac{a+b-c}{2} \right) = (a, b, c)$$

Corolario 1.4. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que:

- ① $2r^2 = (c-a)(c-b)$
- ② $2r_a^2 = (c+a)(c-b)$
- ③ $2r_b^2 = (c-a)(c+b)$
- ④ $2r_c^2 = (c+a)(c+b)$

Demostración:

Utilizando las fórmulas demostradas en el Teorema 1.4., resulta que:

- ① $2r^2 = \frac{(a+b-c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc)}{2} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} c^2 + ab - ac - bc = (c-a)(c-b)$
- ② $2r_a^2 = \frac{(a-b+c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab + ac - bc)}{2} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} c^2 - ab + ac - bc = (c+a)(c-b)$
- ③ $2r_b^2 = \frac{(-a+b+c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(-ab - ac + bc)}{2} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} c^2 - ab - ac + bc = (c-a)(c+b)$
- ④ $2r_c^2 = \frac{(a+b+c)^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)}{2} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} c^2 + ab + ac + bc = (c+a)(c+b)$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Corolario 1.5.

- ① Existe una única una terna pitagórica ordenada $(a, b, c) \in T$ con inradio unidad.
- ② Para cualquier terna pitagórica $(a, b, c) \in T$, sus tres exinradios son distintos de la unidad.
- ③ Al menos uno de los catetos de cualquier terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ es un número par.

Demostración:

- ① Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica tal que $a < b < c$ y $r = 1$, según el Corolario 1.4.:

$$(c-a)(c-b) \stackrel{*}{=} 2 \underset{c-a > c-b}{\Rightarrow} \begin{cases} c-a=2 \\ c-b=1 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{c^2=a^2+b^2} \\ \xrightarrow{c > b > a \geq 3} \end{matrix} \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}$$

- ② Vamos a estudiar cada caso por separado:

- ① Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica tal que $r_a = 1$, según el Corolario 1.4.:

$$(c+a)(c-b) \stackrel{*}{=} 2 \underset{c+a > c-b}{\Rightarrow} \begin{cases} c+a=2 \\ c-b=1 \end{cases} \rightarrow \text{imposible}$$

- ② Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica tal que $r_b = 1$, según el Corolario 1.4.:

$$(c-a)(c+b) \stackrel{*}{=} 2 \underset{c-a < c+b}{\Rightarrow} \begin{cases} c-a=1 \\ c+b=2 \end{cases} \rightarrow \text{imposible}$$

- ③ Si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica tal que $r_c = 1$, según el Corolario 1.4.:

$$(c+a)(c+b) \stackrel{*}{=} 2 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} c+a=1 \\ c+b=2 \end{cases} \rightarrow \text{imposible} \\ \text{ó} \\ \begin{cases} c+a=2 \\ c+b=1 \end{cases} \rightarrow \text{imposible} \end{cases}$$

- ③ Si $(a, b, c) \in T$ fuese una terna pitagórica con ambos catetos a y b impares, entonces, su hipotenusa c sería par, por lo que:

$$\begin{cases} c-a \text{ impar} \\ c-b \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow 2r^2 \stackrel{\text{Corolario 1.4.}}{=} (c-a)(c-b) \text{ impar}$$

y se llegaría a una contradicción.

Corolario 1.6. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que:

$$r_a r_b = r r_c$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Demostración:

Como:

$$(c+a)(c-b)(c-a)(c+b) = (c+a)(c+b)(c-a)(c-b)$$

entonces, el Corolario 1.4. nos asegura que:

$$4r_a^2 r_b^2 = 4r^2 r_c^2$$

$$r_a^2 r_b^2 = 4r^2 r_c^2$$

$$r_a r_b = r r_c$$

Corolario 1.7. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con semiperímetro s , inradio r y exinradios r_a , r_b y r_c , se verifica que:

- ① $r_a < a$
- ② $r_b < b$
- ③ $r_c > c$
- ④ $r_a + r_b = c$
- ⑤ $r_a - r_b = a - b$
- ⑥ $r_c - r_a = b$
- ⑦ $r_c - r_b = a$
- ⑧ $r - r_a = c - b$
- ⑨ $r + r_a + r_b = r_c$
- ⑩ $r + r_a + r_b + r_c = 2s$

Demostración:

Utilizando las fórmulas demostradas en el Teorema 1.4., resulta que:

$$\textcircled{1} \quad r_a - a = \frac{a-b+c}{2} - a = -\frac{a+b-c}{2} \underset{\text{desigualdad triangular}}{<} 0 \Rightarrow r_a < a$$

$$\textcircled{2} \quad r_b - b = \frac{-a+b+c}{2} - b = -\frac{a+b-c}{2} \underset{\text{desigualdad triangular}}{<} 0 \Rightarrow r_b < b$$

$$\textcircled{3} \quad r_c - c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2} \underset{\text{desigualdad triangular}}{>} 0 \Rightarrow r_c > c$$

$$\textcircled{4} \quad r_a + r_b = \frac{a-b+c}{2} + \frac{-a+b+c}{2} = c$$

$$\textcircled{5} \quad r_a - r_b = \frac{a-b+c}{2} - \frac{-a+b+c}{2} = a - b \quad (\text{lo cual implica que } a < b \Leftrightarrow r_a < r_b)$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

$$\textcircled{6} \quad r_c - r_a = \frac{a+b+c}{2} - \frac{a-b+c}{2} = b \quad (\text{lo cual implica que } r_c > r_a)$$

$$\textcircled{7} \quad r_c - r_b = \frac{a+b+c}{2} - \frac{-a+b+c}{2} = a \quad (\text{lo cual implica que } r_c > r_b)$$

$$\textcircled{8} \quad r_a - r = \frac{a-b+c}{2} - \frac{a+b-c}{2} = c - b \quad (\text{lo cual implica que } r_a > r)$$

$$\textcircled{9} \quad r + r_a + r_b = \frac{a+b-c}{2} + \frac{a-b+c}{2} + \frac{-a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = r_c$$

$$\textcircled{10} \quad r + r_a + r_b + r_c \underset{\text{apartado anterior}}{=} r_c + r_c = 2r_c \underset{\text{Teorema 1.4.}}{=} 2s$$

Corolario 1.8. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio $r = \frac{a+b-c}{2}$, se verifica que:

$$\left(\frac{a}{a-r}\right)\left(\frac{b}{b-r}\right) = 2$$

Demostración:

$$\left(\frac{a}{a-r}\right)\left(\frac{b}{b-r}\right) \underset{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{ab}{\left(a - \frac{a+b-c}{2}\right)\left(b - \frac{a+b-c}{2}\right)} = \frac{4ab}{(a-b+c)(-a+b+c)} \stackrel{c^2=a^2+b^2}{=} \frac{4ab}{2ab} = 2$$

Lema 1.1. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \neq b$ y:

$$\begin{cases} d \mid ab \\ d \mid a+b \end{cases}$$

se verifica que:

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

Demostración:

Como $d \mid a+b$, basta con probar que $d \mid a$. Si $a = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n}$ ($\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) y $b = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$ ($\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) son las descomposiciones en factores primos de a y b , respectivamente, entonces:

$$ab = p_1^{\gamma_1+\beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n+\beta_n}$$

por lo que:

$$\exists \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ / \ \forall i = 1, \dots, n : \theta_i \leq \gamma_i + \beta_i : d = p_1^{\theta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\theta_n}$$

Además, si $d \nmid a$, entonces:

$$\exists k \in \{1, \dots, n\} : \beta_k \geq \theta_k - \gamma_k \geq 0$$

por lo que, suponiendo que $k = 1$ (para simplificar la notación), se verifica que:

① Si $\gamma_1 \leq \beta_1$, como:

$$p_1^{\theta_1} \mid d \mid a+b = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n} + p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces:

$$p_1^{\theta_1 - \gamma_1} \mid p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n} + p_1^{\beta_1 - \gamma_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n} \Rightarrow \beta_1 - \gamma_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \gamma_1 < \theta_1$$

y, por tanto:

$$p_1^{\theta_1} \mid d \mid a + b = p_1^{\gamma_1} \left(p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n} + p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n} \right) \Rightarrow \theta_1 \leq \gamma_1$$

$(a \neq b \Rightarrow \text{los dos sumandos son distintos})$

llegándose a una contradicción (nótese que, si fuese $a = b$, ambos sumandos serían iguales y, si $p_1 = 2$ y $\theta_1 = \gamma_1 + 1$ no habría contradicción, como ocurre, por ejemplo, si $a = b = 6$).

② Si $\gamma_1 > \beta_1 > 0$, como:

$$p_1^{\theta_1} \mid d \mid a + b = p_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n} + p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$$

entonces:

$$p_1^{\theta_1 - \beta_1} \mid p_1^{\gamma_1 - \beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\gamma_n} + p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n} \Rightarrow p_1 \mid p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$$

llegándose a una contradicción (nótese que, si fuese $a = b$, este caso no se podría dar).

Teorema 1.5. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con semiperímetro s , inradio r y exinradios r_a, r_b y $r_c \stackrel{\text{Teorema 1.4}}{=} s$, se verifica que:

$$\text{mcd}(r, s) \stackrel{1}{=} \text{mcd}(a, b, c) \stackrel{2}{=} \text{mcd}(r_a, r_b)$$

Demostración:

Vamos a probar únicamente la primera igualdad, ya que la segunda se probaría de forma totalmente análoga:

☺ ¿ $\text{mcd}(r, s) \mid \text{mcd}(a, b, c)$? Como:

$$\text{mcd}(r, s) \stackrel{c=s-r}{=} \text{mcd}(r, c) \Rightarrow \begin{cases} \text{mcd}(r, s) \mid r \Rightarrow \text{mcd}(r, s) \mid 2r \\ \text{mcd}(r, s) \mid c \end{cases} \xrightarrow{a+b=2r+c} \text{mcd}(r, s) \mid a + b$$

y:

$$\text{mcd}(r, s) \mid 2rs \stackrel{\text{Teorema 1.4}}{=} 2 \left(\frac{a+b-c}{2} \right) \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2} \stackrel{c^2=a^2+b^2}{=} ab$$

entonces, al ser $a \neq b$, el Lema 1.1. nos asegura que:

$$\begin{cases} \text{mcd}(r, s) \mid a \\ \text{mcd}(r, s) \mid b \end{cases} \Rightarrow \text{mcd}(r, s) \mid \text{mcd}(a, b) \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \text{mcd}(a, b, c)$$

$\left(\frac{c}{\text{mcd}(a,b)} \right)^2 = \left(\frac{a}{\text{mcd}(a,b)} \right)^2 + \left(\frac{b}{\text{mcd}(a,b)} \right)^2 \in \mathbb{N}$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

⊗ ¿ $mcd(a, b, c) \mid mcd(r, s)$?. Vamos a distinguir dos casos:

⊗ Si $d = mcd(a, b, c)$ es impar, como:

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \\ d \mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 2r \\ d \mid 2s \end{cases} \Rightarrow \exists p, q \in 2\mathbb{N} : \begin{cases} 2r = pd \\ 2s = qd \end{cases} \Rightarrow \exists p, q \in 2\mathbb{N} : \begin{cases} r = \left(\frac{p}{2}\right)d \\ s = \left(\frac{q}{2}\right)d \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} d \mid r \\ d \mid s \end{cases} \Rightarrow mcd(a, b, c) = d \mid mcd(r, s)$$

⊗ Si $d = mcd(a, b, c) = 2^{\Delta_0}m$, con $\Delta_0 \in \mathbb{N}$ y m impar, como:

$$\begin{cases} m \mid \frac{a}{2^{\Delta_0}} \\ m \mid \frac{b}{2^{\Delta_0}} \\ m \mid \frac{c}{2^{\Delta_0}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \mid \frac{r}{2^{\Delta_0-1}} \text{ (par)} \\ m \mid \frac{s}{2^{\Delta_0-1}} \text{ (par)} \end{cases} \Rightarrow \exists p, q \in 2\mathbb{N} : \begin{cases} \frac{r}{2^{\Delta_0-1}} = pm \\ \frac{s}{2^{\Delta_0-1}} = qm \end{cases} \Rightarrow \exists p, q \in 2\mathbb{N} : \begin{cases} \frac{r}{2^{\Delta_0}} = \left(\frac{p}{2}\right)m \\ \frac{s}{2^{\Delta_0}} = \left(\frac{q}{2}\right)m \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} m \mid \frac{r}{2^{\Delta_0}} \\ m \mid \frac{s}{2^{\Delta_0}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid r \\ d \mid s \end{cases} \Rightarrow mcd(a, b, c) = d \mid mcd(r, s)$$

Corolario 1.9. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con semiperímetro s , inradio r y exinradios menores r_a y r_b , se verifica que:

$$mcd(r, r_a, r_b, s) = mcd(a, b, c)$$

Demostración:

El Teorema 1.5. nos asegura que:

$$mcd(r, s) = mcd(a, b, c) = mcd(r_a, r_b)$$

por lo que:

$$mcd(a, b, c) \underset{mcd(r,s)=mcd(r_a,r_b,s)=mcd(r_a,r_b)}{=} mcd(r, r_a, r_b, s)$$

Teorema 1.6. Dado un triángulo ABC con área Δ , semiperímetro s , inradio r y exinradios r_a , r_b y r_c , (para cualquiera de sus ángulos) se verifica que:

① $r = (s - c) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$

② $r_a = (s - b) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

③ $r_b = (s - a) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

④ $r_c = s \tan\left(\frac{C}{2}\right)$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Demostración:

① Como $\Delta = sr$, entonces:

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{ab \sin C}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab \sin C}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c) \sin C}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{ab(a+b-c) \sin C}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} \stackrel{\text{Th. Coseno}}{=} \frac{ab(a+b-c) \sin C}{2ab(1 + \cos C)} = \frac{(a+b-c) \sin C}{2(1 + \cos C)}$$

por lo que:

$$r = \frac{(s-c) \sin C}{1 + \cos C} = \frac{2(s-c) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{(s-c) \sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = (s-c) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

② Según el Teorema 1.1.:

$$r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \frac{\frac{ab \sin C}{2}}{\frac{-a+b+c}{2}} = \frac{ab \sin C}{-a+b+c} = \frac{ab(a-b+c) \sin C}{(-a+b+c)(a-b+c)} = \frac{ab(a-b+c) \sin C}{a^2 + b^2 - 2ab - c^2} \stackrel{\text{Th. Coseno}}{=} \frac{ab(a-b+c) \sin C}{2ab(1 - \cos C)}$$

por lo que:

$$r_a = \frac{(a-b+c) \sin C}{2(1 - \cos C)} = \frac{(s-b) \sin C}{1 - \cos C} = \frac{2(s-b) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{(s-b) \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} = (s-b) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

③ Según el Teorema 1.1.:

$$r_b = \frac{\Delta}{s-b} = \frac{\frac{ab \sin C}{2}}{\frac{a-b+c}{2}} = \frac{ab \sin C}{a-b+c} = \frac{ab(-a+b+c) \sin C}{(a-b+c)(-a+b+c)} = \frac{ab(-a+b+c) \sin C}{a^2 + b^2 - 2ab - c^2} \stackrel{\text{Th. Coseno}}{=} \frac{ab(-a+b+c) \sin C}{2ab(1 - \cos C)}$$

por lo que:

$$r_b = \frac{(-a+b+c) \sin C}{2(1 - \cos C)} = \frac{(s-a) \sin C}{1 - \cos C} = \frac{2(s-a) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{(s-a) \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} = (s-a) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$$

④ Según el Teorema 1.1.:

$$r_c = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{\frac{ab \sin C}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{ab \sin C}{a+b-c} = \frac{ab(a+b+c) \sin C}{(a+b-c)(a+b+c)} = \frac{ab(a+b+c) \sin C}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} \stackrel{\text{Th. Coseno}}{=} \frac{ab(a+b+c) \sin C}{2ab(1 + \cos C)}$$

por lo que:

$$r_c = \frac{(a+b+c) \sin C}{2(1 + \cos C)} = \frac{s \sin C}{1 + \cos C} = \frac{2s \sin\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{s \sin\left(\frac{C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = s \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

Corolario 1.10. Un triángulo ABC con semiperímetro s , inradio r y exinradios r_a , r_b y r_c es rectángulo en C si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

① $r = s - c$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

② $r_a = s - b$

③ $r_b = s - a$

④ $r_c = s$

Demostración:

Según el Teorema 1.6., cualquiera de estas cuatro condiciones equivale a que $\tan\left(\frac{C}{2}\right) = 1$, es decir, cualquiera de estas cuatro condiciones equivale a que $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{4}$, lo cual equivale a que $C = \frac{\pi}{2}$ y, por tanto, cualquiera de estas cuatro condiciones equivale a que el triángulo ABC sea rectángulo en C .

Teorema 1.7. Dado un triángulo ABC con inradio r , exinradios r_a, r_b y r_c y semiperímetro s , los siguientes enunciados son equivalentes:

① El triángulo ABC es rectángulo en C .

② $rr_c = r_a r_b$

③ $r_c = s$

④ $r + r_a + r_b = s$

(para triángulos rectángulos en cualquiera de los otros dos ángulos se verifican fórmulas totalmente análogas)

Demotración:

Vamos a probar que los tres últimos enunciados son equivalentes al primero:

1 \Leftrightarrow 2

Si Δ es el área del triángulo ABC , como:

$$\begin{aligned} rr_c - r_a r_b &= \frac{2\Delta}{a+b+c} \frac{2\Delta}{a+b-c} - \frac{2\Delta}{-a+b+c} \frac{2\Delta}{a-b+c} \\ &= 4\Delta^2 \left[\frac{1}{(a+b+c)(a+b-c)} - \frac{1}{(-a+b+c)(a-b+c)} \right] \\ &= \frac{8\Delta^2(c^2 - a^2 - b^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \end{aligned}$$

entonces:

$$rr_c = r_a r_b \Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

es decir, $rr_c = r_a r_b$ si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo en C .

1 \Leftrightarrow 3

Si Δ es el área del triángulo ABC , como:

$$r_c = \frac{2\Delta}{a+b-c} = \frac{ab}{a+b-c} = \frac{ab(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces:

$$r_c - s = \frac{ab(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} - \frac{a+b+c}{2} = (a+b+c) \left[\frac{ab}{(a+b-c)(a+b+c)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{(a+b+c)(c^2 - a^2 - b^2)}{2(a+b-c)(a+b+c)}$$

por lo que:

$$r_c = s \Leftrightarrow c^2 - a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

es decir, $r_c = s$ si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo en C .

1 \Leftrightarrow 4

Si Δ es el área del triángulo ABC , como:

$$\begin{aligned} r + r_a + r_b &= \frac{2\Delta}{a+b+c} + \frac{2\Delta}{-a+b+c} + \frac{2\Delta}{a-b+c} \\ &= 2\Delta \left[\frac{-a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)} \right] \end{aligned}$$

entonces, $r + r_a + r_b = s$ si y sólo si:

$$\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \stackrel{\text{Herón}}{=} 4\Delta \stackrel{*}{=} \frac{(a+b+c)^2(-a+b+c)(a-b+c)}{-a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

es decir, si y sólo si:

$$\begin{aligned} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) &= \frac{(a+b+c)^4(-a+b+c)^2(a-b+c)^2}{(-a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2} \\ a+b-c &= \frac{(a+b+c)^3(-a+b+c)(a-b+c)}{(-a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2} \\ (a+b-c)(-a^2 - b^2 + 3c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2 &= (a+b+c)^3(-a+b+c)(a-b+c) \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si:

$$2(a^2 + b^2 - c^2) \left(\frac{a^3 + b^3 + 3ac^2 + 3bc^2 + 2abc}{>0} + \frac{5c^3 - a^2b - a^2c - ab^2 - b^2c}{>0} \right) = 0$$

y, por tanto, $r + r_a + r_b = s$ si y sólo si el triángulo ABC es rectángulo en C .

Corolario 1.11. Dado un triángulo ABC rectángulo en C , inradio r , exinradios r_a , r_b y r_c y semiperímetro s , se verifica que:

① $r + r_a + r_b = r_c$

② $r + r_a + r_b + r_c = 2s$

Demostración:

Ambas propiedades son consecuencia directa de las equivalencias segunda y tercera probadas en el Teorema 1.7. Además, para triángulos rectángulos en cualquiera de los otros dos ángulos, se verifican fórmulas totalmente análogas.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Corolario 1.12. Un triángulo ABC con semiperímetro s , inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c es rectángulo si y sólo si:

$$r + r_a + r_b + r_c = 2s$$

Demostración:

⇒

El Corolario 1.11. nos asegura que cualquier triángulo rectángulo ABC verifica que:

$$r + r_a + r_b + r_c = 2s$$

⇐

Según el Teorema 1.6.:

$$\begin{aligned} r + r_a + r_b + r_c &= (s - c) \tan\left(\frac{C}{2}\right) + (s - b) \cot\left(\frac{C}{2}\right) + (s - a) \cot\left(\frac{C}{2}\right) + s \tan\left(\frac{C}{2}\right) \\ &= (2s - c) \tan\left(\frac{C}{2}\right) + (2s - a - b) \cot\left(\frac{C}{2}\right) \\ &= (a + b) \tan\left(\frac{C}{2}\right) + c \cot\left(\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

por lo que, si un triángulo ABC verifica que:

$$r + r_a + r_b + r_c = 2s = a + b + c$$

entonces:

$$(a + b) \tan\left(\frac{C}{2}\right) + c \cot\left(\frac{C}{2}\right) = a + b + c$$

luego:

$$(a + b) \tan^2\left(\frac{C}{2}\right) - (a + b + c) \tan\left(\frac{C}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan\left(\frac{C}{2}\right) = 1 \\ \text{ó} \\ \tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{c}{a + b} \end{cases}$$

y vamos a distinguir dos casos:

① Si $\tan\left(\frac{C}{2}\right) = 1$, entonces, $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{4}$, por lo que $C = \frac{\pi}{2}$ y, por tanto, el triángulo ABC es rectángulo en C .

② Si $\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{c}{a + b}$, entonces:

$$\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C} = \tan^2\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{c^2}{(a + b)^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + 2ab} \stackrel{\text{Th. Coseno}}{=} \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}{a^2 + b^2 + 2ab}$$

por lo que:

$$ab \cos^2 C - (a^2 + b^2) \cos C + ab = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 \pm |a^2 - b^2|}{2ab}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Además, si $a = b$, entonces, $\cos C = 1$, lo cual es imposible, por lo que podemos suponer que $a > b$ (si fuese $a < b$ se razonaría de forma totalmente análoga), en cuyo caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos C = \frac{a}{b} > 1 \rightarrow \text{imposible} \\ \text{ó} \\ \cos C = \frac{b}{a} < 1 \end{array} \right.$$

y, finalmente, utilizando el Teorema del Coseno, resulta que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - 2b^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

y, por tanto, el triángulo ABC es rectángulo en A .

Corolario 1.13. Dada una terna pitagórica ordenada $(a, b, c) \in T$ con semiperímetro s , inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que:

- ① $r < r_a < a$
- ② $r_b < b < c < r_c$
- ③ La cadena de igualdades y desigualdades:

$$r < r_a < a = r_b < b < c < r_c$$

es cierta si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(a, b, c) = (3m, 4m, 5m)$.

Demostración:

- ① Ambas desigualdades son ciertas para cualquier terna pitagórica, según se probó en el Corolario 1.7.
- ② La primera y tercera desigualdad son ciertas para cualquier terna pitagórica, según se probó en el Corolario 1.7. La segunda desigualdad se verifica por hipótesis.
- ③ Utilizando los dos primeros apartados, bastaría con probar que:

$$a = r_b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N} : (a, b, c) = (3m, 4m, 5m)$$

lo cual es cierto, pues:

\Rightarrow

Si $a = r_b$, entonces, el Teorema 1.4. nos asegura que:

$$a = \frac{b+c}{3} \xrightarrow{c^2=a^2+b^2} 5b^2 + bc - 4c^2 = 0 \xrightarrow{\frac{b}{c} > 0} \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5b = 4c \xrightarrow{5 \nmid 4} \exists m \in \mathbb{N} : c = 5m$$

por lo que:

$$b = \frac{4c}{5} = 4m \xrightarrow{c^2=a^2+b^2} a = 3m$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, por tanto:

$$\exists m \in \mathbb{N} : (a, b, c) = (3m, 4m, 5m)$$

⇒

Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(a, b, c) = (3m, 4m, 5m)$, entonces:

$$a = 3m = \frac{-3m + 4m + 5m}{2} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} r_b$$

A la vista de la cadena de igualdades y desigualdades probada en este corolario, cabría pensar en la posibilidad de que, para cualquier terna pitagórica ordenada $(a, b, c) \in T$, se verificase que:

$$r < r_a < a \leq r_b < b < c < r_c$$

lo cual, en general, no es cierto, ya que, aunque para algunas ternas sí lo es (por ejemplo para (5,12,13)), en cambio, para otras no lo es (por ejemplo para (20,21,29)). Más adelante, en los Teoremas 2.9., 3.8., 3.9., 4.9., 5.9. y 6.10., se dará una caracterización de las ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que $a < r_b$.

Corolario 1.14. Dada una terna pitagórica ordenada $(a, b, c) \in T$, se verifica que:

$$\frac{b}{c-a} < 1 + \sqrt{2} < \frac{a}{c-b}$$

Demostración:

Si r es el inradio de esta terna pitagórica, el Corolario 1.4. nos asegura que:

$$(c-a)(c-b) = 2r^2 \Rightarrow \begin{cases} c-a \mid 2r^2 \\ c-b \mid 2r^2 \end{cases} \begin{matrix} c-a > c-b \\ \Rightarrow \\ 2r^2 \text{ no es cuadrado perfecto} \end{matrix} \begin{cases} c-a > \sqrt{2}r \\ c-b < \sqrt{2}r \end{cases}$$

por lo que:

$$\textcircled{\smile} \frac{b}{c-a} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{b}{b-2r} = 1 + \frac{2r}{b-2r} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} 1 + \frac{2r}{c-a} < 1 + \frac{2r}{\sqrt{2}r} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\textcircled{\smile} \frac{a}{c-b} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{a}{a-2r} = 1 + \frac{2r}{a-2r} \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} 1 + \frac{2r}{c-b} > 1 + \frac{2r}{\sqrt{2}r} = 1 + \sqrt{2}$$

Teorema 1.8. Para cualquier terna pitagórica $(a, b, c) \in T$, se verifica que:

$$\frac{c}{a+b} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Demostración:

Como los catetos de cualquier terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ son distintos, se verifica que:

$$0 < (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

por lo que:

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

$$2(a^2 + b^2) > a^2 + b^2 + 2ab$$

$$2c^2 > (a + b)^2$$

$$\frac{c^2}{(a + b)^2} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{c}{a + b} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teorema 1.9. Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, se verifica que $(a + b, a + c, a + b + c)$ es una terna pitagórica si y sólo si $a^2 = 2bc$.

Demostración:

Basta con tener en cuenta que:

$$(a + b + c)^2 - (a + b)^2 - (a + c)^2 = 2bc - a^2$$

Ejemplo 1.1. Un ejemplo de ternas pitagóricas del tipo estudiado en el Teorema 1.9. podemos obtenerlo a partir de cuatro términos consecutivos de una sucesión de Fibonacci:

$$(x, y, x + y, x + 2y)$$

tomando uno de los catetos igual al producto de los dos términos extremos $x(x + 2y) = 2xy + x^2$, el otro cateto igual al doble producto de los dos términos centrales $2y(x + y) = 2xy + 2y^2$ y la hipotenusa igual a la suma de los cuadrados de los dos términos centrales $y^2 + (x + y)^2 = 2xy + x^2 + 2y^2$, es decir, considerando la terna pitagórica:

$$(a, b, c) = (2xy + x^2, 2xy + 2y^2, 2xy + x^2 + 2y^2)$$

en la cual, se verifica que:

$$a^2 = (2xy)^2 = 2x^2 2y^2 = 2bc$$

Ejemplo 1.2. Según el Teorema 1.9., para cada $n \in \mathbb{N}$, $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ es una terna pitagórica, ya que:

$$(2n)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2n^2$$

siendo su inradio:

$$r_n \stackrel{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{2n + 1 + 2n^2 + 2n - (2n^2 + 2n + 1)}{2} = n$$

y su área:

$$\Delta_n = \frac{(2n + 1)(2n^2 + 2n)}{2} = n(n + 1)(2n + 1) = 6 \sum_{k=1}^n k^2$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Definición 1.5. Dado $h \in \mathbb{N}$, se llama $Div(h)$ al conjunto de divisores de h (escritos en forma ordenada y creciente) y se llama $d(h)$ al número de divisores de h . Además:

① Si $Div(h^2) = \{1, 2, \dots, h, \dots, h^2\}$ es el conjunto de divisores de h^2 , se verifica que:

$$\forall d \in Div(h^2) / d < h, \exists! \bar{d} \in Div(h^2) / d \neq \bar{d} : d \cdot \bar{d} = h^2$$

Para cada $d \in Div(h^2)$, el correspondiente elemento $\bar{d} \in Div(h^2)$ recibe el nombre de divisor gemelo de d .

② Si $Div(2h^2) = \{1, 2, \dots, h^2, 2h^2\}$ es el conjunto de divisores de $2h^2$ se verifica que:

$$\forall d \in Div(2h^2) / d < \sqrt{2} h, \exists! \bar{d} \in Div(2h^2) / d \neq \bar{d} : d \cdot \bar{d} = 2h^2$$

Para cada $d \in Div(2h^2)$, el correspondiente elemento $\bar{d} \in Div(2h^2)$ recibe el nombre de divisor gemelo de d .

Lema 1.2. Dado $h \in \mathbb{N}$, si $d(2h^2)$ denota el número de divisores de $2h^2$ y:

$$Div(2h^2) = \left\{ d_1, \dots, d_{\frac{d(2h^2)}{2}}, \bar{d}_{\frac{d(2h^2)}{2}}, \dots, \bar{d}_1 \right\}$$

es su conjunto de divisores (escritos en forma ordenada y creciente), se verifica que:

① $\forall i = 1, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i + \bar{d}_i \leq 1 + 2h^2$

② $\forall i = 1, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i + \bar{d}_i > d_{d(2h^2)} + \bar{d}_{d(2h^2)}$

Demostración:

① Como:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i < \bar{d}_i \leq h^2$$

entonces:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : 2d_i < 2\bar{d}_i \leq 2h^2$$

por lo que:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : 2(d_i + \bar{d}_i) < 4h^2$$

y, por tanto:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i + \bar{d}_i < 2h^2 < 1 + 2h^2$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, finalmente, como $d_1 + \bar{d}_1 = 1 + 2h^2$, entonces:

$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i + \bar{d}_i \leq 1 + 2h^2$$

- ② Utilizando cálculo diferencial, es fácil probar que la función $x + \frac{2h^2}{x}$ es estrictamente decreciente (por ser su función derivada estrictamente negativa) en el intervalo $(0, \sqrt{2}h)$, en el cual está contenido el conjunto $\left\{1, \dots, \frac{d(2h^2)}{2}\right\}$, siendo, además:

$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i \leq d_{\frac{d(2h^2)}{2}}$$

por lo que:

$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(2h^2)}{2} : d_i + \bar{d}_i = d_i + \frac{2r^2}{d_i} \geq d_{\frac{d(2h^2)}{2}} + \frac{2r^2}{d_{\frac{d(2h^2)}{2}}} = d_{\frac{d(2h^2)}{2}} + \bar{d}_{\frac{d(2h^2)}{2}}$$

Ejemplo 1.3. Vamos a ilustrar el Lema 1.2. con un ejemplo. Si $h = 10$, como $2h^2 = 200 = 2^3 5^2$, entonces, $d(2h^2) = 4 \cdot 3 = 12$ y:

$$\text{Div}(2h^2) = \{d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 4, d_4 = 5, d_5 = 8, d_6 = 10, \bar{d}_6 = 20, \bar{d}_5 = 25, \bar{d}_4 = 40, \bar{d}_3 = 50, \bar{d}_2 = 100, \bar{d}_1 = 200\}$$

por lo que:

- ① $(d + \bar{d})_{\text{máxima}} = d_1 + \bar{d}_1 = 1 + 200 = 201$
 ② $(d + \bar{d})_{\text{mínima}} = d_6 + \bar{d}_6 = 10 + 20 = 30$

Lema 1.3. Dado $h \in \mathbb{N}$, si $d(h^2)$ denota el número de divisores de h^2 y:

$$\text{Div}(h^2) = \left\{1 = d_1, d_2, \dots, d_{\frac{d(h^2)-1}{2}}, h, \bar{d}_{\frac{d(h^2)-1}{2}}, \dots, \bar{d}_2, \bar{d}_1 = h^2\right\}$$

es su conjunto de divisores (escritos en forma ordenada y creciente), se verifica que:

$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(h^2)-1}{2} : d_i + \bar{d}_i \leq 1 + h^2$$

Demostración:

Como:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(h^2)-1}{2} : d_i < \bar{d}_i \leq \frac{h^2}{2}$$

entonces:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(h^2)-1}{2} : 2d_i < 2\bar{d}_i \leq h^2$$

por lo que:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(h^2)-1}{2} : 2(d_i + \bar{d}_i) < 2h^2$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, por tanto:

$$\forall i = 2, \dots, \frac{d(h^2)-1}{2} : d_i + \bar{d}_i < h^2 < 1 + h^2$$

y, finalmente, como $d_1 + \bar{d}_1 = 1 + h^2$, entonces:

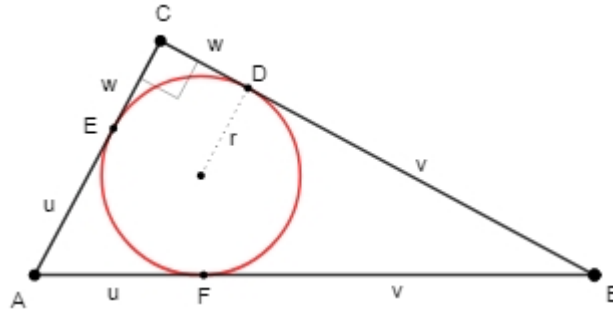
$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(h^2)-1}{2} : d_i + \bar{d}_i \leq 1 + h^2$$

Ejercicio 1.1. Dada una terna pitagórica (a, b, c) con inradio r , aportar una demostración alternativa a la dada en el Teorema 1.4. para probar que:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Solución:

Según se observa en la siguiente figura:



$$\begin{cases} a = v + w \\ b = w + u \\ c = u + v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{-a+b+c}{2} \\ v = \frac{a-b+c}{2} \\ w = \frac{a+b-c}{2} \end{cases} \Rightarrow r = w = \frac{a+b-c}{2}$$

Ejercicio 1.2. Probar que, para un ladrillo de Euler, se verifica que:

- ① La longitud de alguna de sus aristas es múltiplo de 5.
- ② La longitud de alguna de sus aristas es múltiplo de 11.

Solución:

- ① Como los restos cuadráticos módulo 5 son $\{0, 1, 4\}$, si ninguna de las aristas tuviese longitud múltiplo de 5, debería haber, al menos, dos aristas con el mismo resto cuadrático, lo cual es imposible, ya que:

$$\begin{cases} 1 + 1 \equiv 2 \pmod{5} \\ 4 + 4 \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

por lo que las caras correspondientes a dos aristas cuyos restos cuadráticos son iguales no pueden contener una terna pitagórica, llegándose así a una contradicción y, por tanto, algunas de las tres longitudes ha de ser múltiplo de 5.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

- ② Supongamos que ninguna de las tres longitudes es múltiplo de 11. Como los restos cuadráticos no nulos módulo 11 son $\{1, 3, 4, 5, 9\}$, si, por ejemplo, una de las longitudes tiene resto cuadrático 1, para poder formar con ella dos ternas pitagóricas, las otras dos longitudes deben tener necesariamente restos cuadráticos contenidos en $\{3, 4\}$, por lo que no pueden ser catetos de una terna pitagórica, ya que:

$$3 + 4 \equiv 7 \pmod{11}$$

De igual forma ocurre para el resto de casos, por lo que se llega a una contradicción y, por tanto, algunas de las tres longitudes ha de ser múltiplo de 11.

Ejercicio 1.3. Probar que el área total de ladrillo de Euler es múltiplo de 24.

Solución:

Si u , v y w son las longitudes de las tres aristas del ladrillo de Euler, según las Propiedades 1.1.:

$$\begin{cases} uv \equiv 0 \pmod{12} \\ vw \equiv 0 \pmod{12} \\ wu \equiv 0 \pmod{12} \end{cases}$$

por lo que su área total verifica que:

$$\Delta_{\text{ladrillo}} = 2(uv + vw + wu) \equiv 0 \pmod{24}$$

Ejercicio 1.4. Probar que, para un ladrillo de Euler, se verifica que:

- ① Las longitudes de, al menos, dos de sus aristas son múltiplos de 3, siendo, además, alguna de ellas múltiplo de 9.
- ② Las longitudes de, al menos, dos de sus aristas son múltiplos de 4, siendo, además, alguna de ellas múltiplo de 16.

Solución:

- ① Si no hubiese, al menos, dos aristas con longitudes múltiplos de 3, entonces, una de las caras contendría una terna pitagórica en la cual ningún cateto sería múltiplo de 3, lo que contradice las Propiedades 1.1. Además, si (u, v, w) es la terna pitagórica correspondiente a la cara cuyas dos aristas tienen longitudes múltiplos de 3, como:

$$\begin{cases} u \equiv 0 \pmod{3} \\ v \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow w \equiv 0 \pmod{3}$$

entonces, dichas propiedades nos aseguran que $(\frac{u}{3}, \frac{v}{3}, \frac{w}{3})$ también es una terna pitagórica, siendo:

$$\begin{cases} \frac{u}{3} \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{v}{3} \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ ó } \Rightarrow \begin{cases} u \equiv 0 \pmod{9} \\ v \equiv 0 \pmod{9} \end{cases}$$

- ② Totalmente análogo al apartado anterior.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Ejercicio 1.5. La ecuación $x^4 - 4y^4 = z^2$ no admite ninguna solución entera con $yz \neq 0$.

Demostración:

Si esta ecuación admitiese alguna solución $(u, v, w) \in \mathbb{N}^3$ con $vw \neq 0$, entonces, admitiría infinitas soluciones, ya que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $(ku, kv, k^2w) \in \mathbb{N}^3$ también sería una solución con $kv \cdot kw = k^2vw \neq 0$. Además, como:

$$w \in \{z \in \mathbb{N} / \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2 : x^4 = 4y^4 + z^2\} \neq \emptyset$$

entonces, este conjunto de números naturales tiene primer elemento por lo que podemos considerar la solución $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ con a mínimo, siendo:

$$a^4 = 4b^4 + c^2$$

y, por tanto, $(2b^2, c, a^2)$ sería una terna pitagórica primitiva ya que $\text{mcd}(a^2, 2b^2) = 1$, según vamos a probar a continuación. Si fuese $\text{mcd}(a, b) = d > 1$, entonces, $\text{mcd}(a^2, b^2) = d^2$, por lo que podría ocurrir que:

① $\text{mcd}(a^2, 2b^2) = d^2$, en cuyo caso:

$$d^4 \mid (a^4 - 4b^4) = c^2 \Rightarrow d^2 \mid c$$

por lo que:

$$\left(\frac{a}{d}\right)^4 - 4\left(\frac{b}{d}\right)^4 = \left(\frac{c}{d^2}\right)^2$$

y, por tanto, $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right) \in \mathbb{N}^3$ sería una solución de la ecuación dada, con $\frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d^2} = \frac{bc}{d^3} \neq 0$ y $\frac{a}{d} < c$, llegándose a una contradicción.

② $\text{mcd}(a^2, 2b^2) = 2d^2$, en cuyo caso, a^2 (y también a) sería par, por lo que también lo sería:

$$c^2 = a^4 - 4b^4$$

(y también c), es decir:

$$\exists \bar{a}, \bar{c} \in \mathbb{N} : \begin{cases} a = 2\bar{a} \\ c = 2\bar{c} \end{cases}$$

luego:

$$4\bar{c}^2 = c^2 = a^4 - 4b^4 = 16\bar{a}^4 - 4b^4 \Rightarrow \bar{c}^2 = 4\bar{a}^4 - b^4 \Rightarrow 4w^2 = 4\bar{a}^4 - 16v^4 \Rightarrow w^2 = \bar{a}^4 - 4v^4$$

$\bar{c}^2 + b^4 \equiv 2 \pmod{4}$

y, por tanto, $(\bar{a}, v, w) \in \mathbb{N}^3$ sería una solución de la ecuación dada, con $vw = \frac{bc}{8} \neq 0$ y $\bar{a} < 2\bar{a} = a$, llegándose a una contradicción.

Hemos probado, pues, que $\text{mcd}(a, b) = 1$, por lo que puede ocurrir que:

❶ $\text{mcd}(a^2, 2b^2) = 1$, en cuyo caso, $\text{mcd}(2b^2, c, a^2) = 1$, por lo que $(2b^2, c, a^2)$ sería una terna pitagórica primitiva.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

② $\text{mcd}(a^2, 2b^2) = 2$, en cuyo caso a^2 (y también a) sería par, por lo que también lo sería:

$$c^2 = a^4 - 4b^4$$

(y también c), es decir:

$$\exists \underline{a}, \underline{c} \in \mathbb{N} : \begin{cases} a = 2\underline{a} \\ c = 2\underline{c} \end{cases}$$

luego:

$$4\underline{c}^2 = c^2 = a^4 - 4b^4 = 16\underline{a}^4 - 4b^4 \Rightarrow \underline{c}^2 = 4\underline{a}^4 - b^4$$

y, por tanto, $(b, \underline{a}, \underline{c}) \in \mathbb{N}^3$ sería una solución de la ecuación dada, con $\underline{a}\underline{c} = \frac{ac}{4} \neq 0$ y $\underline{c} < 2\underline{c} = c$, llegándose a una contradicción.

Una vez probado que $(2b^2, c, a^2)$ es una terna pitagórica primitiva, según se prueba en el décimo apartado de las Propiedades 1.1.:

$$\exists n, m \in \mathbb{N} / n > m : \begin{cases} a^2 = n^2 + m^2 \\ b^2 = nm \\ c = n^2 - m^2 \end{cases}$$

siendo $\text{mcd}(n, m) = 1$ y $n - m \equiv 1 \pmod{2}$. Además, como $b^2 = nm$ y $\text{mcd}(n, m) = 1$, entonces:

$$\exists p, q \in \mathbb{N} : \begin{cases} n = p^2 \\ m = q^2 \end{cases}$$

por lo que:

$$a^2 = n^2 + m^2 = p^4 + q^4$$

luego (q^2, p^2, a) es una terna pitagórica primitiva, ya que $\text{mcd}(q^2, p^2) = \text{mcd}(m, n) = 1$ y, si $q^2 = m$ es par (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga), según se prueba en el décimo apartado de las Propiedades 1.1.:

$$\exists e, f \in \mathbb{N} / e > f : \begin{cases} a = e^2 + f^2 \\ q^2 = 2ef \\ p^2 = e^2 - f^2 \end{cases}$$

siendo $\text{mcd}(e, f) = 1$ y $e - f \equiv 1 \pmod{2}$. Suponiendo que e es par y f impar, como $q^2 = 2ef$ y:

$$\text{mcd}(2e, f) \underset{f \text{ es impar}}{=} \text{mcd}(e, f) = 1$$

entonces:

$$\exists g, h \in \mathbb{N} : \begin{cases} 2e = (2g)^2 \\ f = h^2 \end{cases}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

siendo:

$$p^2 = e^2 - f^2 = 4g^4 - h^4 \Rightarrow 4g^4 = p^2 + h^4 \equiv 2 \pmod{4} \rightarrow \text{imposible}$$

y, si e es impar y f par, como $q^2 = 2ef$ y:

$$\text{mcd}(e, 2f) \underset{e \text{ es impar}}{=} \text{mcd}(e, f) = 1$$

entonces:

$$\exists g, h \in \mathbb{N} : \begin{cases} 2f = (2g)^2 \\ e = h^2 \end{cases}$$

por lo que (h, g, p) sería una solución de la ecuación dada, con $gp \neq 0$ y $h \leq h^2 = f \leq f^2 < e^2 + f^2 = a$, llegándose a una contradicción. Por tanto, la ecuación $x^4 - 4y^4 = z^2$ no admite ninguna solución entera con $yz \neq 0$.

Ejercicio 1.6. La ecuación $x^4 - y^4 = z^2$ no admite ninguna solución entera con $yz \neq 0$.

Demostración:

Si esta ecuación admitiese alguna solución $(u, v, w) \in \mathbb{N}^3$ con $vw \neq 0$, entonces, admitiría infinitas soluciones, ya que, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, $(ku, kv, k^2w) \in \mathbb{N}^3$ también sería una solución con $kv \cdot kw = k^2vw \neq 0$. Además, como:

$$u \in \{x \in \mathbb{N} / \exists (y, z) \in \mathbb{N}^2 : x^4 = y^4 + z^2\} \neq \emptyset$$

entonces, este conjunto de números naturales tiene primer elemento por lo que podemos considerar la solución $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ con a mínimo, siendo:

$$a^4 = b^4 + c^2$$

y, por tanto, (b^2, c, a^2) sería una terna pitagórica primitiva ya que $\text{mcd}(a^2, b^2) = 1$, según vamos a probar a continuación. Si fuese $\text{mcd}(a, b) = d > 1$, entonces, $\text{mcd}(a^2, b^2) = d^2$, en cuyo caso:

$$d^4 \mid a^4 - b^4 = c^2 \Rightarrow d^2 \mid c$$

por lo que:

$$\left(\frac{a}{d}\right)^4 - \left(\frac{b}{d}\right)^4 = \left(\frac{c}{d^2}\right)^2$$

y, por tanto, $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d^2}\right) \in \mathbb{N}^3$ sería una solución de la ecuación dada, con $\frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d^2} = \frac{bc}{d^3} \neq 0$ y $\frac{a}{d} < a$, llegándose a una contradicción. Hemos probado, pues, que $\text{mcd}(a, b) = 1$ por lo que $\text{mcd}(a^2, b^2) = 1$ y, por tanto, $\text{mcd}(b^2, c, a^2) = 1$. Una vez probado que (b^2, c, a^2) es una terna pitagórica primitiva, según se prueba en el décimo apartado de las Propiedades 1.1., puede ocurrir que:

$$\exists n, m \in \mathbb{N} / n > m : \begin{cases} b^2 = n^2 - m^2 \\ c = 2nm \\ a^2 = n^2 + m^2 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \exists n, m \in \mathbb{N} / n > m : \begin{cases} b^2 = 2nm \\ c = n^2 - m^2 \\ a^2 = n^2 + m^2 \end{cases}$$

siendo $\text{mcd}(n, m) = 1$ y $n - m \equiv 1 \pmod{2}$, por lo que vamos a distinguir ambos casos:

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

① En el primer caso, como:

$$a^2b^2 = n^4 - m^4$$

entonces, (n, m, ab) sería una solución de la ecuación dada, con $mab \neq 0$ y $n < a$ (por ser $n^2 = a^2 - m^2 < a^2$), llegándose a una contradicción.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

- ② En el segundo caso, suponiendo que m es par y n es impar (en caso contrario se razonaría de forma totalmente análoga), resulta que:

$$\exists \bar{m} \in \mathbb{N} : m = 2\bar{m}$$

por lo que:

$$mcd(n, \bar{m}) \underset{n \text{ es impar}}{=} mcd(n, 2\bar{m}) = mcd(n, m) = 1$$

y, como $n\bar{m} = \frac{nm}{2} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, entonces:

$$\exists p, q \in \mathbb{N} : \begin{cases} n = p^2 \\ \bar{m} = q^2 \end{cases}$$

siendo:

$$a^2 = n^2 + m^2 = n^2 + 4\bar{m}^2 = p^4 + 4q^4$$

con lo cual, (p, q, a) sería una solución de la ecuación $x^4 + 4y^4 = z^2$ con $qa \neq 0$, llegándose a una contradicción con el resultado probado en el Ejercicio 1.5.

Por tanto, la ecuación $x^4 - y^4 = z^2$ no admite ninguna solución entera con $yz \neq 0$.

Ejercicio 1.7. Dadas dos ternas pitagóricas ordenadas (a, b, c) y (u, v, w) , probar que $(|au - bv|, av + bu, cw)$ y $(|av - bu|, au + bv, cw)$ también son ternas pitagóricas.

Solución:

- ① Como:

$$(au - bv)^2 + (av + bu)^2 = a^2u^2 + b^2v^2 + a^2v^2 + b^2u^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = c^2w^2 = (cw)^2$$

entonces, $(|au - bv|, av + bu, cw)$ es una terna pitagórica.

- ② Como:

$$(av - bu)^2 + (au + bv)^2 = a^2v^2 + b^2u^2 + a^2u^2 + b^2v^2 = (a^2 + b^2)(u^2 + v^2) = c^2w^2 = (cw)^2$$

entonces, $(|av - bu|, au + bv, cw)$ es una terna pitagórica.

Ejercicio 1.8. Probar que:

- ① No existe ninguna terna pitagórica primitiva cuya hipotenusa sea múltiplo de 7.
② No existe ninguna terna pitagórica primitiva cuya hipotenusa sea múltiplo de 11.

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Solución:

- ① Si (a, b, c) fuese una terna pitagórica cuya hipotenusa es múltiplo de 7, como los restos cuadráticos módulo 7 son $\{0, 1, 2, 4\}$, necesariamente, habría de ocurrir que:

$$a^2 + b^2 = c^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{7} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{7} \\ b \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

y, por tanto, la terna pitagórica (a, b, c) no sería primitiva.

- ② Totalmente análogo al caso anterior, teniendo en cuenta que los restos cuadráticos módulo 11 son $\{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$.

Ejercicio 1.9. Dada una terna pitagórica (a, b, c) , se verifica que:

- ① Si ninguno de sus catetos es múltiplo de 7, entonces, la suma o la diferencia entre ellos es múltiplo de 7.
 ② Si alguno de los catetos es múltiplo de 7, entonces, la suma o la diferencia entre la hipotenusa y el otro cateto es múltiplo de 7.

Solución:

- ① Si (a, b, c) es una terna pitagórica tal que:

$$\begin{cases} a \not\equiv 0 \pmod{7} \\ b \not\equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \not\equiv 0 \pmod{7} \\ b^2 \not\equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

como los restos cuadráticos no nulos módulo 7 son $\{1, 2, 4\}$, necesariamente, ha de ocurrir que:

$$a^2 \equiv b^2 \pmod{7}$$

por lo que, al ser 7 un número primo, se verifica que:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow \begin{cases} a+b \equiv 0 \pmod{7} \\ a-b \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}^*$$

- ② Si (a, b, c) es una terna pitagórica tal que:

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{7} \\ \text{ó} \\ b \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{7} \\ \text{ó} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 \equiv c^2 \pmod{7} \\ \text{ó} \\ a^2 \equiv c^2 \pmod{7} \end{cases}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
GENERALIDADES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

por lo que, al ser 7 un número primo, se verifica que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (c+b)(c-b) = c^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{7} \\ \text{ó} \\ (c+a)(c-a) = c^2 - a^2 \equiv 0 \pmod{7} \end{array} \right. \Rightarrow^* \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} c+b \equiv 0 \pmod{7} \\ \text{ó} \\ c-b \equiv 0 \pmod{7} \end{array} \right. \\ \text{ó} \\ \left\{ \begin{array}{l} c+a \equiv 0 \pmod{7} \\ \text{ó} \\ c-a \equiv 0 \pmod{7} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

CAPÍTULO 2.- INRADIO.

El inradio de un triángulo es el radio de su circunferencia inscrita. Es llamativo el hecho que, en el caso de triángulos cuyos lados formen una terna pitagórica, el inradio sea siempre un número natural, así como que, para cualquier número natural, exista, al menos, una terna pitagórica cuyo inradio sea igual a dicho número. Sólo existen una terna pitagórica de inradio 1 y dos ternas pitagóricas de inradio 2, pero, para todos los demás números naturales, existen, al menos, tres ternas pitagóricas cuyo inradio es igual a dicho número y únicamente en los números primos impares existen tres.

Surge, de forma natural, contabilizar el número de ternas pitagóricas que tienen como inradio un cierto número natural r . Para ello, observando que cada uno de los tres lados del triángulo cuyos lados son una terna pitagórica son mayores que el diámetro de su circunferencia inscrita, es decir, mayores que $2r$, hemos caracterizado las ternas pitagóricas en función del inradio y de los divisores de $2r^2$, de forma que cada pareja de divisores gemelos de $2r^2$ genera una terna pitagórica, por lo que el número de ternas pitagóricas cuyo inradio es igual a r será igual a la mitad del número de divisores de $2r^2$.

Otra cuestión llamativa es que, cuando el inradio de una terna pitagórica es un número impar, su semiperímetro es un número par y, cuando el inradio es par, el semiperímetro es, a veces par y a veces impar, por lo que hay un mayor número de ternas pitagóricas cuyo semiperímetro es un número par.

En el Teorema 2.6., determinaremos el número de ternas pitagóricas cuyo inradio es un número par y cuyo semiperímetro es un número impar, que coincide con el número de divisores impares del cuadrado de su inradio.

Al comparar la relación de orden entre lados, inradio y exinradios, sorprende la relación entre el cateto menor a de la terna pitagórica y el exinradio mediano r_b de ésta, ya que, en algunos casos $a < r_b$, en otros casos se da la igualdad y en otros casos $a > r_b$, lo cual está determinado por el número de divisores de $2r^2$ que se encuentren en los intervalos $(0, r)$ ó $(r, \sqrt{2}r)$. Únicamente en las ternas pitagóricas proporcionales a la terna (3,4,5) se da la igualdad entre el cateto menor y el exinradio mediano.

Finalmente, determinaremos las ternas pitagóricas de área máxima y mínima entre las que tienen un mismo inradio.

Teorema 2.1. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$, se verifica que su inradio r es un número natural.

Demostración 1:

Si llamamos Δ y s al área y al semiperímetro, respectivamente, de la terna pitagórica (a, b, c) , resulta que:

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)} \stackrel{a^2+b^2=c^2}{=} \frac{ab(a+b-c)}{2ab} = \frac{a+b-c}{2} \in \mathbb{N}$$

ya que $a+b-c > 0$ (por la desigualdad triangular) y como (al menos) uno de los catetos es un número par (porque 2 no es resto cuadrático módulo 4), entonces, el otro cateto y la hipotenusa tienen la misma paridad.

Demostración 2:

Vamos a distinguir dos casos:

① Si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva, entonces:

$$\exists u, v \in \mathbb{N} / u > v : \begin{cases} a = u^2 - v^2 \\ b = 2uv \\ c = u^2 + v^2 \end{cases}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

por lo que, si llamamos Δ y s a su área y su semiperímetro, respectivamente, resulta que:

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{2uv(u^2 - v^2)}{2}}{\frac{u^2 - v^2 + 2uv + u^2 + v^2}{2}} = \frac{uv(u^2 - v^2)}{u^2 + uv} = \frac{uv(u+v)(u-v)}{u(u+v)} = v(u-v) \in \mathbb{N}$$

- ② Si (a, b, c) es una terna pitagórica no primitiva, entonces, $\text{mcd}(a, b, c) = k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, siendo la terna pitagórica $(d, e, f) = \left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ primitiva, por lo que, según el caso anterior, su inradio r_{DEF} es un número natural. Además, como los triángulos rectángulos ABC y DEF son semejantes con razón de semejanza k , si llamamos Δ_{ABC} y Δ_{DEF} a sus respectivas áreas y s_{ABC} y s_{DEF} a sus respectivos semiperímetros, resulta que:

$$r_{ABC} = \frac{\Delta_{ABC}}{s_{ABC}} = \frac{k^2 \Delta_{DEF}}{k s_{DEF}} = k r_{DEF} \in \mathbb{N}$$

Teorema 2.2. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe, al menos, una terna pitagórica tal que su inradio es igual a n .

Demostración:

Como $(3, 4, 5)$ es una terna pitagórica, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $(3n, 4n, 5n)$ también es una terna pitagórica. Además, si llamamos Δ , r y s a su área, su inradio y su semiperímetro, respectivamente, se verifica que:

$$r = \frac{\Delta}{s} = \frac{6n^2}{6n} = n$$

Teorema 2.3. Dado $r \in \mathbb{N}$, se verifica que el número $n(r)$ de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a r es mayor o igual que $d(r)$.

Demostración:

Si denotamos por:

$$\text{Div}(r) = \{1 = d_1, d_2, \dots, d_{d(r)-1}, d_{d(r)} = r\}$$

al conjunto de divisores de r (escritos en forma ordenada y creciente), resulta que:

$$\forall i = 1, \dots, d(r) : d_i d_{d(r)+1-i} = r$$

por lo que, considerando:

$$\forall i = 1, \dots, d(r) : (u_i, v_i) = (d_i + d_{d(r)+1-i}, d_i)$$

y la terna pitagórica asociada:

$$\forall i = 1, \dots, d(r) : \begin{cases} a_i = u_i^2 - v_i^2 = (d_i + d_{d(r)+1-i})^2 - d_i^2 = d_{d(r)+1-i}^2 + 2d_i d_{d(r)+1-i} = d_{d(r)+1-i}^2 + 2r \\ b_i = 2u_i v_i = 2(d_i + d_{d(r)+1-i})d_i = 2(d_i^2 + r) \\ c_i = u_i^2 + v_i^2 = (d_i + d_{d(r)+1-i})^2 + d_i^2 = 2d_i^2 + d_{d(r)+1-i}^2 + 2d_i d_{d(r)+1-i} = 2(d_i^2 + r) + d_{d(r)+1-i}^2 \end{cases}$$

según la tercera Propiedad 1.2, resulta que sus inradios son:

$$\forall i = 1, \dots, d(r) : r_i = v_i(u_i - v_i) = d_i d_{2d(r)+1-i} = r$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Hemos probado, pues, que existen, al menos $d(r)$ ternas pitagóricas tales que su inradio es igual a r , lo cual no significa que no pueda haber más, según veremos más adelante.

Ejemplo 2.1. Vamos a ilustrar el Teorema 2.3. con dos ejemplos.:

① Para $r = 16 = 2^4$, resulta que $d(16) = 4 + 1 = 5$ y como:

$$\text{Div}(16) = \{d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 4, d_4 = 8, d_5 = 16\}$$

entonces:

$$\begin{cases} (a_1, b_1, c_1) = (16^2 + 2 \cdot 16, 2(1^2 + 16), 2(1^2 + 16) + 16^2) = (288, 34, 290) \\ (a_2, b_2, c_2) = (8^2 + 2 \cdot 16, 2(2^2 + 16), 2(2^2 + 16) + 8^2) = (96, 40, 104) \\ (a_3, b_3, c_3) = (4^2 + 2 \cdot 16, 2(4^2 + 16), 2(4^2 + 16) + 4^2) = (48, 64, 80) \\ (a_4, b_4, c_4) = (2^2 + 2 \cdot 16, 2(8^2 + 16), 2(8^2 + 16) + 2^2) = (36, 160, 164) \\ (a_5, b_5, c_5) = (1^2 + 2 \cdot 16, 2(16^2 + 16), 2(16^2 + 16) + 1^2) = (33, 544, 545) \end{cases}$$

② Para $r = 20 = 2^2 \cdot 5$, resulta que $d(20) = (2 + 1)(1 + 1) = 6$ y como:

$$\text{Div}(20) = \{d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 4, d_4 = 5, d_5 = 10, d_6 = 20\}$$

entonces:

$$\begin{cases} (a_1, b_1, c_1) = (20^2 + 2 \cdot 16, 2(1^2 + 16), 2(1^2 + 16) + 20^2) = (440, 42, 442) \\ (a_2, b_2, c_2) = (10^2 + 2 \cdot 16, 2(2^2 + 16), 2(2^2 + 16) + 10^2) = (140, 48, 148) \\ (a_3, b_3, c_3) = (5^2 + 2 \cdot 16, 2(4^2 + 16), 2(4^2 + 16) + 5^2) = (65, 72, 97) \\ (a_4, b_4, c_4) = (4^2 + 2 \cdot 16, 2(5^2 + 16), 2(5^2 + 16) + 4^2) = (56, 90, 106) \\ (a_5, b_5, c_5) = (2^2 + 2 \cdot 16, 2(10^2 + 16), 2(10^2 + 16) + 2^2) = (44, 240, 244) \\ (a_6, b_6, c_6) = (1^2 + 2 \cdot 16, 2(20^2 + 16), 2(20^2 + 16) + 1^2) = (840, 41, 841) \end{cases}$$

Teorema 2.4. Dados $r, d \in \mathbb{N}$, existe una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con inradio r y tal que $c = b + d$ si y sólo si d es un divisor de $2r^2$. Además, una parametrización de dicha terna pitagórica, en función de r y d , es:

$$(a, b, c) = \left(2r + d, 2r + \frac{2r^2}{d}, 2r + d + \frac{2r^2}{d} \right) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d})$$

Demostración:

Dados $r, d \in \mathbb{N}$, si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica con inradio r y tal que $c = b + d$, según el Teorema 1.4.:

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{a - d}{2} \Rightarrow a = 2r + d$$

por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta que:

$$(b + d)^2 = c^2 = a^2 + b^2 = (2r + d)^2 + b^2 \Rightarrow 2bd = 4r^2 + 4rd \Rightarrow bd = 2r^2 + 2rd$$

lo cual implica que tal terna existe si y sólo si d es un divisor de $2r^2$, y, en tal caso, tendríamos que:

$$(a, b, c) = \left(2r + d, 2r + \frac{2r^2}{d}, 2r + d + \frac{2r^2}{d} \right) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d})$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Teorema 2.5. Dado $r \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a r viene dado por:

$$n_r(r) = \frac{d(2r^2)}{2}$$

Además, haciendo una elección adecuada de dichos divisores, se puede conseguir que todas estas ternas estén ordenadas.

Demostración:

Según el Teorema 2.4.:

$$\forall d \in \text{Div}(2r^2) : (a_d, b_d, c_d) = \left(2r + d, 2r + \frac{2r^2}{d}, 2r + d + \frac{2r^2}{d}\right) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d})$$

son las únicas ternas pitagóricas con inradio r . Además, como, para cada $d \in \text{Div}(2r^2)$, se verifica que:

$$(a_{\bar{d}}, b_{\bar{d}}, c_{\bar{d}}) = \left(2r + \bar{d}, 2r + \frac{2r^2}{\bar{d}}, 2r + \bar{d} + \frac{2r^2}{\bar{d}}\right) = (2r + \bar{d}, 2r + d, 2r + \bar{d} + d) = (b_d, a_d, c_d)$$

entonces, cada par de catetos se repite (salvo el orden de éstos) exactamente dos veces y, por tanto, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a r viene dado por:

$$n_r(r) = \frac{d(2r^2)}{2}$$

Además, se puede conseguir que estas $n_r(r)$ ternas pitagóricas estén ordenadas, ya que, para cualquier $d \in \text{Div}(2r^2)$ tal que $d < \sqrt{2}r$, se verifica que:

$$a_d = 2r + d \stackrel{*}{<} 2r + \frac{2r^2}{d} = b_d < b_d + d = c_d$$

y, por tanto:

$$n_r^{a < b < c}(r) = d_{< \sqrt{2}r}(2r^2) = \frac{d(2r^2)}{2} = n_r(r)$$

siendo $d_{< \sqrt{2}r}(2r^2)$ el número de divisores de $2r^2$ que son menores que $\sqrt{2}r$.

Corolario 2.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una terna pitagórica $(a_n, b_n, c_n) \in T$ primitiva y ordenada, con inradio $r_n = n$ y tal que:

$$a_n^2 = b_n + c_n$$

Demostración:

Como $1 \in \text{Div}_{< \sqrt{2}n}(2n^2)$, entonces, el Teorema 2.5. nos asegura que la terna pitagórica con inradio $r_n = n$:

$$(a_n, b_n, c_n) = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$$

es ordenada, siendo, además, primitiva, ya que cualesquiera dos números naturales consecutivos son primos entre sí. Finalmente, se verifica que:

$$b_n + c_n = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2 = a_n^2$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

(en el Ejemplo 11.2b. se muestran los treinta y cinco primeros términos de esta sucesión)

Corolario 2.2. Dado $r \in \mathbb{N}$, si $d(r)$ y $n_r(r)$ denotan, respectivamente, el número de divisores de r y el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a r , se verifica que:

$$n_r(r) = d(r) \Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\} : r = 2^\beta$$

Demostración:

Tenemos que probar la doble implicación:

⇐

Si existe $\beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = 2^\beta$, entonces, $2r^2 = 2^{2\beta+1}$ por lo que, según el Teorema 2.5.:

$$n_r(r) = \frac{d(2r^2)}{2} = \frac{2\beta+1+1}{2} = \beta+1 = d(r)$$

⇒

Si $r = 2^{\beta_0} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\beta_t}$ ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) es la descomposición en factores primos de r , entonces, $2r^2 = 2^{2\beta_0+1} \cdot p_1^{2\beta_1} \cdot \dots \cdot p_t^{2\beta_t}$, por lo que, si $n_r(r) = d(r)$, el Teorema 2.5. nos asegura que:

$$\begin{aligned} \frac{d(2r^2)}{2} &= d(r) \\ \frac{(2\beta_0+2) \prod_{k=1}^t (2\beta_k+1)}{2} &= (\beta_0+1) \prod_{k=1}^t (\beta_k+1) \\ \prod_{k=1}^t (2\beta_k+1) &= \prod_{k=1}^t (\beta_k+1) \end{aligned}$$

lo cual es posible únicamente si $\beta_1 = \dots = \beta_t = 0$, ya que, en caso contrario:

$$\prod_{k=1}^t (2\beta_k+1) > \prod_{k=1}^t (\beta_k+1)$$

pues:

$$\forall \theta \in \mathbb{N} : 2\theta+1 > \theta+1$$

Por tanto:

$$\exists \beta = \beta_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} : r = 2^\beta$$

Ejemplo 2.2. Vamos a ilustrar el Teorema 2.5. con algunos ejemplos:

- ① Para $r = 1$, como $2r^2 = 2$, entonces, el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio igual a 1 es:

$$n_r(1) = \frac{d(2)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Además, como:

$$Div(2) = \{d_1 = 1, \bar{d}_1 = 2\}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces, el conjunto de ternas pitagóricas cuyo inradio igual a 1 es:

$$T_r(1) = \{(2+1, 2+2, 2+1+2)\} = \{(3, 4, 5)\}$$

- ② Para $r = 2$, como $2r^2 = 8 = 2^3$, entonces, el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a 2 es:

$$n_r(2) = \frac{d(8)}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$

Además, como:

$$Div(8) = \{d_1 = 1, d_2 = 2, \bar{d}_2 = 4, \bar{d}_1 = 8\}$$

entonces, el conjunto de ternas pitagóricas cuyo inradio igual a 2 es:

$$T_r(2) = \{(4+1, 4+8, 4+1+8), (4+2, 4+4, 4+2+4)\} = \{(5, 12, 13), (6, 8, 10)\}$$

- ③ Para $r = 8 = 2^3$, como $2r^2 = 128 = 2^7$, entonces, el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a 8 es:

$$n_r(8) = \frac{d(128)}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

Además, como:

$$Div(128) = \{d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 4, d_4 = 8, \bar{d}_4 = 16, \bar{d}_3 = 32, \bar{d}_2 = 64, \bar{d}_1 = 128\}$$

entonces, el conjunto de ternas pitagóricas cuyo inradio igual a 8 es:

$$T_r(8) = \left\{ \begin{array}{l} (16+1, 16+128, 16+1+128) \\ (16+2, 16+64, 16+2+64) \\ (16+4, 16+32, 16+4+32) \\ (16+8, 16+16, 16+8+16) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (17, 144, 145) \\ (18, 80, 82) \\ (20, 48, 52) \\ (24, 32, 40) \end{array} \right\}$$

- ④ Para $18 = 2 \cdot 3^2$, como $2r^2 = 648 = 2^3 \cdot 3^4$, entonces, el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a 18 es:

$$n_r(18) = \frac{d(648)}{2} = \frac{(3+1)(4+1)}{2} = 10$$

Además, como:

$$Div(648) = \left\{ \begin{array}{l} d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 4, d_5 = 6, d_6 = 8, d_7 = 9, d_8 = 12, d_9 = 18, d_{10} = 24, \bar{d}_{10} = 27 \\ \bar{d}_9 = 36, \bar{d}_8 = 54, \bar{d}_7 = 72, \bar{d}_6 = 81, \bar{d}_5 = 108, \bar{d}_4 = 162, \bar{d}_3 = 216, \bar{d}_2 = 324, \bar{d}_1 = 648 \end{array} \right\}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces, el conjunto de ternas pitagóricas cuyo inradio igual a 18 es:

$$T_r(18) = \left\{ \begin{array}{l} (36+1, 36+648, 36+1+648) \\ (36+2, 36+324, 36+2+324) \\ (36+3, 36+216, 36+3+216) \\ (36+4, 36+162, 36+4+162) \\ (36+6, 36+108, 36+6+108) \\ (36+8, 36+81, 36+8+81) \\ (36+9, 36+72, 36+9+72) \\ (36+12, 36+54, 36+12+54) \\ (36+18, 36+36, 36+18+36) \\ (36+24, 36+27, 36+24+27) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (37, 684, 685) \\ (38, 360, 362) \\ (39, 252, 255) \\ (40, 198, 202) \\ (42, 144, 150) \\ (44, 117, 125) \\ (45, 108, 117) \\ (48, 90, 102) \\ (54, 72, 90) \\ (60, 63, 87) \end{array} \right\}$$

- ⑤ Para $r = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, como $2r^2 = 1800 = 2^3 3^2 5^2$, entonces, el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a 30 es:

$$n_r(30) = \frac{d(1800)}{2} = \frac{(3+1)(2+1)(2+1)}{2} = 18$$

Además, como:

$$Div(1800) = \left\{ \begin{array}{l} d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 4, d_5 = 5, d_6 = 6, d_7 = 8, d_8 = 9, d_9 = 10, d_{10} = 12, d_{12} = 18 \\ d_{13} = 20, d_{14} = 24, d_{15} = 25, d_{16} = 30, d_{17} = 36, d_{18} = 40, \bar{d}_{18} = 45, \bar{d}_{17} = 50 \\ \bar{d}_{16} = 60, \bar{d}_{15} = 72, \bar{d}_{14} = 75, \bar{d}_{13} = 90, \bar{d}_{12} = 100, \bar{d}_{11} = 120, \bar{d}_{10} = 150, \bar{d}_9 = 180 \\ \bar{d}_8 = 200, \bar{d}_7 = 225, \bar{d}_6 = 300, \bar{d}_5 = 360, \bar{d}_4 = 450, \bar{d}_3 = 600, \bar{d}_2 = 900, \bar{d}_1 = 1800 \end{array} \right\}$$

entonces, el conjunto de ternas pitagóricas cuyo inradio igual a 30 es:

$$T_r(30) = \left\{ \begin{array}{ll} (60+1, 60+1800, 60+1+1800) & (60+12, 60+150, 60+12+150) \\ (60+2, 60+900, 60+2+900) & (60+15, 60+120, 60+15+120) \\ (60+3, 60+600, 60+3+600) & (60+18, 60+100, 60+18+100) \\ (60+4, 60+450, 60+4+450) & (60+20, 60+90, 60+20+90) \\ (60+5, 60+360, 60+5+360) & (60+24, 60+75, 60+24+75) \\ (60+6, 60+300, 60+6+300) & (60+25, 60+72, 60+25+72) \\ (60+8, 60+225, 60+8+225) & (60+30, 60+60, 60+30+60) \\ (60+9, 60+200, 60+9+200) & (60+36, 60+50, 60+36+50) \\ (60+10, 60+180, 60+10+180) & (60+40, 60+45, 60+40+45) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} (61, 1860, 1861) & (72, 210, 222) \\ (62, 960, 962) & (75, 180, 195) \\ (63, 660, 663) & (78, 160, 178) \\ (64, 510, 514) & (80, 150, 170) \\ (65, 420, 425) & (84, 135, 159) \\ (66, 360, 366) & (85, 132, 157) \\ (68, 285, 293) & (90, 120, 150) \\ (69, 260, 269) & (96, 110, 146) \\ (70, 240, 250) & (100, 105, 145) \end{array} \right\}$$

Teorema 2.6. Sea $r \in \mathbb{N}$:

- ① Si r es impar, entonces, para todas las ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a r , se verifica que su semiperímetro s es un número natural par.
- ② Si r es par, entonces, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a r y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores impares de r^2 .

Demostración:

- ① Si r es impar, entonces, para cada $d \in Div(2r^2)$, se verifica que d y \bar{d} tienen distinta paridad, por lo que el semiperímetro de la terna pitagórica:

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d})$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

es par, pues:

$$s_d = \frac{a_d + b_d + c_d}{2} = \frac{6r + 2(d + \bar{d})}{2} = \frac{3r}{\text{impar}} + \frac{d + \bar{d}}{\text{impar}}$$

② Si r es par y (d, \bar{d}) es un par de divisores gemelos de $2r^2$, vamos a distinguir dos casos:

❶ Si d y \bar{d} son ambos pares, entonces, el semiperímetro de la terna pitagórica:

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d})$$

es par, pues:

$$s_d = \frac{a_d + b_d + c_d}{2} = \frac{6r + 2(d + \bar{d})}{2} = \frac{3r}{\text{par}} + \frac{d + \bar{d}}{\text{par}}$$

❷ Si d y \bar{d} tienen distinta paridad, entonces, el semiperímetro de la terna pitagórica:

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d})$$

es impar, pues:

$$s_d = \frac{a_d + b_d + c_d}{2} = \frac{6r + 2(d + \bar{d})}{2} = \frac{3r}{\text{par}} + \frac{d + \bar{d}}{\text{impar}}$$

Por tanto, en este caso, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a r y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores impares de $2r^2$, que, a su vez, coincide con el número de divisores impares de r^2 .

Ejemplo 2.3. Vamos a ilustrar el Teorema 2.6. con dos ejemplos:

① Si $r = 15$, entonces, (por tratarse de un número impar) para todas las ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a 15, se verifica que su semiperímetro s es un número natural par. Además, como $2r^2 = 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, entonces, $d(450) = 18$, siendo:

$$Div(450) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450\}$$

por lo que el Teorema 2.5. nos asegura que $n_r(15) = \frac{18}{2} = 9$ y, además:

$$T_r(15) = \left\{ \underset{s \text{ par (1)}}{(31, 480, 481)}, \underset{s \text{ par (2)}}{(32, 255, 257)}, \underset{s \text{ par (3)}}{(33, 180, 183)}, \underset{s \text{ par (5)}}{(35, 120, 125)}, \underset{s \text{ par (6)}}{(36, 105, 111)}, \underset{s \text{ par (9)}}{(39, 80, 89)}, \underset{s \text{ par (10)}}{(40, 75, 85)}, \underset{s \text{ par (15)}}{(45, 60, 75)}, (48, 55, 73) \right\}$$

② Si $r = 10$, como $2r^2 = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, entonces, $d(200) = 12$, siendo:

$$Div(200) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$$

por lo que el Teorema 2.5. nos asegura que $n_r(10) = \frac{12}{2} = 6$ y, como:

$$\{d \in Div(200) : d \equiv 1 \pmod{2}\} = \{1, 5, 25\}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

resulta que hay exactamente tres ternas pitagóricas con inradio igual a 10 tales que su semiperímetro s es un número natural impar. Además:

$$T_r(10) = \left\{ \underset{s \text{ impar (1)}}{(21, 220, 221)}, \underset{s \text{ par (2)}}{(22, 120, 122)}, \underset{s \text{ par (4)}}{(24, 70, 74)}, \underset{s \text{ impar (5)}}{(25, 60, 65)}, \underset{s \text{ impar (8)}}{(28, 45, 53)}, \underset{s \text{ par (10)}}{(30, 40, 50)} \right\}$$

Corolario 2.3. Dado un número primo $p > 2$, para todas las ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a p , se verifica que su semiperímetro s es un número natural par.

Demostración:

- ① Según el Teorema 2.5., el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a p es:

$$n_r(p) = \frac{\text{div}(2p^2)}{2} = \frac{(1+1)(2+1)}{2} = 3$$

Además, como:

$$\text{Div}(2p^2) = \{d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = p, \bar{d}_3 = 2p, \bar{d}_2 = p^2, \bar{d}_1 = 2p^2\}$$

entonces, el conjunto de ternas pitagóricas cuyo inradio igual a p es:

$$\begin{aligned} T_r(p) &= \{(2p+1, 2p+2p^2, 2p+1+2p^2), (2p+2, 2p+p^2, 2p+2+p^2), (2p+p, 2p+2p, 2p+p+2p)\} \\ &= \{(2p+1, 2p^2+2p, 2p^2+2p+1), (2p+2, p^2+2p, p^2+2p+2), (3p, 4p, 5p)\} \end{aligned}$$

- ② Según el Teorema 2.6., como p es impar, estas tres ternas pitagóricas tienen semiperímetro, lo cual se puede comprobar sin dificultad:

☺ Para la terna $(2p+1, 2p^2+2p, 2p^2+2p+1)$, resulta que:

$$s_1 = \frac{2p+1+2p^2+2p+2p^2+2p+1}{2} = \frac{4p^2+6p+2}{2} = 2p^2+3p+1 \equiv 0 \pmod{2}$$

☹ Para la terna $(2p+2, p^2+2p, p^2+2p+2)$, resulta que:

$$s_2 = \frac{2p+2+p^2+2p+p^2+2p+2}{2} = \frac{2p^2+6p+4}{2} = p^2+3p+2 \equiv 0 \pmod{2}$$

☹ Para la terna $(4p, 3p, 5p)$, resulta que:

$$s_p = \frac{4p+3p+5p}{2} = \frac{12p}{2} = 6p \equiv 0 \pmod{2}$$

Teorema 2.7. Sea $r \in \mathbb{N}$:

- ① Si $r \equiv \pm 1 \pmod{3}$, entonces, para todas las ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a r , se verifica que su semiperímetro s es un número natural múltiplo de 3.
- ② Si $r = 3^\beta p$, siendo $\text{mcd}(p, 3) = 1$ y $\beta \in \mathbb{N}$, entonces, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a r y su semiperímetro s es un número natural que no es múltiplo de 3 coincide con el número de divisores de $2p^2$.

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Ejemplo 2.4. Vamos a ilustrar el Teorema 2.7. con dos ejemplos:

- ① Si $r = 10 \not\equiv 0 \pmod{3}$, entonces, para todas las ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a 10 se verifica que su semiperímetro s es un número natural múltiplo de 3. Además, como $2r^2 = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, entonces, $d(200) = 12$, siendo:

$$Div(200) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$$

por lo que el Teorema 2.5. nos asegura que $n_r(10) = \frac{12}{2} = 6$ y, además:

$$T_r(10) = \left\{ (21, 220, 221), (22, 120, 122), (24, 70, 74), (25, 60, 65), (28, 45, 53), (30, 40, 50) \right\}$$

$s=231 \equiv 0 \pmod{3}$ (1) $s=132 \equiv 0 \pmod{3}$ (2) $s=84 \equiv 0 \pmod{3}$ (4) $s=75 \equiv 0 \pmod{3}$ (5) $s=63 \equiv 0 \pmod{3}$ (8) $s=60 \equiv 0 \pmod{3}$ (10)

- ② Si $r = 27 = 3^3$, como $2r^2 = 1458 = 2 \cdot 3^6$, entonces, $d(1458) = 14$, siendo:

$$Div(1458) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162, 243, 486, 729, 1458\}$$

por lo que el Teorema 2.5. nos asegura que $n_r(27) = \frac{14}{2} = 7$ y, como:

$$\{d \in Div(1458) : d \not\equiv 0 \pmod{3}\} = \{1, 2\}$$

resulta que hay exactamente $d(2) = 2$ ternas pitagóricas con inradio igual a 27 tales que su semiperímetro s es un número natural que no es múltiplo de 3. Además:

$$T_r(27) = \left\{ (55, 1512, 1513), (56, 783, 785), (57, 540, 543), (60, 297, 303), (63, 216, 225), (72, 135, 153), (81, 108, 135) \right\}$$

$s=1540 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (1) $s=812 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (2) $s=570 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (3) $s=330 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (6) $s=252 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (9) $s=180 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (18) $s=162 \not\equiv 0 \pmod{3}$ (27)

Corolario 2.4. Dado $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \equiv \pm 1 \pmod{6}$, para todas las ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su inradio es igual a r , se verifica que su semiperímetro s es un número natural múltiplo de 6.

Demostración:

Es consecuencia directa del primer apartado del Teorema 2.6. y del primer apartado del Teorema 2.7.

Lema 2.1. Si $r \in \mathbb{N}$ y (d, \bar{d}) es un par de divisores gemelos de $2r^2$, entonces:

$$mcd(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d}) = mcd(r, d, \bar{d})$$

Demostración:

$$\textcircled{1} \begin{cases} mcd(r, d, \bar{d}) \mid r \\ mcd(r, d, \bar{d}) \mid d \\ mcd(r, d, \bar{d}) \mid \bar{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mcd(r, d, \bar{d}) \mid 2r+d \\ mcd(r, d, \bar{d}) \mid 2r+\bar{d} \\ mcd(r, d, \bar{d}) \mid 2r+d+\bar{d} \end{cases} \Rightarrow mcd(r, d, \bar{d}) \mid mcd(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d})$$

- ② Llamando $l = mcd(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d})$, como:

$$\begin{cases} l \mid 2r+d \\ l \mid 2r+\bar{d} \\ l \mid 2r+d+\bar{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l \mid d = 2r+d+\bar{d} - (2r+d) \\ l \mid \bar{d} = 2r+d+\bar{d} - (2r+d) \end{cases} \Rightarrow l^2 \mid d \cdot \bar{d} = 2r^2 \Rightarrow l^2 \mid r^2 \Rightarrow l \mid r$$

entonces:

$$\text{mcd}(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d}) = l \mid \text{mcd}(r, d, \bar{d})$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \text{mcd}(r, d, \bar{d}) \mid \text{mcd}(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d}) \\ \text{mcd}(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d}) \mid \text{mcd}(r, d, \bar{d}) \end{cases} \Rightarrow \text{mcd}(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d}) = \text{mcd}(r, d, \bar{d})$$

Lema 2.2. Si $r \in \mathbb{N}$ y (d, \bar{d}) es un par de divisores gemelos de $2r^2$, entonces:

$$\text{mcd}(r, d, \bar{d}) = \text{mcd}(d, \bar{d})$$

Demostración:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \text{mcd}(r, d, \bar{d}) \mid d \\ \text{mcd}(r, d, \bar{d}) \mid \bar{d} \end{cases} \Rightarrow \text{mcd}(r, d, \bar{d}) \mid \text{mcd}(d, \bar{d})$$

② Llamando $l = \text{mcd}(d, \bar{d})$, como:

$$\begin{cases} l \mid d \\ l \mid \bar{d} \end{cases} \Rightarrow l^2 \mid d \cdot \bar{d} = 2r^2 \Rightarrow l^2 \mid r^2 \Rightarrow l \mid r$$

entonces:

$$\text{mcd}(d, \bar{d}) = l \mid \text{mcd}(r, d, \bar{d})$$

Teorema 2.8. Dado $r \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas primitivas distintas (salvo el orden de los catetos) con inradio r es igual a 2^t , siendo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de factores primos impares de r .

Demostración:

Sea $r = 2^{\beta_0} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\beta_t}$ ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) la descomposición en factores primos de r . El Teorema 2.5. nos asegura que el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) con inradio r es:

$$n_r(r) = \frac{d(2r^2)}{2}$$

siendo estas ternas:

$$\forall d \in \{d \in \text{Div}(2r^2) : d < \sqrt{2}r\} : (a_d, b_d, c_d) = (2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d})$$

Además, para cada $d \in \{d \in \text{Div}(2r^2) : d < \sqrt{2}r\}$, si la terna pitagórica (a_d, b_d, c_d) es primitiva, resulta que:

$$1 = \text{mcd}(2r+d, 2r+\bar{d}, 2r+d+\bar{d}) \stackrel{\text{Lema 2.1.}}{=} \text{mcd}(r, d, \bar{d}) \stackrel{\text{Lema 2.2.}}{=} \text{mcd}(d, \bar{d})$$

por lo que puede ocurrir que:

$$\begin{cases} d = 1 \\ \bar{d} = 2r^2 \end{cases}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

o que existan $q_1 = p_{d_1}, \dots, q_l = p_{d_l}, q_{l+1} = p_{d_{l+1}}, \dots, q_t = p_{d_t}$ ($1 \leq l \leq t-1$) tales que:

$$\begin{cases} d = q_1^{2\beta_{d_1}} \cdot \dots \cdot q_l^{2\beta_{d_l}} \\ \bar{d} = 2^{2\beta_0} \cdot q_{l+1}^{2\beta_{d_{l+1}}} \cdot \dots \cdot q_t^{2\beta_{d_t}} \end{cases}$$

y, por tanto, existen tantas ternas pitagóricas primitivas con inradio r como subconjuntos tiene el conjunto $\{p_1, \dots, p_t\}$, lo cual significa que el número de ternas pitagóricas primitivas con inradio r es:

$$n_r^{\text{primitivas}}(r) = \text{card}[\wp(\{p_1, \dots, p_t\})] = \binom{t}{0} + \binom{t}{1} + \dots + \binom{t}{t} = 2^t$$

Ejemplo 2.5. Vamos a ilustrar el Teorema 2.8. con un ejemplo. Para $r = 630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, dicho teorema nos asegura que el número de ternas pitagóricas primitivas con inradio igual a 630 es:

$$n_r^{\text{primitivas}}(630) = 2^3 = 8$$

estando éstas determinadas por los elementos del conjunto:

$$\{1, 3^4, 5^2, 7^2, 3^4 5^2, 3^4 7^2, 5^2 7^2, 3^4 5^2 7^2\}$$

por lo que:

$$T_r^{\text{primitivas}}(630) = \left\{ \begin{array}{l} (1260 + 1, 1260 + 2^3 3^4 5^2 7^2, 1260 + 1 + 2^3 3^4 5^2 7^2) \\ (1260 + 3^4, 1260 + 2^3 5^2 7^2, 1260 + 3^4 + 2^3 5^2 7^2) \\ (1260 + 5^2, 1260 + 2^3 3^4 7^2, 1260 + 5^2 + 2^3 3^4 7^2) \\ (1260 + 7^2, 1260 + 2^3 3^4 5^2, 1260 + 7^2 + 2^3 3^4 5^2) \\ (1260 + 3^4 5^2, 1260 + 2^3 7^2, 1260 + 3^4 5^2 + 2^3 7^2) \\ (1260 + 3^4 7^2, 1260 + 2^3 5^2, 1260 + 3^4 7^2 + 2^3 5^2) \\ (1260 + 5^2 7^2, 1260 + 2^3 3^4, 1260 + 5^2 7^2 + 2^3 3^4) \\ (1260 + 3^4 5^2 7^2, 1260 + 2^3, 1260 + 3^4 5^2 7^2 + 2^3) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (1261, 795060, 795061) \\ (1341, 11060, 11141) \\ (1285, 33012, 33037) \\ (1309, 17460, 17509) \\ (3285, 1652, 3677) \\ (5229, 1460, 5429) \\ (2485, 1908, 3133) \\ (100485, 1268, 100493) \end{array} \right\}$$

Teorema 2.9. Dados $r \in \mathbb{N}$ y $d \in \text{Div}(2r^2)$ tal que $d < \sqrt{2}r$, la terna pitagórica ordenada:

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d})$$

cuyos exinradios son r_{da} , r_{db} y r_{cd} , verifica que:

$$\begin{cases} a_d < r_{db} \Leftrightarrow d < r \\ a_d = r_{db} \Leftrightarrow d = r \\ a_d > r_{db} \Leftrightarrow d > r \end{cases}$$

Demostración:

Según el Teorema 1.4.:

$$r_{db} = \frac{-a_d + b_d + c_d}{2} = r + \bar{d}$$

por lo que:

$$a_d = r_{db} \Leftrightarrow 2r + d = r + \bar{d} \Leftrightarrow r = \bar{d} - d = \frac{2r^2}{d} - d \Leftrightarrow d^2 + dr - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow_{d>0} d = r \Leftrightarrow \bar{d} = 2r$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

lo cual implica que:

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d}) = (3r, 4r, 5r)$$

y, además:

$$\odot \quad \forall d < r: \bar{d} > 2r \Rightarrow a_d = 2r + d < 3r < r + \bar{d} = r_{db}$$

$$\ominus \quad \forall d > r: \bar{d} < 2r \Rightarrow a_d = 2r + d > 3r > r + \bar{d} = r_{db}$$

Corolario 2.5. Dado $r \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c tales que $a < r_b$, coincide con el número de divisores de $2r^2$ menores que r .

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 2.9., ya que, según se probó en el Teorema 2.5., todas las ternas pitagóricas construidas a partir de los divisores de $2r^2$ menores que $\sqrt{2}r$ están ordenadas.

Ejemplo 2.6. Para $r = 6$, como $2r^2 = 72$ y:

$$\left\{ \begin{array}{l} Div_{<6}(72) = \{1, 2, 3, 4\} \\ Div_{(6,6,\sqrt{2})}(72) = \{8\} \end{array} \right.$$

entonces, existen exactamente cuatro ternas pitagóricas con inradio igual a 6 para las que $a < r_b$, una única terna pitagórica con inradio igual a 6 para la que $a = r_b$ y una única terna pitagórica con inradio igual a 6 para la que $a > r_b$. De hecho:

$$T_r(6) = \left\{ \begin{array}{lll} d=1 & (13, 84, 85) & a < r_b \\ d=2 & (14, 48, 50) & a < r_b \\ d=3 & (15, 36, 39) & a < r_b \\ d=4 & (16, 30, 34) & a < r_b \\ d=6 & (18, 24, 30) & a = r_b \\ d=8 & (20, 21, 29) & a > r_b \end{array} \right.$$

Teorema 2.10. Dado $r \in \mathbb{N}$, las ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ con inradio r de menor y mayor área son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{área máxima} & \rightarrow (2r + 1, 2r + 2r^2, 2r + 1 + 2r^2) \\ \text{área mínima} & \rightarrow \left(2r + d_{\frac{d(2r^2)}{2}}, 2r + \bar{d}_{\frac{d(2r^2)}{2}}, 2r + d_{\frac{d(2r^2)}{2}} + \bar{d}_{\frac{d(2r^2)}{2}} \right) \end{array} \right.$$

Demostración:

Como, según el Teorema 2.4.:

$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(2r^2)}{2} : (a_i, b_i, c_i) = (2r + d_i, 2r + \bar{d}_i, 2r + d_i + \bar{d}_i)$$

son las únicas ternas pitagóricas con inradio r , entonces, las áreas de estas ternas vienen dadas por:

$$\forall i = 1, \dots, \frac{d(2r^2)}{2} : \Delta_i = \frac{(2r + d_i)(2r + \bar{d}_i)}{2} \stackrel{d_i \bar{d}_i = 2r^2}{=} \frac{6r^2 + 2r(d_i + \bar{d}_i)}{2} = 3r^2 + r(d_i + \bar{d}_i)$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

por lo que, según el Lema 1.2., se verifica que:

- ① El área máxima se alcanza para la terna pitagórica $(2r+1, 2r+2r^2, 2r+1+2r^2)$, siendo su valor:

$$\Delta_{\text{máxima}} = 3r^2 + r(1+2r^2) = r(r+1)(2r+1) = 6 \sum_{k=1}^r k^2$$

- ② El área mínima se alcanza para la terna pitagórica $\left(2r + d_{\frac{d(2r^2)}{2}}, 2r + \bar{d}_{\frac{d(2r^2)}{2}}, 2r + d_{\frac{d(2r^2)}{2}} + \bar{d}_{\frac{d(2r^2)}{2}}\right)$, siendo su valor:

$$\Delta_{\text{mínima}} = 3r^2 + r\left(d_{\frac{d(2r^2)}{2}} + \bar{d}_{\frac{d(2r^2)}{2}}\right)$$

Ejercicio 2.1. Para cada $r \in \mathbb{N}$, se denota por ψ_r al número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio r . Probar que:

- ① Si $r, t \in \mathbb{N}$ son primos entre sí, entonces:

$$\psi_{rt} = \psi_r \psi_t$$

- ② $\forall k \in \mathbb{N} : \psi_{2^k} = k + 1$

- ③ Para cualquier número primo impar p , se verifica que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \psi_{p^k} = 2k + 1$$

- ④ $\psi_2 = 2$ y, además:

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \psi_{2^k} < 2^k$$

- ⑤ $\psi_3 = 3$ y, además:

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \psi_{3^k} < 3^k$$

- ⑥ Para cualquier número primo $p \geq 5$, se verifica que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \psi_{p^k} < p^k$$

- ⑦ Para cualquier $r \in \mathbb{N}$, se verifica que $\psi_r \leq r$, dándose la igualdad si y sólo si $r \in \{1, 2, 3, 6\}$.

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Demostración:

- ① Si $r = 2^{\theta_0} \prod_{i=1}^n p_i^{\theta_i}$, siendo $\theta_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{N}$, y $t = \prod_{j=1}^m q_j^{\beta_j}$, siendo $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{N}$, con $p_i \neq q_j$ para cualquier $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, entonces:

$$\begin{aligned} \psi_r &= \frac{\text{Div}\left(2^{2\theta_0+1} \prod_{i=1}^n p_i^{2\theta_i} \prod_{j=1}^m q_j^{2\beta_j}\right)}{2} \\ &= \frac{2(\theta_0+1) \prod_{i=1}^n (2\theta_i+1) \prod_{j=1}^m (2\beta_j+1)}{2} \\ &= \frac{2(\theta_0+1) \prod_{i=1}^n (2\theta_i+1)}{2} \frac{(1+1) \prod_{j=1}^m (2\beta_j+1)}{2} \\ &= \frac{\text{Div}\left(2^{2\theta_0+1} \prod_{i=1}^n p_i^{2\theta_i}\right)}{2} \frac{\text{Div}\left(2 \prod_{j=1}^m q_j^{2\beta_j}\right)}{2} \\ &= \psi_r \psi_t \end{aligned}$$

- ② Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\psi_{2^k} = \frac{\text{Div}(2^{2k+1})}{2} = \frac{2k+2}{2} = k+1$$

- ③ Para cualquier número primo impar p y cualquier $k \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\psi_{p^k} = \frac{\text{Div}(2p^{2k})}{2} = \frac{(1+1)(2k+1)}{2} = 2k+1$$

- ④ Como, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se verifica que $\psi_{2^k} = k+1$, entonces, $\psi_2 = 1+1 = 2$ y basta con probar que:

$$\forall x \in [2, +\infty) : f(x) = 2^x - x - 1 > 0$$

lo cual es cierto, ya que:

☺ $f(2) = 1 > 0$

☹ Como $\log 2 > \frac{1}{2}$, resulta que:

$$\forall x \in [2, +\infty) : f'(x) = 2^x \log 2 - 1 > 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

por lo que esta función es estrictamente creciente en $[2, +\infty)$ y, por tanto:

$$\forall x \in (2, +\infty) : f(x) > f(2) > 0$$

- ⑤ Como, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, se verifica que $\psi_{3^k} = 2k+1$, entonces, $\psi_3 = 2+1 = 3$ y basta con probar que:

$$\forall x \in [2, +\infty) : f(x) = 3^x - 2x - 1 > 0$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

lo cual es cierto, ya que:

☺ $f(2) = 4 > 0$

☹ Como $3 > e$, entonces, $\log 3 > 1$, por lo que:

$$\forall x \in [2, +\infty) : \frac{2}{\log 3} < 2 < 3 < 3^x$$

siendo esta función estrictamente creciente en $[2, +\infty)$, pues:

$$\forall x \in [2, +\infty) : f'(x) = 3^x \log 3 - 2 > 0$$

y, por tanto:

$$\forall x \in (2, +\infty) : f(x) > f(2) > 0$$

⑥ Como, para cualquier número primo impar p , se verifica que:

$$\forall k \in \mathbb{N} : \psi_{p^k} = 2k + 1$$

basta con probar que:

$$\forall x \in [1, +\infty) : f(x) = p^x - 2x - 1 \geq 0$$

lo cual es cierto, ya que:

☺ $f(1) = p - 3 \underset{p \geq 5}{>} 0$

☹ Como $p \geq 5 > e$, entonces, $\log p > 1$, por lo que:

$$\forall x \in [1, +\infty) : \frac{2}{\log p} < 2 < p \leq p^x$$

siendo esta función estrictamente creciente en $[1, +\infty)$, pues:

$$\forall x \in [1, +\infty) : f'(x) = p^x \log p - 2 > 0$$

y, por tanto:

$$\forall x \in (1, +\infty) : f(x) > f(1) > 0$$

⑦ Si $r = \prod_{i=1}^n p_i^{\theta_i}$, siendo $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{N}$, conjugando los apartados 1, 4, 5 y 6, resulta que:

$$\psi_r = \prod_{i=1}^n \psi_{p_i^{\theta_i}} \underset{4,5,6}{\leq} \prod_{i=1}^n p_i^{\theta_i} = r$$

Además, para probar que la igualdad se da si y sólo si $r \in \{1, 2, 3, 6\}$, vamos a distinguir dos casos:

❶ Si $r = p^\Delta q$ siendo p primo tal que $p \geq 5$, $\Delta \in \mathbb{N}$ y $\text{mcd}(p, q) = 1$, entonces:

$$\psi_r = \psi_{p^\Delta} \psi_q \underset{\substack{\psi_q \leq q \\ \psi_{p^\Delta} < p}}{<} p^\Delta q = r$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
INRADIO**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

❷ Si $r = 2^\theta 3^\beta$, siendo $\theta, \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\psi_r = r \Leftrightarrow \psi_{2^\theta} \psi_{3^\beta} = 2^\theta 3^\beta \begin{matrix} \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: \psi_{2^k} < 2^k \\ \Leftrightarrow \\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}: \psi_{3^k} < 3^k \end{matrix} \theta, \beta \in \{0, 1\} \Leftrightarrow r \in \{1, 2, 3, 6\}$$

Ya hemos visto anteriormente que $\psi_2 = 2$ y $\psi_3 = 3$. Además:

$$\boxtimes \psi_1 = \frac{\text{Div}(2)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

☰ Como $\text{mcd}(2, 3) = 1$, entonces:

$$\psi_6 = \psi_2 \psi_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

Ejercicio 2.2. Dada una terna pitagórica (a, b, c) , cuyo triángulo rectángulo asociado llamaremos ABC , se consideran los puntos D y E de tangencia entre su incírculo y los lados BC y AC , respectivamente. Probar que las longitudes AE y BD son números naturales.

Solución:

Como:

$$\begin{cases} AE = b - r \\ BD = a - r \end{cases}$$

entonces, las longitudes AE y BD son números naturales, ya que tanto a y b como r lo son (según el Teorema 2.1.) y, además, se verifica que $a > r$ y $b > r$.

CAPÍTULO 3.- EXINRADIOS MENORES.

En el Corolario 1.7., se probó que, para cualquier terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que $r_c > r_a$ y que $r_c > r_b$, por lo que llamaremos exinradios menores de la terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ a r_a y r_b . Además, llamaremos primer exinradio a r_a y segundo exinradio a r_b .

Teorema 3.1. Dada una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$, se verifica que sus exinradios menores r_a y r_b son números naturales.

Demostración:

Según el Teorema 1.4.:

$$\begin{cases} r_a = \frac{a-b+c}{2} \in \mathbb{N} \\ r_b = \frac{-a+b+c}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ya que $a-b+c > 0$ y $-a+b+c > 0$ (por la desigualdad triangular) y como (al menos) uno de los catetos es un número par (porque 2 no es resto cuadrático módulo 4), entonces, el otro cateto y la hipotenusa tienen la misma paridad.

Teorema 3.2. Para cualquier terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con exinradios menores r_a y r_b , se verifica que $r_a \neq 1 \neq r_b$.

Demostración:

① Si $r_a = 1$, según el Corolario 1.4., tendríamos que:

$$(c+a)(c-b) = 2 \xrightarrow{c+a > c-b} \begin{cases} c+a = 2 \\ c-b = 1 \end{cases} \xrightarrow{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3} \text{imposible}$$

② Si $r_b = 1$, según el Corolario 1.4., tendríamos que:

$$(c-a)(c+b) = 2 \xrightarrow{c-a < c+b} \begin{cases} c-a = 1 \\ c+b = 2 \end{cases} \xrightarrow{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3} \text{imposible}$$

(este resultado ya se probó en el Corolario 1.5., aunque conviene recordarlo)

Teorema 3.3. Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

① Existe, al menos, una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ tal que su primer exinradio r_a es igual a n .

② Existe, al menos, una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ tal que su segundo exinradio r_b es igual a n .

Demostración:

① Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica tal que $c = b + 1$, imponiendo que $r_a = n$, resulta que:

$$2n \underset{\text{Teorema 1.4.}}{=} \frac{a-b+c}{c-b=1} \Rightarrow a = 2n - 1$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

por lo que, el Teorema de Pitágoras nos asegura que:

$$(b+1)^2 = c^2 \stackrel{*}{=} a^2 + b^2 = (2n-1)^2 + b^2 \Rightarrow b = 2n^2 - 2n \stackrel{c=b+1}{\Rightarrow} c = 2n^2 - 2n + 1$$

y, por tanto, la terna pitagórica $(2n-1, 2n^2-2n, 2n^2-2n+1)$ verifica que $r_a = n$.

- ② Considerando la terna pitagórica $(2n^2-2n, 2n-1, 2n^2-2n+1)$, el Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad) nos asegura que $r_b = n$.

Teorema 3.4. Dados $r_a, d \in \mathbb{N}$, existe una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con primer exinradio r_a y tal que $c = b + d$ si y sólo si d es un divisor de $2r_a^2$ tal que $d < r_a$.

Demostración:

Dados $r_a, d \in \mathbb{N}$, si $(a, b, c) \in T$ es una terna pitagórica con primer exinradio r_a y tal que $c = b + d$, según el Teorema 1.4.:

$$r_a \stackrel{*}{=} \frac{a-b+c}{2} = \frac{a+d}{2} \Rightarrow a = 2r_a - d$$

por lo que, aplicando el Teorema de Pitágoras, resulta que:

$$(b+d)^2 = c^2 \stackrel{*}{=} a^2 + b^2 = (2r_a - d)^2 + b^2 \Rightarrow 2bd = 4r_a^2 - 4r_a d \Rightarrow bd = 2r_a^2 - 2rd$$

lo cual implica que, para que tal terna exista, d ha de ser divisor de $2r_a^2$ y, en tal caso, tendríamos que:

$$(a_d, b_d, c_d) = \left(2r_a - d, \frac{2r_a^2}{d} - 2r_a, \frac{2r_a^2}{d} + d - 2r_a \right) = (2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$$

por lo que esta condición no es suficiente, ya que no garantiza que $\left(2r_a - d, \frac{2r_a^2}{d} - 2r_a, \frac{2r_a^2}{d} + d - 2r_a \right) \in \mathbb{N}^3$.

Para ello, debe ocurrir que:

$$\frac{2r_a^2}{d} - 2r_a > 0 \stackrel{2r_a^2 > 0}{\Rightarrow} \frac{r_a}{d} - 1 > 0 \Rightarrow d < r_a$$

en cuyo caso:

$$\textcircled{\smile} \quad d < r_a < 2r_a \Rightarrow 2r_a - d > 0$$

$$\textcircled{\ominus} \quad \frac{2r_a^2}{d} + d - 2r_a \stackrel{d > 0}{>} \frac{2r_a^2}{d} - 2r_a > 0$$

Podemos, pues, concluir que, dados $r_a, d \in \mathbb{N}$, existe una terna pitagórica $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ con primer exinradio r_a y tal que $c = b + d$ si y sólo si d es un divisor de $2r_a^2$ tal que $d < r_a$.

Corolario 3.1. Dados $r_b, d \in \mathbb{N}$, existe una terna pitagórica $(a, b, c) \in T$ con segundo exinradio r_b y tal que $c = a + d$ si y sólo si d es un divisor de $2r_b^2$ tal que $d < r_b$.

Demostración:

Este resultado es consecuencia directa del Teorema 3.4. y del Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad).

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Teorema 3.5. Dado $r_a \in \mathbb{N}$:

- ① El número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a viene dado por:

$$n_a(r_a) = d_{<r_a}(2r_a^2)$$

siendo $d_{<r_a}(2r_a^2)$ el número de divisores de $2r_a^2$ menores que r_a .

- ② El número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a viene dado por:

$$n_a^{a < b < c}(r_a) = d_{<(2-\sqrt{2})r_a}(2r_a^2) \leq d_{<r_a}(2r_a^2) = n_a(r_a)$$

siendo $d_{<(2-\sqrt{2})r_a}(2r_a^2)$ el número de divisores de $2r_a^2$ menores que $(2 - \sqrt{2})r_a$.

Demostración:

- ① Llamando:

$$Div(2r_a^2) = \{1 = d_1, d_2, \dots, d_{d(2r_a^2)-1}, d_{d(2r_a^2)} = 2r_a^2\}$$

al conjunto de divisores de $2r_a^2$ (escritos en forma ordenada y creciente), según el Teorema 3.4., las únicas ternas pitagóricas con exinradio r_a son las de la forma:

$$\forall d \in Div(2r_a^2) / d < r_a : (a_d, b_d, c_d) = \left(2r_a - d, \frac{2r_a^2}{d} - 2r_a, \frac{2r_a^2}{d} + d - 2r_a \right)$$

y, por tanto, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a viene dado por:

$$n_a(r_a) = d_{<r_a}(2r_a^2)$$

siendo $d_{<r_a}(2r_a^2)$ el número de divisores de $2r_a^2$ menores que r_a .

- ② Además, no todas estas $n_a(r_a)$ ternas pitagóricas son ordenadas, es decir:

$$\forall d \in Div(2r_a^2) / d < r_a : a_d < b_d < c_d$$

ya que:

$$a_d < b_d \Leftrightarrow 2r_a - d < \frac{2r_a^2}{d} - 2r_a \Leftrightarrow_{d < r_a} d < (2 - \sqrt{2})r_a$$

y, por tanto, el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a viene dado por:

$$n_a^{a < b < c}(r_a) = d_{<(2-\sqrt{2})r_a}(2r_a^2) \stackrel{2-\sqrt{2} < 1}{\leq} d_{<r_a}(2r_a^2) = n_a(r_a)$$

siendo $d_{<(2-\sqrt{2})r_a}(2r_a^2)$ el número de divisores de $2r_a^2$ menores que $(2 - \sqrt{2})r_a$.

Corolario 3.2. Dado $r_b \in \mathbb{N}$:

- ① El número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es igual a r_b viene dado por:

$$n_b(r_b) = d_{<r_b}(2r_b^2)$$

siendo $d_{<r_b}(2r_b^2)$ el número de divisores de $2r_b^2$ menores que r_b .

- ② El número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es igual a r_b viene dado por:

$$n_b^{a < b < c}(r_b) = d_{>(2-\sqrt{2})r_b}(2r_b^2) \leq n_b(r_b) = d_{<r_b}(2r_b^2)$$

siendo $d_{>(2-\sqrt{2})r_b}(2r_b^2)$ el número de divisores de $2r_b^2$ mayores que $(2 - \sqrt{2})r_b$.

Demostración:

Este resultado es consecuencia directa del Teorema 3.5. y del Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad).

Corolario 3.3. Dado $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existe una terna pitagórica $(a_n, b_n, c_n) \in T$ primitiva y ordenada, con primer exinradio $r_{a_n} = n$ y tal que:

$$a_n^2 = b_n + c_n$$

Demostración:

Como $1 \in \text{Div}_{<\sqrt{2}n}(2n^2)$, entonces, el Teorema 3.5. nos asegura que la terna pitagórica con primer exinradio $r_{a_n} = n$:

$$(a_n, b_n, c_n) = (2n - 1, 2n^2 - 2n, 2n^2 - 2n + 1)$$

es ordenada, siendo, además, primitiva, ya que cualesquiera dos números naturales consecutivos son primos entre sí. Finalmente, se verifica que:

$$b_n + c_n = 2n^2 - 2n + 2n^2 - 2n + 1 = 4n^2 - 4n + 1 = (2n - 1)^2 = a_n^2$$

(en el Ejemplo 9.3c. se muestran los treinta y cinco primeros términos de esta sucesión)

Ejemplo 3.1. Vamos a ilustrar el Teorema 3.5. con algunos ejemplos:

- ① Para $r_a = 6$, como $2r_a^2 = 72$ y:

$$\text{Div}(72) = \left\{ 1, 2, 3, 4, \underbrace{6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}_{\geq 6 \rightarrow \text{no valen}} \right\}$$

entonces, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 6$ es:

$$n_a(6) = d_{<6}(72) = 4$$

y el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 6$ es:

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

$$n_a^{a < b < c}(6) = d_{<(2-\sqrt{2})_6}(72) =_{3 < (2-\sqrt{2})_6 < 4} 3$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

De hecho, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 6$ es:

$$T_a(6) = \left\{ \begin{array}{l} (12-1, 72-12, 72+1-12) \\ (12-2, 36-12, 36+2-12) \\ (12-3, 24-12, 24+3-12) \\ (12-4, 18-12, 18+4-12) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (11, 60, 61) \\ (10, 24, 26) \\ (9, 12, 15) \\ (8, 6, 10) \end{array} \right\}$$

y, por tanto, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es $r_b = 6$ es:

$$T_b(6) = \left\{ \begin{array}{l} (60, 11, 61) \\ (24, 10, 26) \\ (12, 9, 15) \\ (6, 8, 10) \end{array} \right\}$$

② Para $r_a = 9$, como $2r_a^2 = 162$ y:

$$Div(162) = \left\{ 1, 2, 3, 6, \frac{9, 18, 27, 54, 81, 162}{\geq 9 \rightarrow \text{no valen}} \right\}$$

entonces, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 9$ es:

$$n_a(9) = d_{<9}(162) = 4$$

y el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 9$ es:

$$n_a^{a < b < c}(9) = d_{<(2-\sqrt{2})_9}(162) \underset{3 < (2-\sqrt{2})_9 < 6}{=} 3$$

De hecho, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 9$ es:

$$T_a(9) = \left\{ \begin{array}{l} (18-1, 162-18, 162+1-18) \\ (18-2, 81-18, 81+2-18) \\ (18-3, 54-18, 54+3-18) \\ (18-6, 27-18, 27+6-18) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (17, 144, 145) \\ (16, 63, 65) \\ (15, 36, 39) \\ (12, 9, 15) \end{array} \right\}$$

y, por tanto, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es $r_b = 9$ es:

$$T_b(9) = \left\{ \begin{array}{l} (144, 17, 145) \\ (63, 16, 65) \\ (36, 15, 39) \\ (9, 12, 15) \end{array} \right\}$$

③ Para $r_a = p$ con p primo impar, como $2r_a^2 = 2p^2$ y:

$$Div(2p^2) = \left\{ 1, 2, p, \frac{2p, p^2, 2p^2}{\geq p \rightarrow \text{no valen}} \right\}$$

entonces, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = p$ es:

$$n_a(p) = d_{<p}(2p^2) = 2$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = p$ es:

$$n_a^{a<b<c}(p) = d_{<(2-\sqrt{2})p}(2p^2) = \begin{cases} 1 & p = 3 \\ 2 & p \neq 3 \end{cases}$$

De hecho, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = p$ es:

$$T_a(p) = \begin{cases} (2p-1, 2p^2-2p, 2p^2-2p+1) \\ (2p-2, p^2-2p, p^2-2p+2) \end{cases}$$

y, por tanto, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es $r_b = p$ es:

$$T_b(p) = \begin{cases} (2p^2-2p, 2p-1, 2p^2-2p+1) \\ (p^2-2p, 2p-2, p^2-2p+2) \end{cases}$$

Corolario 3.4. Si $r_a = 2^\beta \in \mathbb{N}$ ($\beta \in \mathbb{N}$), entonces:

$$n_a(2^\beta) = \beta = n_a^{a<b<c}(2^\beta)$$

Demostración:

① Como $Div(2^{2\beta+1}) = \{2^k : k \in \{0, 1, \dots, 2\beta+1\}\}$ y $2^k < 2^\beta \Leftrightarrow k < \beta$, entonces:

$$Div(2^{2\beta+1}) = \{1, 2, \dots, 2^{\beta-1}\} \cup \underbrace{\{2^k : k \in \{\beta, \beta+1, \dots, 2\beta+1\}\}}_{\text{no valen}}$$

por lo que, según el Teorema 3.5.:

$$n_a(2^\beta) = d_{<2^\beta}(2^{2\beta+1}) = \beta$$

② Como:

$$\frac{1}{2} < 2 - \sqrt{2} \Rightarrow 2^{\beta-1} < (2 - \sqrt{2})2^\beta$$

entonces, según el Teorema 3.5.:

$$n_a^{a<b<c}(2^\beta) = \beta$$

Corolario 3.5. Si $r_b = \theta^\beta \in \mathbb{N}$ ($\theta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \beta \in \mathbb{N}$), entonces:

$$\begin{cases} n_b(\theta^\beta) = \beta \\ n_b^{a<b<c}(\theta^\beta) = 0 \end{cases}$$

Demostración:

Este resultado es consecuencia directa del Corolario 3.4. y del Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad).

Ejemplo 3.2. Para $r_a = 8 = 2^3$, como $\beta = 3$, entonces, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 8$ es:

$$n_a(8) = 3$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 8$ es:

$$n_a^{a < b < c}(8) = 3$$

De hecho, el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es $r_a = 8$ es:

$$T_a(8) = \left\{ \begin{array}{l} (16 - 1, 128 - 16, 128 + 1 - 16) \\ (16 - 2, 64 - 16, 64 + 2 - 16) \\ (16 - 4, 32 - 16, 32 + 4 - 16) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} (15, 112, 113) \\ (14, 48, 50) \\ (12, 16, 20) \end{array} \right\}$$

Además, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es $r_b = 8$ es:

$$n_b(8) = 3$$

y el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es $r_b = 8$ es:

$$n_b^{a < b < c}(8) = 0$$

siendo el conjunto de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es $r_b = 8$:

$$T_b(8) = \left\{ \begin{array}{l} (112, 15, 113) \\ (48, 14, 50) \\ (16, 12, 20) \end{array} \right\}$$

Teorema 3.6. Sea $r_a \in \mathbb{N}$:

- ① Si r_a es impar, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores impares de $2r_a^2$ que son menores que r_a .
- ② Si r_a es par, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores pares de $2r_a^2$ que son menores que r_a y cuyo divisor gemelo es impar.

Demostración:

Como, según el Teorema 3.4.:

$$\forall d \in \text{Div}(2r_a^2) / d < r_a : (a_d, b_d, c_d) = (2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$$

son las únicas ternas pitagóricas con primer exinradio r_a , entonces, los semiperímetros estas ternas son:

$$\forall d \in \text{Div}(2r_a^2) / d < r_a : s_d = \bar{d} - r_a$$

Además:

- ① Si r_a es impar, entonces, para cada $d \in \text{Div}(2r_a^2)$, se verifica que d y \bar{d} tienen distinta paridad, por lo que:
- ☺ Si d es par y \bar{d} es impar, entonces, el semiperímetro de la terna pitagórica $(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$ es par.

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

⊖ Si d es impar y \bar{d} es par, entonces, el semiperímetro de la terna pitagórica $(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$ es impar.

Por tanto, si r_a es impar, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores impares de $2r_a^2$ que son menores que r_a .

② Si r_a es par, entonces, para cada $d \in \text{Div}(2r_a^2)$, puede ocurrir que:

❶ Tanto d como \bar{d} sean pares, en cuyo caso, el semiperímetro de la terna pitagórica $(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$ es par.

❷ d y \bar{d} tengan distinta paridad, en cuyo caso:

⊕ Si d es par y \bar{d} es impar, entonces, el semiperímetro de la terna pitagórica $(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$ es impar.

⊖ Si d es impar y \bar{d} es par, entonces, el semiperímetro de la terna pitagórica $(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$ es par.

Por tanto, si r_a es par, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su primer exinradio es igual a r_a y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores pares de $2r_a^2$ que son menores que r_a y cuyo divisor gemelo es impar.

Corolario 3.6. Sea $r_b \in \mathbb{N}$:

① Si r_b es impar, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es igual a r_b y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores impares de $2r_b^2$ que son menores que r_b .

② Si r_b es par, el número de ternas pitagóricas $(a, b, c) \in T$ tales que su segundo exinradio es igual a r_b y su semiperímetro s es un número natural impar coincide con el número de divisores pares de $2r_b^2$ que son menores que r_b y cuyo divisor gemelo es impar.

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 3.6. y del Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad).

Ejemplo 3.3. Vamos a ilustrar el Teorema 3.6. con dos ejemplos:

① Si $r_a = 15$, como $2r_a^2 = 450$, entonces:

$$\text{Div}_{<15}^{\text{impares}}(450) = \{1, 3, 5, 9\}$$

por lo que hay exactamente cuatro ternas pitagóricas cuyo primer exinradio es igual a 15 y tales que su semiperímetro s es un número natural impar. De hecho, como:

$$\text{Div}_{<15}(450) = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10\}$$

entonces, el Teorema 3.5. nos asegura que hay siete ternas pitagóricas cuyo primer inradio es igual a 15, siendo:

$$T_a(15) = \left\{ \begin{array}{l} (29, 420, 421) \\ \text{\small } s \text{ impar (1)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (28, 195, 197) \\ \text{\small } s \text{ par (2)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (27, 120, 123) \\ \text{\small } s \text{ impar (3)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (25, 60, 65) \\ \text{\small } s \text{ impar (5)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (24, 45, 51) \\ \text{\small } s \text{ par (6)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (21, 20, 29) \\ \text{\small } s \text{ impar (9)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (20, 15, 25) \\ \text{\small } s \text{ par (10)} \end{array} \right\}$$

② Si $r_a = 14$, como $2r_a^2 = 392$, entonces:

$$Div_{<14}^{\text{pares}}(392) = \{2, 4, 8\}$$

siendo sus divisores gemelos:

$$\begin{array}{l} d \leftrightarrow \bar{d} \\ 2 \leftrightarrow 196 \\ 4 \leftrightarrow 98 \\ 8 \leftrightarrow 49 \end{array}$$

por lo que no hay exactamente una terna pitagórica cuyo primer exinradio es igual a 14 y tal que su semiperímetro s es un número natural impar. De hecho, como:

$$Div_{<14}(392) = \{1, 2, 4, 7, 8\}$$

entonces, el Teorema 3.5. nos asegura que hay cinco ternas pitagóricas cuyo primer inradio es igual a 14, siendo:

$$T_a(14) = \left\{ \begin{array}{l} (27, 364, 365) \\ \text{\small } s \text{ par (1)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (26, 168, 170) \\ \text{\small } s \text{ par (2)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (24, 70, 74) \\ \text{\small } s \text{ par (4)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (21, 28, 35) \\ \text{\small } s \text{ par (7)} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} (20, 21, 29) \\ \text{\small } s \text{ impar (8)} \end{array} \right\}$$

Lema 3.1. Si $r_a \in \mathbb{N}$ y (d, \bar{d}) es un par de divisores gemelos de $2r_a^2$, entonces:

$$mcd(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a) = mcd(r_a, d, \bar{d})$$

Demostración:

$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} mcd(r_a, d, \bar{d}) \mid r_a \\ mcd(r_a, d, \bar{d}) \mid d \\ mcd(r_a, d, \bar{d}) \mid \bar{d} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} mcd(r, d, \bar{d}) \mid 2r_a - d \\ mcd(r, d, \bar{d}) \mid \bar{d} - 2r_a \\ mcd(r, d, \bar{d}) \mid \bar{d} + d - 2r_a \end{array} \right\} \Rightarrow mcd(r_a, d, \bar{d}) \mid mcd(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$$

② Si llamamos $l = mcd(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} l \mid 2r_a - d \\ l \mid \bar{d} - 2r_a \\ l \mid \bar{d} + d - 2r_a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l \mid d = (\bar{d} + d - 2r_a) - (\bar{d} - 2r_a) \\ l \mid \bar{d} = (\bar{d} + d - 2r_a) + (2r_a - d) \end{array} \right\} \Rightarrow l^2 \mid d \cdot \bar{d} = 2r_a^2 \Rightarrow l^2 \mid r_a^2 \Rightarrow l \mid r_a$$

entonces:

$$mcd(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a) = l \mid mcd(r_a, d, \bar{d})$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) \mid \text{mcd}(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a) \\ \text{mcd}(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a) \mid \text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) \end{cases} \Rightarrow \text{mcd}(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a) = \text{mcd}(r_a, d, \bar{d})$$

Lema 3.2. Si $r_a \in \mathbb{N}$ y (d, \bar{d}) es un par de divisores gemelos de $2r_a^2$, entonces:

$$\text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) = \text{mcd}(d, \bar{d})$$

Demostración:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) \mid d \\ \text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) \mid \bar{d} \end{cases} \Rightarrow \text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) \mid \text{mcd}(d, \bar{d})$$

$\textcircled{2}$ Si llamamos $l = \text{mcd}(d, \bar{d})$, como:

$$\begin{cases} l \mid d \\ l \mid \bar{d} \end{cases} \Rightarrow l^2 \mid d \cdot \bar{d} = 2r_a^2 \Rightarrow l^2 \mid r_a^2 \Rightarrow l \mid r_a$$

entonces:

$$\text{mcd}(d, \bar{d}) = l \mid \text{mcd}(r_a, d, \bar{d})$$

Teorema 3.7. Dado $r_a \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas primitivas distintas (salvo el orden de los catetos) con primer exinradio r_a es menor o igual que 2^t , siendo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de factores primos impares de r_a .

Demostración:

Sea $r_a = 2^{\beta_0} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_t^{\beta_t}$ ($\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) la descomposición en factores primos de r_a . El Teorema 3.5. nos asegura que el número de ternas pitagóricas distintas (salvo el orden de los catetos) con primer exinradio r_a es:

$$n_a(r_a) = d_{<r_a}(2r_a^2)$$

donde $d_{<r_a}(2r_a^2)$ es el número de divisores de $2r_a^2$ menores que r_a , siendo estas ternas:

$$\forall d \in \text{Div}(2r_a^2) / d < r_a : (a_d, b_d, c_d) = (2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$$

Además, para cada $d \in \{d \in \text{Div}(2r_a^2) : d < r_a\}$, si la terna pitagórica (a_d, b_d, c_d) es primitiva, resulta que:

$$1 = \text{mcd}(2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a) \stackrel{\text{Lema 3.1.}}{=} \text{mcd}(r_a, d, \bar{d}) \stackrel{\text{Lema 3.2.}}{=} \text{mcd}(d, \bar{d})$$

por lo que puede ocurrir que:

$$\begin{cases} d = 1 \\ \bar{d} = 2r_a^2 \end{cases}$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

o que existan $q_1 = p_{d_1}, \dots, q_l = p_{d_l}, q_{l+1} = p_{d_{l+1}}, \dots, q_t = p_{d_t}$ ($1 \leq l \leq t-1$) tales que:

$$\begin{cases} d = q_1^{2\beta_{d_1}} \cdot \dots \cdot q_l^{2\beta_{d_l}} \\ \bar{d} = 2^{2\beta_0} \cdot q_{l+1}^{2\beta_{d_{l+1}}} \cdot \dots \cdot q_t^{2\beta_{d_t}} \end{cases}$$

y, por tanto, existen, como máximo (ya que no todos los productos de potencias que se generan tiene por qué ser menores que r_a), tantas ternas pitagóricas primitivas con primer exinradio r_a como subconjuntos tiene el conjunto $\{p_1, \dots, p_t\}$, lo cual significa que el número de ternas pitagóricas primitivas con primer exinradio r_a es:

$$n_a^{\text{primitivas}}(r_a) \leq \text{card}[\wp(\{p_1, \dots, p_t\})] = \binom{t}{0} + \binom{t}{1} + \dots + \binom{t}{t} = 2^t$$

Corolario 3.7. Dado $r_b \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas primitivas distintas (salvo el orden de los catetos) con segundo exinradio r_b es menor o igual que 2^t , siendo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de factores primos impares de r_b .

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 3.7. y del Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad).

Ejemplo 3.4. Vamos a ilustrar el Teorema 3.7. con dos ejemplos:

- ① Si $r_a = 45 = 3^2 \cdot 5$, entonces, el Teorema 3.7. nos asegura que el número de ternas pitagóricas primitivas cuyo primer inradio es igual 45 es menor o igual que $2^2 = 4$. De hecho:

$$T_a^{\text{primitivas}}(45) = \left\{ (89, 3960, 3961)_{1 \leftrightarrow 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2}, (88, 1935, 1937)_{2 \leftrightarrow 3^4 \cdot 5^2}, (65, 72, 97)_{5^2 \leftrightarrow 2 \cdot 3^4} \right\} \Rightarrow n_a^{\text{primitivas}}(45) = 3 < 2^2$$

- ② Si $r_a = 14 = 2 \cdot 7$, entonces, el Teorema 3.7. nos asegura que el número de ternas pitagóricas primitivas cuyo primer inradio es igual 14 es menor o igual que $2^1 = 2$. De hecho:

$$T_a^{\text{primitivas}}(14) = \left\{ (27, 364, 365)_{1 \leftrightarrow 2^3 \cdot 7^2}, (20, 21, 29)_{2^3 \leftrightarrow 7^2} \right\} \Rightarrow n_a^{\text{primitivas}}(14) = 2 = 2^1$$

Teorema 3.8. Dados $r_b \in \mathbb{N}$ y una terna pitagórica ordenada $(a, b, c) \in T$ con segundo exinradio r_b , se verifica que:

- ① $a < r_b \Leftrightarrow \frac{2r_b}{3} < d < r_b$
- ② $a = r_b \Leftrightarrow d = \frac{2r_b}{3}$
- ③ $a > r_b \Leftrightarrow (2 - \sqrt{2})r_b < d < \frac{2r_b}{3}$

Demostración:

Según el Teorema 3.5. y el Corolario 1.1. (Teorema de reciprocidad), todas las ternas pitagóricas ordenadas con segundo exinradio r_b son de la forma:

$$(a_d, b_d, c_d) = (\bar{d} - 2r_b, 2r_b - d, \bar{d} + d - 2r_b)$$

**TERNAS PITAGÓRICAS
EXINRADIOS MENORES**

José-Miguel Blanco Casado

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

con $d \in \text{Div}(2r^2)$ tal que $(2 - \sqrt{2})r_b < d < r_b$, por lo que:

$$a_d = r_b \Leftrightarrow \bar{d} - 2r_b = r_b \Leftrightarrow \bar{d} = 3r_b \underset{d\bar{d}=2r_b^2}{\Leftrightarrow} d = \frac{2r_b}{3}$$

lo cual implica que $3 \mid r_b$, siendo:

$$\begin{cases} a_d = \frac{2r_b^2}{d} - 2r_b = r_b \\ b_d = 2r_b - d = \frac{4r_b}{3} \end{cases} \xrightarrow{c_d^2 = a_d^2 + b_d^2} c_d = \frac{5r_b}{3}$$

y, por tanto:

$$\exists m = \frac{r_b}{3} \in \mathbb{N} : (a_d, b_d, c_d) = (3m, 4m, 5m)$$

Además, si $d \in \text{Div}(2r^2)$ tal que $(2 - \sqrt{2})r_b < d < r_b$, resulta que:

$$\textcircled{\smile} \quad a < r_b \Leftrightarrow \bar{d} - 2r_b < r_b \Leftrightarrow \bar{d} < 3r_b \underset{d\bar{d}=2r_b^2}{\Leftrightarrow} d > \frac{2r_b}{3} \underset{\frac{2}{3} > 2 - \sqrt{2}}{\Leftrightarrow} \frac{2r_b}{3} < d < r_b$$

$$\textcircled{\ominus} \quad a > r_b \Leftrightarrow \bar{d} - 2r_b > r_b \Leftrightarrow \bar{d} > 3r_b \underset{d\bar{d}=2r_b^2}{\Leftrightarrow} d < \frac{2r_b}{3} \underset{\frac{2}{3} > 2 - \sqrt{2}}{\Leftrightarrow} (2 - \sqrt{2})r_b < d < \frac{2r_b}{3}$$

Corolario 3.8. Dado $r_b \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ con segundo exinradio r_b que verifican la desigualdad $a < r_b$ coincide con el cardinal del conjunto:

$$\left\{ d \in \text{Div}(2r_b^2) : \frac{2r_b}{3} < d < r_b \right\}$$

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 3.8.

Ejemplo 3.5. Para $r_b = 20$, como $2r_b^2 = 400$ y:

$$\begin{cases} \text{Div}_{(\frac{40}{3}, 20)}(400) = \{16\} \\ \text{Div}_{((2-\sqrt{2})20, \frac{40}{3})}(400) = \emptyset \end{cases}$$

entonces, hay una terna pitagórica ordenadas con segundo exinradio igual a 20 para la que $a < r_b$ y no hay ninguna terna pitagórica ordenada con segundo exinradio inradio igual a 20 para la que $a > r_b$. De hecho:

$$T_b(20) = \left\{ \begin{array}{ll} (760, 39, 761) & a > r_b \\ \text{no ordenada} & \\ (360, 38, 362) & a > r_b \\ \text{no ordenada} & \\ (160, 36, 164) & a > r_b \\ \text{no ordenada} & \\ (120, 35, 125) & a > r_b \\ \text{no ordenada} & \\ (60, 32, 28) & a > r_b \\ \text{no ordenada} & \\ (40, 30, 50) & a > r_b \\ \text{no ordenada} & \\ (10, 24, 26) & a < r_b \end{array} \right\}$$

Teorema 3.9. Dado $r_a \in \mathbb{N}$ y una terna pitagórica ordenada $(a, b, c) \in T$ con primer exinradio r_a , si su segundo exinradio es r_b , se verifica que:

$$\textcircled{1} \quad a < r_b \Leftrightarrow 1 < d < \frac{r_a}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad a = r_b \Leftrightarrow d = \frac{r_a}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad a > r_b \Leftrightarrow \frac{r_a}{2} < d < (2 - \sqrt{2})r_a$$

Demostración:

Según el Teorema 3.5., todas las ternas pitagóricas ordenadas con segundo exinradio r_a son de la forma:

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r_a - d, \bar{d} - 2r_a, \bar{d} + d - 2r_a)$$

con $d \in \text{Div}(2r_a^2)$ tal que $1 < d < (2 - \sqrt{2})r_a$, por lo que:

$$a_d = r_b \Leftrightarrow 2r_a - d = d + \bar{d} - 3r_a \Leftrightarrow 2d + \bar{d} = 5r_a \begin{matrix} \xrightarrow{d < r_a} \\ \xleftrightarrow{d\bar{d}=2r_a^2} \end{matrix} d = \frac{r_a}{2}$$

lo cual implica que $2 \mid r_a$, siendo $r_a = 2d$, por lo que:

$$\begin{cases} a_d = 2r_a - d = \frac{3r_a}{2} \\ b_d = \frac{2r_a^2}{d} - 2r_a = 2r_a \end{cases} \xrightarrow{c_d^2 = a_d^2 + b_d^2} c_d = \frac{5r_a}{2}$$

y, por tanto:

$$\exists m = \frac{r_a}{2} \in \mathbb{N} : (a_d, b_d, c_d) = (3m, 4m, 5m)$$

Además, si $d \in \text{Div}(2r_a^2)$ tal que $1 < d < (2 - \sqrt{2})r_a$, resulta que:

$$\textcircled{\smile} \quad a < r_b \Leftrightarrow 2r_a - d < d + \bar{d} - 3r_a \xrightarrow{d\bar{d}=2r_a^2} \Leftrightarrow -2d^2 + 5rd - 2r^2 < 0 \Leftrightarrow d < \frac{r_a}{2} \begin{matrix} \frac{1}{2} < 2 - \sqrt{2} \\ \xleftrightarrow{1 < d < (2 - \sqrt{2})r_a} \end{matrix} 1 < d < \frac{r_a}{2}$$

$$\textcircled{\ominus} \quad a > r_b \Leftrightarrow 2r_a - d > d + \bar{d} - 3r_a \xrightarrow{d\bar{d}=2r_a^2} \Leftrightarrow -2d^2 + 5rd - 2r^2 > 0 \begin{matrix} \frac{1}{2} < 2 - \sqrt{2} \\ \xleftrightarrow{1 < d < (2 - \sqrt{2})r_a} \end{matrix} \frac{r_a}{2} < d < (2 - \sqrt{2})r_a$$

Corolario 3.9. Dado $r_a \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c) \in T$ con primer exinradio r_a y segundo exinradio r_b que verifican la desigualdad $a < r_b$ coincide con el cardinal del conjunto:

$$\left\{ d \in \text{Div}(2r_a^2) : 1 < d < \frac{r_a}{2} \right\}$$

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 3.9.

Ejemplo 3.6. Para $r_a = 20$, como $2r_a^2 = 400$ y:

$$\begin{cases} \text{Div}_{<10}(400) = \{1, 2, 4, 5, 8\} \\ \text{Div}_{(10, (2-\sqrt{2})20)}(400) = \emptyset \end{cases}$$