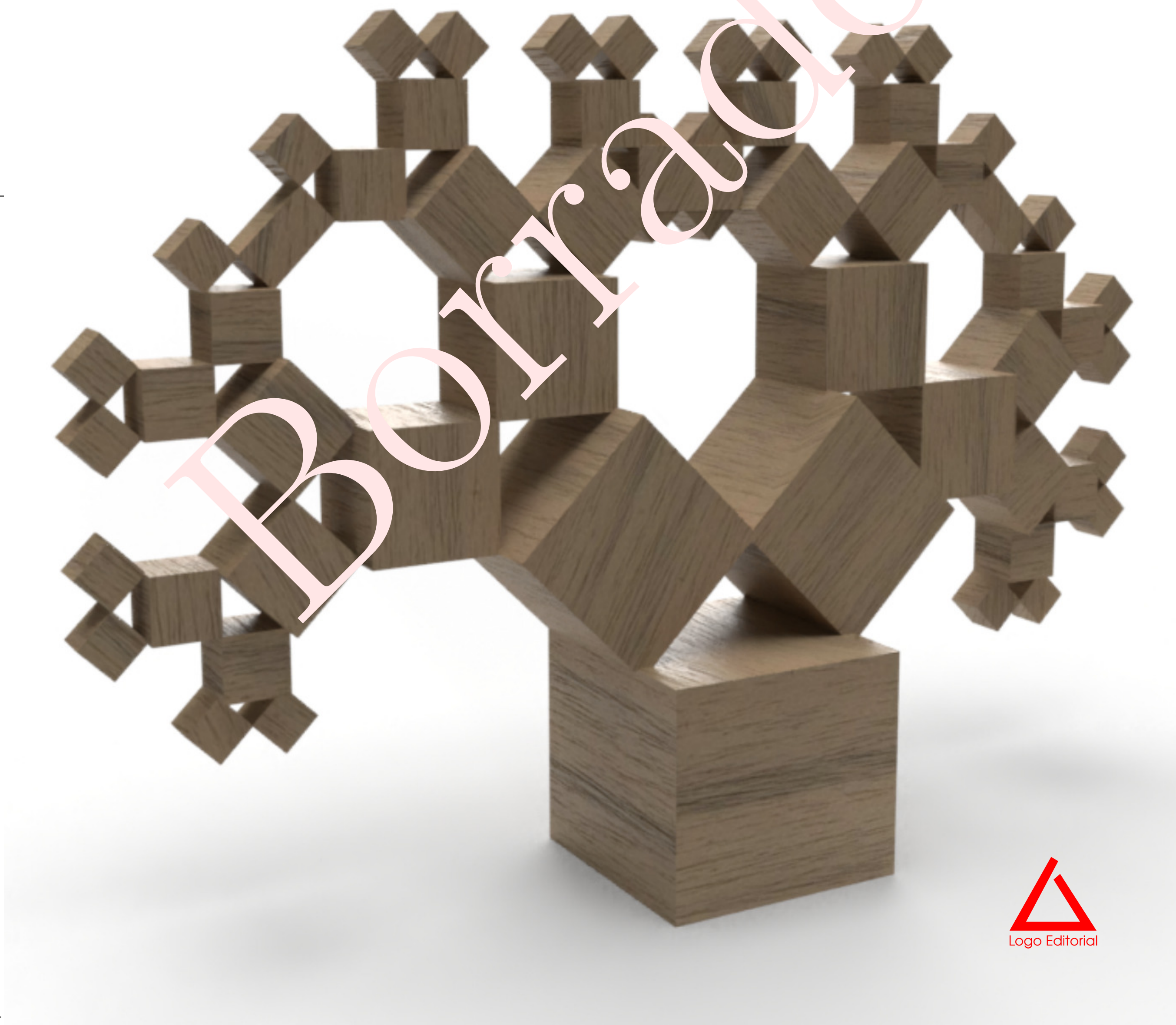
Miguel Ángel Pérez García-Ortega
José Manuel Sánchez Muñoz
José Miguel Blanco Casado

El Libro de las

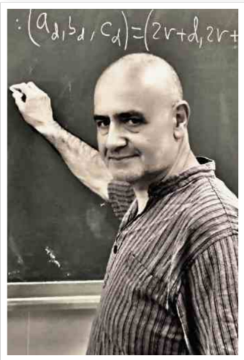
Ternas Pitagóricas

Con decenas de teoremas, demostraciones, ejemplos, ejercicios y aplicaciones de Wolfram Mathematica©



Logo Editorial

Los Autores



Miguel Ángel Pérez García-Ortega
(Villanueva de la Serena, agosto 1964)

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Extremadura (UNEX). Profesor de Educación Secundaria. Participa activamente en la creación de contenidos matemáticos en varias comunidades y redes sociales. Se confiesa un apasionado de la teoría de números, la geometría del triángulo, la inversión circular y la innovación educativa.

José Manuel Sánchez Muñoz
(Madrid, noviembre 1973)

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad Politécnica de Madrid (UPM). Profesor de Educación Secundaria, miembro del Grupo de Innovación Educativa «Pensamiento Matemático» (UPM) y fundador de la revista digital homónima. Autor de numerosos artículos y libros sobre divulgación e historia de las matemáticas. Editor del grupo de Telegram «Retos Matemáticos». Sus investigaciones se centran en campos como la criptografía, teoría de juegos, geometrías riemannianas o innovación educativa matemática.

José Miguel Blanco Casado
(Don Benito, septiembre 1964)

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Extremadura (UNEX). Profesor de Educación Secundaria. Coautor de varios libros relacionados con la «Realidad Educativa Extremeña». Su rama de las matemáticas preferida es la teoría algebraica de números.

Agradecimientos

Aprendemos a lo largo de toda una vida, nutriéndonos de fuentes donde otros bebieron antes que nosotros. Gente diversa entra y sale de nuestras vidas sin saber que siempre dejan en nosotros una marca positiva.

Por ello, los autores queremos agradecer a todos aquellos compañeros que nos han ayudado y se han entusiasmado con nuestra propuesta. Sería injusto citar a alguno de ellos específicamente, pero todos y cada uno de ellos saben de su protagonismo e importancia, y el valor que los autores damos a que hayan compartido desinteresadamente su conocimiento con nosotros.

Desde el punto de vista personal, los autores agradecemos a nuestras familias su incondicional apoyo, que además de muleta, en muchos casos nos hicieron reflexionar y nos reencarrilaron en los momentos en los que nos sentíamos perdidos. Sin su infinita paciencia y visión positiva hubiera sido imposible haber llegado a dar a luz este proyecto.

Notación

(a, b, c)	terna pitagórica de catetos a y b e hipotenusa c, siendo $a, b, c \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}$	conjunto de ternas pitagóricas.
$\mathcal{T}_p$	conjunto de ternas pitagóricas primitivas.
$\mathcal{T}_o$	conjunto de ternas pitagóricas ordenadas.
$\triangle ABC$	triángulo cuyos vértices son A, B y C.
r	inradio de una terna pitagórica.
r_a	primer exinradio de una terna pitagórica.
r_b	segundo exinradio de una terna pitagórica.
r_c	exinradio mayor de una terna pitagórica.
s	semiperímetro de una terna pitagórica.
Δ_{ABC} ó Δ	área de una terna pitagórica.
$\mathcal{T}^r(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^{r_a}(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con primer exinradio igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^{r_b}(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con segundo exinradio igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^{r_c}(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con exinradio mayor igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^s(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con semiperímetro igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^a(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con primer cateto igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^b(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con segundo cateto igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^c(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con hipotenusa igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}^\Delta(k)$	conjunto de ternas pitagóricas con área igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{T}_{a<r_b}$	conjunto de ternas pitagóricas tales que su primer cateto es menor que su segundo exinradio.

$\mathcal{T}_{a=r_b}$	conjunto de ternas pitagóricas tales que su primer cateto es igual que su segundo exinradio.
$\mathcal{T}_{a>r_b}$	conjunto de ternas pitagóricas tales que su primer cateto es mayor que su segundo exinradio.
$\mathcal{T}_{s\,\text{imp}}$	conjunto de ternas pitagóricas con semiperímetro impar.
$\mathcal{T}_{s\,\text{par}}$	conjunto de ternas pitagóricas con semiperímetro par.
$\mathcal{T}_o^{w>2u}$	conjunto de ternas pitagóricas ordenadas tales que su hipotenusa es mayor que el doble de su cateto menor.
$\mathcal{T}_o^{w<2u}$	conjunto de ternas pitagóricas ordenadas tales que su hipotenusa es menor que el doble de su cateto menor.
$\mathcal{T}_o^{w<2v}$	conjunto de ternas pitagóricas ordenadas tales que su hipotenusa es menor que el doble de su cateto mayor.
$\mathcal{T}_{\gamma_{\mathbb{N}}^{(2)}}$	conjunto de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuya proporción radial mediana es un número natural.
$\mathcal{T}_{NSW}$	conjunto de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuyo cateto menor es un número NSW y tales que su cateto mayor y su hipotenusa son números naturales consecutivos.
$\mathcal{Q}(\theta)$	conjunto formado por todas las cuartetas pitagóricas de razón $\theta \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{P}(\theta)$	conjunto formado por todos los pares pitagóricos de razón $\theta \in \mathbb{N}$.
$n^{\mathcal{P}}(\theta)$	número de pares pitagóricos de razón $\theta \in \mathbb{N}$.
(a,b,c,d)	cuaterna pitagórica de catetos a, b y c e hipotenusa d, siendo $a,b,c,d \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}$	conjunto de cuaternas pitagóricas.
q_r	inradio de una cuaterna pitagórica.
q_a	primer exinradio de una cuaterna pitagórica.
q_b	segundo exinradio de una cuaterna pitagórica.
q_c	tercer exinradio de una cuaterna pitagórica.
q_s	semiperímetro de una cuaterna pitagórica.
$\mathcal{C}_p$	conjunto de cuaternas pitagóricas primitivas.
$\mathcal{C}_o$	conjunto de cuaternas pitagóricas ordenadas.
$\mathcal{C}_i$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles.
$\mathcal{C}_{i_1}$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles de primera especie.
$\mathcal{C}_{i_2}$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie.

$\mathcal{C}_l$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas.
$\mathcal{C}_{l_1}$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie.
$\mathcal{C}_{l_1^*}$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie no isósceles.
$\mathcal{C}_{l_2}$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de segunda especie.
$\mathcal{C}_{l_2^*}$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de segunda especie no isósceles.
$\mathcal{C}_{ss}$	conjunto de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas.
$\mathcal{C}_e$	conjunto de cuaternas pitagóricas encadenadas.
$\mathcal{C}_{i_1}^{q_r<a}$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles de primera especie tales que su inradio es menor que su primer cateto.
$\mathcal{C}_{i_2}^{q_r>a}$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie tales que su inradio es mayor que su primer cateto.
$\mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles de primera especie tales que su hipotenusa es mayor que el doble de su primer cateto.
$\mathcal{C}_{i_2}^{2a>d}$	conjunto de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie tales que su hipotenusa es mayor que el doble de su primer cateto.
$\mathcal{C}_l^{q_r}(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}_{l_1^*}^{q_r}(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie no isósceles con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}_{ss}^{q_r}(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}_e^h(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas encadenadas con centro igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}_e^a(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas encadenadas con primer cateto igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}_e^c(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas encadenadas y ordenadas con cateto mayor igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{C}_e^d(k)$	conjunto de cuaternas pitagóricas encadenadas con hipotenusa igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathrm{Div}(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$.
$\mathrm{Div}_{<v}(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son menores que $v \in \mathbb{R}$.
$\mathrm{Div}_{>u}(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son mayores que $u \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Div}_{(u,v)}(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ comprendidos entre (u, v) con $u, v \in \mathbb{R}$.
$(d, \overline{d})$	par de divisores gemelos de un número $k \in \mathbb{N}$, es decir, tales que $d \cdot \overline{d} = k$.
$\mathrm{Div}^*(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ tales que tienen la misma paridad que su divisor gemelo.
$\mathrm{Div}^{\mathrm{imp}}(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son impares.
$\mathrm{Div}^{\mathrm{par}}(k)$	conjunto de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son pares.
$d(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$.
$d_{<v}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son menores que $v \in \mathbb{R}$.
$d_{\leq v}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son menores o iguales que $v \in \mathbb{R}$.
$d_{>u}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son mayores que $u \in \mathbb{R}$.
$d_{\geq u}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son mayores o iguales que $u \in \mathbb{R}$.
$d_{(u,v)}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ comprendidos entre $u \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}$.
$d^*(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ tales que tienen la misma paridad que su divisor gemelo.
$d^{\mathrm{imp}}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son impares.
$d^{\mathrm{par}}(k)$	número de divisores naturales de $k \in \mathbb{N}$ que son pares.
$n^r(k)$	número de ternas pitagóricas cuyo inradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^r_o(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^r_p(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuyo inradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^r_{\gamma^{(2)}_{\mathbb{N}}}(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$ cuya proporción radial mediana es un número natural.
$n^r_{\left(\frac{r_c}{r_a}\right)_{\mathbb{N}}}(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$ cuyo cociente entre su exinradio mayor y su primer exinradio es un número natural.
$n^{r_a}(k)$	número de ternas pitagóricas cuyo primer exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.

$n_o^{r_a}(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo primer exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_p^{r_a}(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuyo primer exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^{r_b}(k)$	número de ternas pitagóricas cuyo segundo exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_o^{r_b}(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo segundo exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_p^{r_b}(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuyo segundo exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^s(k)$	número de ternas pitagóricas cuyo semiperímetro es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_o^s(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo semiperímetro es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_p^s(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuyo semiperímetro es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^a(k)$	número de ternas pitagóricas cuyo primer cateto es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_o^a(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo primer cateto es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_p^a(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuyo primer cateto es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^b(k)$	número de ternas pitagóricas cuyo segundo cateto es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_o^b(k)$	número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo segundo cateto es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_p^b(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuyo segundo cateto es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^c(k)$	número de ternas pitagóricas cuya hipotenusa es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_p^c(k)$	número de ternas pitagóricas primitivas cuya hipotenusa es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^\Delta(k)$	número de ternas pitagóricas cuya área es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n^{q_r}(k)$	número de cuaternas pitagóricas cuyo primer exinradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_a^{q_r}(k,l)$	número de cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a $k \in \mathbb{N}$ y cateto menor igual a $l \in \mathbb{N}$.
$n_{i_2}^{d-c}(k)$	número de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie tales que la diferencia entre su hipotenusa y su cateto mayor es igual a $k \in \mathbb{N}$.

$n_l^{q_r}(k)$	número de cuaternas pitagóricas ligadas tales que su inradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_{l_1}^{q_r}(k)$	número de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie tales que su inradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_{l_2}^{q_r}(k)$	número de cuaternas pitagóricas ligadas de segunda especie tales que su inradio es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$n_e^h(k)$	número de cuaternas pitagóricas encadenadas tales que su centro es igual a $k \in \mathbb{N}$.
$\mathrm{mcd}(u, v)$	máximo común divisor entre $u, v \in \mathbb{N}$.
$u \equiv v (\text{mód } w)$	u es congruente con v módulo w, es decir, los restos de dividir u y v entre w son idénticos.
$u \mid v$	u es divisor natural de v.
$u \nmid v$	u no es divisor natural de v.
$\amalg$	unión disjunta.
T_k	k-ésimo número triangular.
$\lfloor \cdot \rfloor$	función parte entera.
$\lceil \cdot \rceil$	función techo.
$\square$	cuadrado perfecto.
$\wp(\cdot)$	conjunto de partes de un conjunto.
$\mathrm{card}(\cdot)$	cardinal o número de elementos de un conjunto.
$\mathcal{F}_p$	cuerpo finito de característica p.
$\mathcal{F}_p^*$	conjunto de elementos invertibles del cuerpo finito de característica p.

Índice general