$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{mcd}(-a+2b-d, a+2b-d, -b+d) \\
&\underset{*}{=} \operatorname{mcd}\left(\frac{-a+2b-d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right),
\end{aligned}
$$

y, por tanto, la terna pitagórica ordenada $\left(\frac{-a+2b-d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right)$ también es primitiva.

El programa 10.7 (pág. 345), introduciendo un valor para $m \in \mathbb{N}$, nos muestra los m primeros términos de la sucesión de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuyo término general es

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (u_n, v_n, w_n) = (2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1)$$

y de la correspondiente sucesión de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie, cuyo término general es

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n, c_n, d_n) = (2n^2-1, 4n^2+6n+2, 4n^2+6n+2, 6n^2+8n+3),$$

pudiéndose comprobar que, en todas ellas, su inradio es mayor que su cateto menor. □

Ejemplo 10.8. Según el teorema 10.12, la terna pitagórica ordenada $(3,4,5)$ se corresponde con la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(1,12,12,17)$, ya que

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Teorema 10.13.

1. *Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathcal{T}_o^{w>2u}$ y $\mathcal{C}_{i_2}^{q_r<a}$. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

2. *Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathcal{T}_o^{w<2u}$ y $\mathcal{C}_{i_1}^{2a>d}$. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

3. *Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $\mathcal{T}_o^{w<2v}$ y $\mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}$. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.*

4. $\operatorname{card}\left(\mathcal{C}_{i_1}^{2a>d}\right) < \operatorname{card}\left(\mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}\right)$*, pudiéndose definir entonces una aplicación inyectiva* $\Psi : \mathcal{C}_{i_1}^{2a>d} \longrightarrow \mathcal{C}_{i_1}^{2a<d}$ *verificando que, para cada* $(a,a,c,d) \in \mathcal{C}_{i_1}^{2a>d}$*, el cateto mayor de* $\Psi\big((a,a,c,d)\big)$ *es igual a* c.

Demostración.

1. Si (a, b, b, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie tal que $q_r < a$, según el teorema 10.7, como

$$a < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r \Rightarrow a - q_r = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r < q_r,$$

entonces, el teorema 10.8 nos asegura que $(a-q_r, q_r, d-b)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier terna pitagórica ordenada (u, v, w), la correspondencia buscada debería ser de la forma

$$(u, v, w) = (a - q_r, q_r, d - b) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{a - 2b + d}{2}, \\ v = \dfrac{a + 2b - d}{2}, \\ w = -b + d, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = u + v, \\ b = -u + v + w, \\ d = -u + v + 2w, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

siendo

$$a^2 + 2b^2 - d^2 = (u + v)^2 + 2(-u + v + w)^2 - (-u + v + 2w)^2 = 2(u^2 + v^2 - w^2),$$

y, por tanto, (a, b, b, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie si y sólo si (u, v, w) es una terna pitagórica ordenada. Además, el inradio de la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie correspondiente a cualquier terna pitagórica ordenada verifica que

$$q_r = \frac{a + 2b - d}{2} = \frac{u + v + 2(-u + v + w) - (-u + v + 2w)}{2} = v < u + v = a,$$

A continuación, como las aplicaciones lineales $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por estas relaciones

$$f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

son biyectivas (por ser inversas una de la otra, ya que $f \cdot g = 1_{\mathbb{R}^3}$) y

$$w - 2u = -b + d - 2\left(\frac{a - 2b + d}{2}\right) = -b + d - (a - 2b + d) = b - a > 0,$$

entonces, $w > 2u$ y, por tanto, tenemos dos correspondencias biunívocas inversas una de la otra

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_o^{w>2u} & \xrightarrow{g} & \mathcal{C}_{i_2}^{q_r<a} \\ (u, v, w) & \rightsquigarrow & (u + v, -u + v + w, -u + v + w, -u + v + 2w) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}_{i_2}^{q_r<a} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T}_o^{w>2u} \\ (a, b, b, d) & \rightsquigarrow & \left(\dfrac{a - 2b + d}{2}, \dfrac{a + 2b - d}{2}, -b + d\right) \end{array}$$

Finalmente:

a) Si (u, v, w) es una terna pitagórica ordenada primitiva, como w es impar $(*)$, resulta que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{mcd}(u, v, w) \\ &= \operatorname{mcd}(u + v, v, w) \\ &\underset{*}{=} \operatorname{mcd}(u + v, 2v, w) \\ &= \operatorname{mcd}(u + v, -u + v, w) \\ &= \operatorname{mcd}(u + v, -u + v + w, w) \\ &= \operatorname{mcd}(u + v, -u + v + w, -u + v + 2w), \end{aligned}$$

y, por tanto, la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(u + v, -u + v + w, -u + v + w, -u + v + 2w)$ también es primitiva.

b) Si (a, b, b, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie primitiva, según el teorema 10.11, b es par, por lo que, tanto a como d son impares $(*)$, verificándose que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{mcd}(a, b, b, d) \\ &= \operatorname{mcd}(a, b, d) \\ &= \operatorname{mcd}(a, b, -b + d) \\ &= \operatorname{mcd}(a, a + 2b - d, -b + d) \\ &= \operatorname{mcd}(a - 2b + d, a + 2b - d, -b + d) \\ &\underset{*}{=} \operatorname{mcd}\left(\frac{a - 2b + d}{2}, \frac{a + 2b - d}{2}, -b + d\right), \end{aligned}$$

y, por tanto, la terna pitagórica ordenada $\left(\frac{a-2b+d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b + d\right)$ también es primitiva.

El programa 10.8 (pág. 346), introduciendo un valor para $m \in \mathbb{N}$, nos muestra los m primeros términos de la sucesión de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuyo término general es

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{1\} : (u_n, v_n, w_n) = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$$

y de la correspondiente sucesión de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie, cuyo término general es

$$\forall\, n \in \mathbb{N} - \{1\} : (a_n, b_n, c_n, d_n) = (2n^2 + 4n + 1, 4n^2 + 2n, 4n^2 + 2n, 6n^2 + 4n + 1),$$

pudiéndose comprobar que, en todas ellas, su inradio es menor que su cateto menor.

2. Si (a, a, c, d) es una cuaterna pitagórica isósceles de primera especie tal que $2a > d$, para cada terna pitagórica ordenada (u, v, w), según el teorema 10.8 y el lema 10.2, $(c - q_r, q_r, d - a)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier