Contando y calculando cuaternas pitagóricas

por

José Manuel Sánchez Muñoz, Miguel Ángel Pérez García-Ortega y José Miguel Blanco Casado

Resumen. En este artículo vamos a realizar un acercamiento a las cuaternas pitagóricas, un elemento $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tal que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. De la misma manera se formalizará toda una teoría en torno a dichos elementos, orientada principalmente a cuantificar el número de éstas dada una condición previa mediante un valor establecido denominado inradio.

1. Introducción

Una cuaterna pitagórica es un conjunto de cuatro números enteros positivos que satisfacen la relación matemática conocida como el teorema de Pitágoras (generalizado). Los elementos de dicho conjunto representan las longitudes de las diagonales de cara (a, b, c) y principal (d) de un ortoedro denominado también *cuboide*.

El estudio presente está encaminado a calcular el número existente de cuaternas pitagóricas que hay para un valor específico denominado inradio por similitud con la expresión algebraica del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo asociado a una terna pitagórica.

Las obras [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] han servido de una manera u otra como base fundamental para desarrollar nuestras investigaciones, por ello, aunque ninguna de ellas haya sido utilizada explícitamente en ninguno de los resultados que aquí son presentados (a excepción de [7]), se ha considerado oportuno que aparezcan con el fin de ofrecer al lector la posibilidad de acceder a temática similar a la que aquí se maneja, ya que muchos conceptos, como por ejemplo cuaternas pitagóricas isósceles de primera y segunda especie, ligadas o de sumas simétricas, son completamente vanguardistas, y los autores no conocemos referencias específicas que los hayan presentado con anterioridad a la publicación de este artículo. Con ello dotamos al lector de herramientas de consulta alternativas que faciliten la comprensión de dichos novedosos conceptos. En cualquier caso, como se suele decir en el argot popular, «no son todas las que están, sin embargo están todas las que son».

2. Definición y propiedades previas

Definición 1. Se llama *cuaterna pitagórica* (véase [7, § 15.1, p. 97]) a un elemento $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tal que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. En lo sucesivo (por similitud con las ternas pitagóricas), dada una cuaterna pitagórica (a, b, c, d), a, b y c se denominarán *catetos* y d *hipotenusa* y, además, se dirá que esta cuaterna pitagórica es *primitiva* cuando $\operatorname{mcd}(a, b, c, d) = 1$ y se dirá que está *ordenada* cuando $a \leq b \leq c < d$.

PROPIEDADES 1. Si (a, b, c, d) es una cuaterna pitagórica, se verifica que:

1. Al menos dos de sus catetos son pares.
2. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, también (ka, kb, kc, kd) es una cuaterna pitagórica.
3. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \mid \operatorname{mcd}(a, b, c, d)$, también $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right)$ es una cuaterna pitagórica.

DEMOSTRACIÓN.

1. Si los tres catetos fuesen impares, entonces, 3 sería un resto cuadrático módulo 4, lo cual no es posible. Además, si un cateto fuese par y los otros dos catetos fuesen impares, entonces, 2 sería un resto cuadrático módulo 4, lo cual no es posible.
2. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, como
$$(ka)^2 + (kb)^2 + (kc)^2 = k^2(a^2 + b^2 + c^2) = k^2 d^2 = (kd)^2,$$
entonces, (ka, kb, kc, kd) también es una cuaterna pitagórica.
3. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, tal que $k \,|\, \operatorname{mcd}(a, b, c, d)$, como
$$\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\right)^2 + \left(\frac{c}{k}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{k^2} = \frac{d^2}{k^2} = \left(\frac{d}{k}\right)^2,$$
entonces, $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right)$ también es una cuaterna pitagórica.

□

3. CONTABILIZANDO CUATERNAS PITAGÓRICAS SEGÚN EL INRADIO

En este sección se presenta un teorema orientado a contabilizar el número de cuaternas pitagóricas que pueden «construirse» dado un determinado valor específico que se denomina inradio por similitud la expresión algebraica del radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo asociado a una terna pitagórica.

DEFINICIÓN 2. Dada una cuaterna pitagórica (a, b, c, d), se define su *inradio* como
$$q_r = \frac{a + b + c - d}{2}.$$

TEOREMA 1.

1. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe, al menos, una cuaterna pitagórica con inradio igual a n.*
2. *El inradio $q_r = \frac{a+b+c-d}{2}$ de cualquier cuaterna pitagórica (a, b, c, d) es un número natural.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $(1, 2, 2, 3)$ es una cuaterna pitagórica, según el tercer apartado de las propiedades 1, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, también $(n, 2n, 2n, 3n)$ es una cuaterna pitagórica, cuyo inradio es
$$q_r = \frac{n + 2n + 2n - 3n}{2} = n.$$

2. Como $a + b + c + d > 0$ y
$$\begin{aligned}(a + b + c + d)(a + b + c - d) &= (a + b + c)^2 - d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) - d^2 \\ &= 2(ab + ac + bc) > 0,\end{aligned}$$
entonces, $a+b+c-d > 0$. Además, según el primer apartado de las propiedades 1, al menos dos de los catetos de la cuaterna pitagórica (a, b, c, d) son pares, por lo que la hipotenusa tiene la misma paridad que el otro cateto y, por tanto $a+b+c-d$ es un número natural par, lo cual implica que $q_r = \frac{a+b+c-d}{2} \in \mathbb{N}$.

□

En este punto se va a intentar parametrizar la construcción del conjunto de cuaternas pitagóricas dados un inradio y el primer cateto, para lo cual se necesita definir conceptos previos como el conjunto y el número de divisores naturales o par de divisores gemelos. También se demostrarán algunos resultados relacionados con estos conceptos.

Definición 3. Dado $k \in \mathbb{N}$, se denomina $\mathrm{Div}(k)$ al conjunto de divisores naturales de k (escritos en forma ordenada y creciente) y se llama $\mathrm{div}(k)$ al número de divisores de k. Además, para cualquier $d \in \mathrm{Div}(k)$, existe un único $\overline{d} \in \mathrm{Div}(k)$ tal que $d \cdot \overline{d} = k$, y se dice que $(d, \overline{d})$ es un par de divisores gemelos de k. Asimismo, se denomina $\mathrm{Div}_{\leq v}(k)$ al conjunto de divisores naturales de k que son menores o iguales que v y $\mathrm{Div}_{[u,v)}(k)$ al conjunto de divisores naturales de k que son mayores o iguales que u y menores que v, y se denomina por $\mathrm{div}_{\leq v}(k)$ y $\mathrm{div}_{[u,v)}(k)$ a sus respectivos cardinales.

Teorema 2 (Parametrización de las cuaternas pitagóricas en función del inradio y del primer cateto).

1. *Si (a, b, c, d) es una cuaterna pitagórica con inradio q_r, se verifica que*
$$q_r^2 + (q_r - a)^2 = (d - c)(d - b).$$
En lo sucesivo, diremos que $(\delta, \overline{\delta}) = (d - c, d - b)$ es un par de divisores gemelos de $q_r^2 + (q_r - a)^2$.

2. *Dado $q_r \in \mathbb{N}$, cualquier cuaterna pitagórica (a, b, c, d) con inradio q_r es de la forma*
$$(a, b, c, d) = (a, 2q_r - a + \delta, 2q_r - a + \overline{\delta}, 2q_r - a + \delta + \overline{\delta}),$$
siendo $(\delta, \overline{\delta})$ un par de divisores gemelos de $q_r^2 + (q_r - a)^2$.

Demostración.

1. Utilizando la definición, resulta que

$$\begin{aligned} q_r^2 + (q_r - a)^2 &= \left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b+c-d}{2} - a\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a+b+c-d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(bc-bd-cd)}{2} \\ &= d^2 + bc - bd - cd = (d-c)(d-b). \end{aligned}$$

2. Como, según el apartado anterior, $(\delta, \overline{\delta}) = (d-c, d-b)$ es un par de divisores gemelos de $q_r^2 + (q_r - a)^2$ y $q_r = \frac{a+b+c-d}{2}$, entonces:
   a) $b = 2q_r - a - c + d = 2q_r - a + \delta$.
   b) $c = 2q_r - a - b + d = 2q_r - a + \overline{\delta}$.
   c) $d = c + \delta = 2q_r - a + \delta + \overline{\delta}$.

□

TEOREMA 3. *Dada una cuaterna pitagórica (a, b, c, d) con inradio $q_r \in \mathbb{N}$ y un par de divisores gemelos $(\delta, \overline{\delta}) = (d-c, d-b)$, se verifica que:*

1. $a \leq b \iff \delta \geq 2(a - q_r)$.

2. $b \leq c \iff \delta \leq \overline{\delta}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Según el teorema 2,

$$a \leq b \iff a \leq 2q_r - a + \delta \iff \delta \geq 2(a - q_r).$$

2. $b \leq c \iff d - b \geq d - c \iff \overline{\delta} \geq \delta \iff \delta \leq \overline{\delta}$.

□

TEOREMA 4. *Dados $u, k \in \mathbb{N}$, el número $n_a^{q_r}(k, u)$ de cuaternas pitagóricas ordenadas tales que su inradio es igual a k y su primer cateto es igual a u viene dado por el cardinal del conjunto*

$$\left\{\delta \in \operatorname{Div}\left(k^2 + (k-u)^2\right) \,:\, 2(u-k) \leq \delta \leq \sqrt{k^2 + (k-u)^2}\right\}.$$

Además, para cada δ perteneciente a este conjunto, la cuaterna pitagórica correspondiente es

$$(a_\delta, b_\delta, c_\delta, d_\delta) = (u, 2k - u + \delta, 2k - u + \overline{\delta}, 2k - u + \delta + \overline{\delta}).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta con tener en cuenta los teoremas 2 y 3. □

Corolario 4.1. *Dados $u, k \in \mathbb{N}$ tales que $u \leq k$, el número $n_a^{q_r}(k,u)$ de cuaternas pitagóricas ordenadas (a,b,c,d) tales que su inradio es igual a k y su primer cateto es igual a u viene dado por el cardinal del conjunto*

$$\left\{\delta \in \mathrm{Div}(k^2 + (k-u)^2) \,:\, 1 \leq \delta \leq \sqrt{k^2 + (k-u)^2}\right\}.$$

Demostración. Basta con tener en cuenta el teorema 4, que los divisores de cualquier número natural son mayores o iguales que 1 y que $u - k \leq 0 < 1$. Además, tomando $\delta = 1$, como $d_\delta = c_\delta + 1$, entonces, la cuaterna pitagórica correspondiente es primitiva, ya que $\mathrm{mcd}(a_\delta, b_\delta, c_\delta, d_\delta) = 1$, pues cualesquiera que sean dos números naturales consecutivos siempre son primos entre sí. □

A continuación presentamos un ejemplo práctico en la que se muestran todos los conceptos previamente especificados.

Ejemplo 1.

1. Vamos a calcular todas las cuaternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 4$ y cuyo primer cateto es $a = 2$. Como se cumple que $a = 2 < 4 = q_r$ y $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 16 + 4 = 20$, el corolario 4.1 nos asegura que el número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 4$ y cuyo primer cateto es $a = 2$ resulta

$$n_a^{q_r}(4,2) = \mathrm{card}\left(\left\{\delta \in \mathrm{Div}(20) \,:\, 1 \leq \delta \leq 2\sqrt{5}\right\}\right) = \mathrm{card}\left(\{1,2,4\}\right) = 3,$$

siendo, según el teorema 2, estas cuaternas pitagóricas las siguientes

$$\begin{cases} \delta = 1 \Rightarrow (2,7,26,27), \\ \delta = 2 \Rightarrow (2,8,16,18), \\ \delta = 4 \Rightarrow (2,10,11,15). \end{cases}$$

2. Vamos a calcular todas las cuaternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 6$ y cuyo primer cateto es $a = 8$. Como se cumple que $a = 8 > 6 = q_r$ y $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 36 + 4 = 40$, el teorema 4 nos asegura que el número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 6$ y cuyo primer cateto es $a = 8$ resulta

$$n_a^{q_r}(6,8) = \mathrm{card}\left(\left\{\delta \in \mathrm{Div}(40) \,:\, 4 \leq \delta \leq 2\sqrt{10}\right\}\right) = \mathrm{card}\left(\{4,5\}\right) = 2,$$

siendo, según el teorema 2, estas cuaternas pitagóricas las siguientes

$$\begin{cases} \delta = 4 \Rightarrow (8,8,14,18), \\ \delta = 5 \Rightarrow (8,9,12,17). \end{cases}$$

El siguiente teorema resulta fundamental puesto que establece las condiciones que deben verificar el inradio y el primer cateto de una cuaterna pitagórica, a la vez que permitirá contabilizar el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas con un determinado inradio.

TEOREMA 5. *Dados $u, k \in \mathbb{N}$ tales que existe una cuaterna pitagórica ordenada con inradio igual a k y primer cateto igual a u, se verifica que*

$$u < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) k.$$

Esta última acotación nos va a permitir contabilizar el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas con un determinado inradio, ya que, si $k \in \mathbb{N}$ y, para cada $u \in \left[1, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)k\right) \cap \mathbb{N}$, llamamos

$$n_a^{q_r}(k, u) = \operatorname{card}\left(\left\{\delta \in \operatorname{Div}(k^2 + (k-u)^2) \,:\, 2(u-k) \leq \delta \leq \sqrt{k^2 + (k-u)^2}\right\}\right),$$

al número de cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a k y primer cateto igual a u, entonces, el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a k es

$$n^{q_r}(k) = \sum_{u=1}^{\left\lfloor \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)k \right\rfloor} n_a^{q_r}(k, u),$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota la función parte entera.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a distinguir dos casos:

1. Si $u \geq k$, como, según el teorema 3, cualquier divisor de $k^2 + (k-u)^2$ que nos genere una cuaterna pitagórica con estas características ha de verificar que

$$2(u-k) \leq \delta \leq \sqrt{k^2 + (k-u)^2},$$

resulta que

$$4(u-k)^2 \leq \delta^2 \leq k^2 + (k-u)^2,$$

luego

$$3(u-k)^2 \leq \delta^2 \leq k^2,$$

y, si fuese $u = tk$ $(t \in \mathbb{Q}, t > 1)$, entonces,

$$k^2 \geq 3(u-k)^2 = 3k^2(t-1)^2,$$

siendo

$$3(t-1)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{3}(t-1) \leq 1 \Rightarrow t \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

y, por tanto, al ser $u \in \mathbb{Q}$ y $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) k \notin \mathbb{Q}$, se verifica que

$$u = tk \leq \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) k \Rightarrow u < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) k.$$

2. Si $u < k$, entonces,

$$u < k < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) k.$$

□

Veamos a continuación un ejemplo práctico que muestra todo lo anteriormente expuesto en el teorema 5.

Ejemplo 2. Vamos a calcular el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas que existen con inradio $q_r = 3$. Como

$$\left\lfloor \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r \right\rfloor = \left\lfloor \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) 3 \right\rfloor = \left\lfloor 3 + \sqrt{3} \right\rfloor = 4,$$

entonces, el primer cateto de cualquiera de estas cuaternas pitagóricas verifica que $a \in \{1, 2, 3, 4\}$. Además, según el corolario 4.1:

1. Para $a = 1 < 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 4 = 13$, resulta que

$$n_a^{q_r}(3, 1) = \text{card}\left(\left\{\delta \in \text{Div}(13) \,:\, 1 \leq \delta \leq \sqrt{13}\right\}\right) = \text{card}\left(\{1\}\right) = 1.$$

2. Para $a = 2 < 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 1 = 10$, resulta que

$$n_a^{q_r}(3, 2) = \text{card}\left(\left\{\delta \in \text{Div}(10) \,:\, 1 \leq \delta \leq \sqrt{10}\right\}\right) = \text{card}\left(\{1, 2\}\right) = 2.$$

3. Para $a = 3 \leq 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 0 = 9$, resulta que

$$n_a^{q_r}(3, 3) = \text{card}\left(\{\delta \in \text{Div}(9) \,:\, 1 \leq \delta \leq 3\}\right) = \text{card}\left(\{1, 3\}\right) = 2.$$

4. Para $a = 4 > 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 1 = 10$, resulta que

$$n_a^{q_r}(3, 4) = \text{card}\left(\left\{\delta \in \text{Div}(10) \,:\, 2 \leq \delta \leq \sqrt{10}\right\}\right) = \text{card}\left(\{2\}\right) = 1$$

y, por tanto,

$$n^{q_r}(3) = \sum_{a=1}^{4} n_a^{q_r}(3, a) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6.$$

4. Contabilizando distintos tipo de cuaternas pitagóricas según su inradio

Se va a presentar a continuación una definición de distintos tipos de cuaternas pitagóricas, y una serie de resultados relacionados con las condiciones aritméticas que deben cumplir los elementos de dichos conjuntos.

Definición 4. Una cuaterna pitagórica ordenada (a, b, c, d) se dice que:

1. Es isósceles de *primera especie* cuando $a = b < c$.
2. Es isósceles de *segunda especie* cuando $a < b = c$.

TEOREMA 6. *Para cualquier cuaterna pitagórica ordenada* $(a, b, c, d) = (a_\delta, b_\delta, c_\delta, d_\delta)$ *con inradio* q_r *(siendo* δ *un divisor de* $q_r^2 + (q_r - a)^2$*), se verifica que:*

1. *Sus tres catetos no pueden ser iguales.*
2. *Es isósceles de primera especie si y sólo si* $\delta = 2(a - q_r)$*, en cuyo caso:*
   a) a *es par.*
   b) $a > q_r$.
   c) $(a - q_r) \,|\, q_r^2$.
3. *Si es isósceles de primera especie, entonces,* $q_r^2 + (q_r - c)^2$ *es un cuadrado perfecto.*
4. *Si es isósceles de segunda especie, entonces,* $q_r^2 + (q_r - a)^2$ *es un cuadrado perfecto (el recíproco, en general, no es cierto).*

DEMOSTRACIÓN.

1. Si fuesen $a = b = c$, entonces,
$$3a^2 = d^2 \Rightarrow \sqrt{3}a = d \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{d}{a} \in \mathbb{Q},$$
lo cual es imposible. Por tanto, alguno de los catetos ha de ser distinto de los otros dos.
2. La cuaterna pitagórica (a, b, c, d) resulta ser isósceles de primera especie si y sólo si $a = b = 2q_r - a + \delta$, es decir, si y sólo si $\delta = 2(a - q_r)$, en cuyo caso:
   a) $\delta = 2(a - q_r)$ es un divisor par de $q_r^2 + (q_r - a)^2$, lo cual implica que $q_r^2 + (q_r - a)^2$ ha de ser par, es decir, ambos sumandos deben tener la misma paridad y, por tanto, a ha de ser par.
   b) Como cualquier divisor de $q_r^2 + (q_r - a)^2$ verifica que
$$0 < 1 \leq \delta = 2(a - q_r),$$
entonces, $a - q_r > 0$ y, por tanto, $a > q_r$.
   c) Como $\delta = 2(a - q_r)$ es un divisor de $q_r^2 + (q_r - a)^2$, entonces,
$$(a - q_r) \,|\, \left(q_r^2 + (q_r - a)^2\right) \Rightarrow (a - q_r) \,|\, q_r^2.$$
3. Si la cuaterna (a, b, c, d) es isósceles de primera especie, entonces, $a = b$, por lo que, razonando de forma totalmente análoga a la demostración del primer apartado del teorema 2,
$$q_r^2 + (q_r - c)^2 = (d - a)(d - b) = (d - a)^2.$$
4. Si la cuaterna (a, b, c, d) es isósceles de segunda especie, entonces, $b = c$, por lo que, según el primer apartado del teorema 2,
$$q_r^2 + (q_r - a)^2 = (d - b)(d - c) = (d - c)^2.$$

Además, el recíproco, en general, no es cierto, ya que, por ejemplo, la cuaterna pitagórica $(3,4,12,13)$ verifica que $q_r = 3 = a$, por lo que $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 3^2$ es un cuadrado perfecto y, sin embargo, esta cuaterna pitagórica no es isósceles de segunda especie.

□

Teorema 7. *Si a es un número natural par y q_r es un número natural impar tales que:*

1. $a > q_r$.

2. $(a - q_r) \,|\, q_r^2$.

entonces, existe, al menos, una cuaterna pitagórica ordenada (a,b,c,d) con inradio igual a q_r que es isósceles de primera especie.

Demostración. Como

$$\begin{cases} (a - q_r) \,|\, q_r^2 \\ (a - q_r) \,|\, (q_r - a)^2 \end{cases} \Rightarrow (a - q_r) \,|\, \left(q_r^2 + (q_r - a)^2\right),$$

siendo $a - q_r$ impar y $q_r^2 + (q_r - a)^2$ par, entonces,

$$2(a - q_r) \,|\, \left(q_r^2 + (q_r - a)^2\right),$$

por lo que existe $\delta \in \operatorname{Div}\left(q_r^2 + (q_r - a)^2\right)$ tal que $\delta = 2(a - q_r)$ y, por tanto, según el teorema 6, la cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) = (a_\delta, b_\delta, c_\delta, d_\delta)$ es isósceles de primera especie. □

Veamos a continuación un ejemplo práctico en el que aplican todos los conceptos anteriormente expuesto en el teorema 7.

Ejemplo 3. El teorema 7 no se verifica si q_r es par. Vamos a probar esto con un ejemplo, tomando $q_r = 10$ y $a = 14$, que verifican las hipótesis del teorema:

1. $a = 14 > 10 = q_r$.
2. $a - q_r = 4 \,|\, 100 = q_r^2$.

y, sin embargo,

$$2(a - q_r) = 8 \nmid 116 = q_r^2 + (q_r - a)^2,$$

por lo que, si existiese alguna cuaterna pitagórica ordenada (a,b,c,d) con inradio igual a q_r, según el teorema 6, ésta no sería isósceles de primera especie.

Se exponen a continuación una serie de propiedades relacionadas con los distintos tipos de cuaternas pitagóricas especificadas en la definición 4.

Propiedades 2.

1. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe, al menos, una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie (a,b,c,d) con inradio igual a n.

2. Para $q_r = 1$ y $q_r = 2$ no existe ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.
3. Para cualquier $q_r \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, existe, al menos, una cuaterna pitagórica (a, b, c, d) isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.
4. Dada una cuaterna pitagórica ordenada (a, b, c, d):
   a) Si (a, b, c, d) es isósceles de primera especie, entonces, a es par.
   b) Si (a, b, c, d) es isósceles de segunda especie y primitiva, entonces, a es impar y no es múltiplo de 3 ni de 5.

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $(1, 2, 2, 3)$ es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $(n, 2n, 2n.3n)$ también es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie, cuyo inradio es
$$q_r = \frac{n + 2n + 2n - 3n}{2} = n.$$
2. Vamos a distinguir ambos casos:
   a) Para $q_r = 1$, como $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < 2$, entonces, no existe ningún valor par de a en el intervalo $\left(q_r, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)q_r\right) = \left(1, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, por lo que, según el teorema 6, no existe ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.
   b) Para $q_r = 2$, como $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 4$, entonces, no existe ningún valor par de a en el intervalo $\left(q_r, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)q_r\right) = \left(2, 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, por lo que, según el teorema 6, no existe ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.
3. Vamos a distinguir dos casos:
   a) Si q_r es impar, tomando $a = q_r + 1$, se verifica que:
      I) a es par.
      II) $a > q_r$.
      III) $a - q_r = 1 \mid q_r^2$.

   por lo que el teorema 7 garantiza que existe, al menos, una cuaterna pitagórica ordenada (a, b, c, d) con inradio igual a q_r que es isósceles de primera especie.

   b) Si q_r es par, tomando $a = q_r + 2$, se verifica que:
      I) $2(a - q_r) = 4$.
      II) $q_r^2 + (q_r - a)^2 = q_r^2 + 4 \equiv 0 (\text{mód } 4)$.

   por lo que, tomando
$$\delta = 2(a - q_r) = 4 \in \text{Div}(q_r^2 + 4) = \text{Div}\left(q_r^2 + (q_r - a)^2\right),$$
   el teorema 6 garantiza que la cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) = (a_\delta, b_\delta, c_\delta, d_\delta)$ tiene inradio igual a q_r y es isósceles de primera especie.

4. Vamos distinguir los dos casos:

   a) Si (a, b, c, d) es isósceles de primera especie, como $a = b$ y ninguna cuaterna pitagórica puede tener dos catetos impares, entonces, necesariamente ha de ocurrir que a sea par.

   b) Si (a, b, c, d) es isósceles de segunda especie y primitiva:

      i) Como $b = c$ y ninguna cuaterna pitagórica puede tener dos catetos impares, entonces, necesariamente ha de ocurrir que b sea par, por lo que, si a fuese par, esta cuaterna pitagórica no sería primitiva.

      ii) Como $b = c$, si a fuese múltiplo de 3, al ser esta cuaterna pitagórica primitiva, 2 sería resto cuadrático módulo 3, lo cual no es posible.

      iii) Como $b = c$, si a fuese múltiplo de 5, al ser esta cuaterna pitagórica primitiva, 2 ó 3 serían restos cuadráticos módulo 5, lo cual no es posible.

□

5. Relación entre ternas y cuaternas pitagóricas

A continuación se demuestran una serie de resultados que debe cumplir la hipotenusa de una terna pitagórica (conjunto de tres elementos que cumplen el teorema de Pitágoras en en plano).

Lema 1. *Dado $h \in \mathbb{N}$ cuya descomposición en producto de factores primos resulta $h = p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}$, siendo $\beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{N}$, se verifica que h es la hipotenusa de una terna pitagórica si y sólo si existe $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $p_i \equiv 1 (\text{mód } 4)$.*

Demostración. h es la hipotenusa de una terna pitagórica si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$p_1^{2\beta_1} \cdots p_t^{2\beta_t} = h^2 = a^2 + b^2,$$

lo cual es posible si y sólo si alguno de los factores de h^2 es suma de dos cuadrados perfectos, cosa que sucede si y sólo si existe $i \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $p_i \equiv 1 (\text{ mód } 4)$. □

Lema 2. *Dado $h \in \mathbb{N}$ cuya descomposición en producto de factores primos resulta $h = 2^{\beta_0} \cdot p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t} \cdot q_1^{\theta_1} \cdots q_l^{\theta_l}$, siendo $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_t, \theta_1, \ldots, \theta_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y*

$$\begin{cases} \forall\, k = 1, \ldots, t : p_k \equiv 1 (\text{mód } 4), \\ \forall\, j = 1, \ldots, l : q_j \equiv 3 (\text{mód } 4), \end{cases}$$

se verifica que el número de ternas pitagóricas (a, b, c) cuya hipotenusa es igual a h es

$$n^c(h) = \frac{\prod_{k=1}^{t} (2\beta_k + 1) - 1}{2}.$$

Demostración. Como $h^2 = 2^{2\beta_0} \cdot p_1^{2\beta_1} \cdots p_t^{2\beta_t} \cdot q_1^{2\theta_1} \cdots q_l^{2\theta_l}$ y, según el lema 1, para cualquier $k \in \{1, \ldots, t\}$, existen $a_k, b_k \in \mathbb{N}$ tales que

$$p_k^{2\beta_k} = (a_k^2 + b_k^2)^{2\beta_k} = (a_k + ib_k)^{2\beta_k} (a_k - ib_k)^{2\beta_k},$$

entonces, para cada $k \in \{1, \ldots, t\}$, existen $2\beta_k + 1$ descomposiciones de la forma

$$\begin{cases} p_k^{2\beta_k} = \big((a_k + ib_k)^{2\beta_k}(a_k - ib_k)^0\big)\big((a_k + ib_k)^0(a_k - ib_k)^{2\beta_k}\big), \\ p_k^{2\beta_k} = \big((a_k + ib_k)^{2\beta_k - 1}(a_k - ib_k)^1\big)\big((a_k + ib_k)^1(a_k - ib_k)^{2\beta_k - 1}\big), \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ p_k^{2\beta_k} = \big((a_k + ib_k)^{\beta_k}(a_k - ib_k)^{\beta_k}\big)\big((a_k + ib_k)^{\beta_k}(a_k - ib_k)^{\beta_k}\big), \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ p_k^{2\beta_k} = \big((a_k + ib_k)^1(a_k - ib_k)^{2\beta_k - 1}\big)\big((a_k + ib_k)^{2\beta_k - 1}(a_k - ib_k)^1\big), \\ p_k^{2\beta_k} = \big((a_k + ib_k)^0(a_k - ib_k)^{2\beta_k}\big)\big((a_k + ib_k)^{2\beta_k}(a_k - ib_k)^0\big), \end{cases}$$

y, por tanto, el número total de descomposiciones existentes para $p_1^{2\beta_1} \cdots p_t^{2\beta_t}$ es igual a $\prod_{k=1}^t (2\beta_k + 1)$. Además, para ningún $k \in \{1, \ldots, t\}$, la descomposición

$$p_k^{2\beta_k} = \big((a_k + ib_k)^{\beta_k}(a_k - ib_k)^{\beta_k}\big)\big((a_k + ib_k)^{\beta_k}(a_k - ib_k)^{\beta_k}\big)$$

genera una suma de dos cuadrados perfectos, por lo que hay que eliminar la descomposición

$$p_1^{2\beta_1} \cdots p_t^{2\beta_t} = \prod_{k=1}^{t} \big((a_k + ib_k)^{\beta_k}(a_k - ib_k)^{\beta_k}\big)\big((a_k + ib_k)^{\beta_k}(a_k - ib_k)^{\beta_k}\big),$$

siendo el resto de descomposiciones conjugadas dos a dos (por lo que generan la misma suma de dos cuadrados perfectos) y, por tanto, el número de ternas pitagóricas (a, b, c) cuya hipotenusa es igual a h es

$$n^c(h) = \frac{\prod_{k=1}^t (2\beta_k + 1) - 1}{2}.$$

$\square$

TEOREMA 8. *Si (u, v, w) es una terna pitagórica ordenada, entonces, para cualquier $\delta \in \mathrm{Div}(w^2)$ tal que $\delta \leq w$, se verifica que:*

1. $\left(v - u, u + v + \delta, u + v + \frac{w^2}{\delta}, u + v + \delta + \frac{w^2}{\delta}\right)$ *es una cuaterna pitagórica ordenada con inradio igual a v.*
2. $\left(u + v, v - u + \delta, v - u + \frac{w^2}{\delta}, v - u + \delta + \frac{w^2}{\delta}\right)$ *es una cuaterna pitagórica ordenada con inradio igual a v si y sólo si $\delta > 2u$.*

Además, para ambas cuaternas pitagóricas, se verifica que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto mayor es igual a δ.

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $u^2+v^2=w^2$, entonces,

$$(v-u)^2+(u+v+\delta)^2+\big(u+v+\frac{w^2}{\delta}\big)^2-\big(u+v+\delta+\frac{w^2}{\delta}\big)^2=2(u^2+v^2-w^2)=0,$$

por lo que

$$(a,b,c,d)=\left(v-u,u+v+\delta,u+v+\frac{w^2}{\delta},u+v+\delta+\frac{w^2}{\delta}\right)$$

es una cuaterna pitagórica, verificando que $b\le c<d$. Además, como

$$b-a=u+v+\delta-(v-u)=\delta+2u>0,$$

entonces, esta cuaterna pitagórica es ordenada y tiene inradio

$$q_r=\frac{v-u+u+v+\delta+u+v+\frac{w^2}{\delta}-(u+v+\delta+\frac{w^2}{\delta})}{2}=v.$$

2. Como $u^2+v^2=w^2$, entonces,

$$(u+v)^2+(v-u+\delta)^2+\big(v-u+\frac{w^2}{\delta}\big)^2-\big(v-u+\delta+\frac{w^2}{\delta}\big)^2=2(u^2+v^2-w^2)=0,$$

por lo que

$$(a,b,c,d)=\left(u+v,v-u+\delta,v-u+\frac{w^2}{\delta},v-u+\delta+\frac{w^2}{\delta}\right)$$

es una cuaterna pitagórica, verificando que $b\le c<d$. Además, como

$$b-a=v-u+\delta-(u+v)=\delta-2u>0,$$

entonces, esta cuaterna pitagórica, cuyo inradio es

$$q_r=\frac{u+v+v-u+\delta+v-u+\frac{w^2}{\delta}-(v-u+\delta+\frac{w^2}{\delta})}{2}=v,$$

es ordenada si y sólo si $\delta>2u$.

□

Corolario 8.1. *Si (u,v,w) es una terna pitagórica ordenada, se verifica que:*

1. *$(v-u,u+v+w,u+v+w,u+v+2w)$ es una cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio igual a v.*
2. *$(u+v,v-u+w,v-u+w,v-u+2w)$ es una cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio igual a v si y sólo si $\delta>2u$.*

Además, para ambas cuaternas pitagóricas, se verifica que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto mayor es igual a w.

DEMOSTRACIÓN. En ambos casos, basta con tomar $\delta = w$ y aplicar el teorema 8. $\square$

A continuación se expone un par de ejemplos prácticos donde se pone de manifiesto los resultados expuestos en el teorema 8 y el corolario 8.1.

EJEMPLO 4. Considerando la terna pitagórica $(13, 84, 85)$, como

$$\mathrm{Div}_{\leq 85}(85^2) = \{1, 5, 17, 25, 85\}$$

y $25 < 2 \cdot 13 < 85$, el teorema 8 nos asegura que podemos obtener seis cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio $q_r = 84$ a partir de ella, siendo dichas cuaternas pitagóricas

$$\begin{cases} \delta = 1 \Rightarrow (71, 98, 7322, 7323), \\ \delta = 5 \Rightarrow (71, 102, 1542, 1547), \\ \delta = 17 \Rightarrow (71, 114, 522, 539), \\ \delta = 25 \Rightarrow (71, 122, 386, 411), \\ \delta = 85 \Rightarrow \begin{cases} (71, 182, 182, 267), \\ (97, 156, 156, 241), \end{cases} \end{cases}$$

y pudiéndose observar que las dos correspondientes a $\delta = 85 > 2 \cdot 13$ son isósceles de segunda especie, según nos asegura el corolario 8.1.

EJEMPLO 5. Teniendo en cuenta que las ternas pitagóricas cuya hipotenusa es igual a 65 son

$$\left\{(16, 63, 65), (25, 60, 65), (33, 56, 65), (39, 52, 65)\right\},$$

vamos a determinar todas las cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie que se obtienen a partir de ellas:

1. Como $2 \cdot 16 = 32 < 65$, el corolario 8.1 nos asegura que la terna pitagórica $(16, 63, 65)$ nos proporciona dos cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 63$, siendo éstas

$$\left\{(47, 144, 144, 209), (79, 112, 112, 177)\right\}.$$

2. Como $2 \cdot 25 = 50 < 65$, el corolario 8.1 nos asegura que la terna pitagórica $(25, 60, 65)$ nos proporciona dos cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 60$, siendo éstas

$$\left\{(35, 150, 150, 215), (85, 100, 100, 165)\right\}.$$

3. Como $2 \cdot 33 = 66 > 65$, el corolario 8.1 nos asegura que la terna pitagórica $(33, 56, 65)$ nos proporciona una única cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 56$, siendo ésta

$$\left\{(23, 154, 154, 219)\right\}.$$

4. Como $2 \cdot 39 = 78 > 65$, el corolario 8.1 nos asegura que la terna pitagórica $(39, 52, 65)$ nos proporciona una única cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 52$, siendo ésta
$$\left\{(13, 156, 156, 221)\right\}.$$

El siguiente resultado ofrece una acotación para la cantidad de cuaternas pitagóricas ordenadas isósceles de segunda especie que existen para un valor δ especificado previamente que resulta la diferencia entre la hipotenusa y los dos catetos mayores (que son iguales).

Corolario 8.2. *Dado $\delta \in \mathbb{N}$ cuya descomposición en producto de factores primos resulta $\delta = 2^{\beta_0} \prod_{k=1}^{t} p_k^{\beta_k} \prod_{j=1}^{l} q_l^{\theta_l}$, siendo $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_t, \theta_1, \ldots, \theta_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y*
$$\begin{cases} \forall\, k = 1, \ldots, t : p_k \equiv 1 (\text{mód}\, 4), \\ \forall\, j = 1, \ldots, l : q_j \equiv 3 (\text{mód}\, 4), \end{cases}$$
el número $n_{i_2}^{d-c}(\delta)$ de cuaternas pitagóricas ordenadas (a, b, c, d) isósceles de segunda especie tales que $d - c = \delta$ verifica que
$$\frac{\prod_{k=1}^{t}(2\beta_k + 1) - 1}{2} \leq n_{i_2}^{d-c}(\delta) \leq \prod_{k=1}^{t}(2\beta_k + 1) - 1.$$

Demostración. En el corolario 8.1, hemos demostrado que cualquier terna pitagórica ordenada (u, v, w) puede generar una o dos cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie
$$\left\{(v - u, u + v + w, u + v + w, u + v + 2w)\,, \right.$$
$$\left. (u + v, v - u + w, v - u + w, v - u + 2w)\right\},$$
siendo válida la segunda de ellas si y sólo si $w > 2u$ y, en el teorema 6, hemos demostrado que cualquier cuaterna pitagórica ordenada (a, b, c, d) con inradio q_r e isósceles de segunda especie genera una terna pitagórica $(\left|q_r - a\right|, q_r, d - c)$, por lo que el número $n_{i_2}^{d-c}(\delta)$ de cuaternas pitagóricas ordenadas (a, b, c, d) isósceles de segunda especie tales que $d - c = \delta$ estará acotado entre el número $n^c(\delta)$ de ternas pitagóricas con hipotenusa igual a δ y su doble, siendo conocido (véase lema 2, pág. 11) que
$$n^c(\delta) = \frac{\prod_{k=1}^{t}(2\beta_k + 1) - 1}{2}$$
y, por tanto,
$$\frac{\prod_{k=1}^{t}(2\beta_k + 1) - 1}{2} \leq n_{i_2}^{d-c}(\delta) \leq \prod_{k=1}^{t}(2\beta_k + 1) - 1.$$
□

El siguiente teorema nos ofrece una serie de resultados muy interesantes sobre el número de cuaternas pitagóricas isósceles.

TEOREMA 9.

1. *Para cualquier cuaterna pitagórica isósceles, el cateto repetido es par.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen exactamente n cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a 2^n. Además, todas ellas menos una son de primera especie, siendo la otra de segunda especie.*
3. *Si $m = 2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdots p_t^{\theta_t}$, con $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_t \in \mathbb{N}$, es la descomposición en factores primos de $m \in \mathbb{N}$, entonces, existen exactamente $\theta_0 \prod_{k=1}^{t}(2\theta_k + 1)$ cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a m. Además, el número de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie cuyo cateto repetido es igual a m es*

$$\operatorname{card}\left(\left\{(j_0, j_1, \ldots, j_t) \in \{1, \ldots, \theta_0\} \times \prod_{k=1}^{t} \{0, 1, \ldots, 2\theta_k\} :\right.\right.$$
$$\left.\left. : \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 2^{\theta_0 - j_0} p_1^{\theta_1 - j_1} \cdots p_t^{\theta_t - j_t} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\right),$$

DEMOSTRACIÓN.

1. Según el primer apartado de las propiedades 1, al menos dos de los catetos de cualquier cuaterna pitagórica son pares, por lo que, necesariamente, el cateto repetido en cualquier cuaterna pitagórica isósceles ha de ser par.
2. Dado $n \in \mathbb{N}$, si $(2^n, 2^n, c, d)$ es una cuaterna pitagórica isósceles (no necesariamente ordenada), entonces,

$$2^{2n+1} = 2(2^n)^2 = d^2 - c^2 = (d-c)(d+c),$$

por lo que $(d-c, d+c)$ es un par de divisores gemelos de 2^{2n+1}, cuyos divisores son

$$\operatorname{Div}(2^{2n+1}) = \left\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, 2^{n+1}, \ldots, 2^{2n-1}, 2^{2n}, 2^{2n+1}\right\}.$$

Además, como los números naturales $d-c$ y $d+c$ tienen la misma paridad y $d-c < d+c$, entonces, los únicos valores que puede tomar $d-c$ son

$$d - c \in \left\{2, 2^2, \ldots, 2^n\right\},$$

y, por tanto, existen exactamente n cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a 2^n, siendo éstas

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\} : \left(2^n, 2^n, 2^{2n-k} - 2^{k-1}, 2^{2n-k} + 2^{k-1}\right).$$

Finalmente, una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si

$$2^n > 2^{2n-k} - 2^{k-1},$$

es decir, si y sólo si

$$2^{n-k+1} > 2^{2n-2k+1} - 1 = \frac{2^{2(n-k+1)}}{2} - 1,$$

y, como la función cuadrática $f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1$ es negativa en el intervalo $\left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$, al ser $2^{n-k+1} > 0$, resulta que una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si

$$0 < 2^{n-k+1} < 1 + \sqrt{3},$$

lo cual sólo es posible para $k = n$ y, por tanto, únicamente una de estas n cuaternas pitagóricas isósceles es de segunda especie, $\left(2^n - 2^{n-1}, 2^n, 2^n, 2^n + 2^{n-1}\right)$.

3. Si $m = 2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdots p_t^{\theta_t}$, con $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_t \in \mathbb{N}$, es la descomposición en factores primos de $m \in \mathbb{N}$ y (m, m, c, d) es una cuaterna pitagórica isósceles (no necesariamente ordenada), entonces,

$$2^{2\theta_0+1} p_1^{2\theta_1} \cdots p_t^{2\theta_t} = 2m^2 = d^2 - c^2 = (d-c)(d+c),$$

por lo que $(d-c, d+c)$ es un par de divisores gemelos de $2^{2\theta_0+1} \cdot p_1^{2\theta_1} \cdots p_t^{2\theta_t}$. Además, como los números naturales $d-c$ y $d+c$ tienen la misma paridad, los únicos valores que pueden tomar son

$$(d-c, d+c) = \begin{cases} \left(2^{j_0} p_1^{j_1} \cdots p_t^{j_t}, 2^{2\theta_0+1-j_0} p_1^{2\theta_1-j_1} \cdots p_t^{2\theta_t-j_t}\right), \\ \text{o} \\ \left(2^{2\theta_0+1-j_0} p_1^{2\theta_1-j_1} \cdots p_t^{2\theta_t-j_t}, 2^{j_0} p_1^{j_1} \cdots p_t^{j_t}\right), \end{cases}$$

siendo $j_0 \in \{1, \ldots, \theta_0\}$ y, para cada $k \in \{1, \ldots, t\}$, $j_k \in \{0, 1, \ldots, 2\theta_k\}$ y, por tanto, existen exactamente $\theta_0 \prod_{k=1}^{t} (2\theta_k + 1)$ cuaternas pitagóricas (a, b, c, d) isósceles tales que su cateto repetido es igual a m, siendo éstas

$$\begin{cases} a = 2^{\theta_0} p_1^{\theta_1} \cdots p_t^{\theta_t}, \\ b = 2^{\theta_0} p_1^{\theta_1} \cdots p_t^{\theta_t}, \\ c = \left| 2^{2\theta_0-j_0} p_1^{2\theta_1-j_1} \cdots p_t^{2\theta_t-j_t} - 2^{j_0-1} p_1^{j_1} \cdots p_t^{j_t} \right|, \\ d = 2^{2\theta_0-j_0} p_1^{2\theta_1-j_1} \cdots p_t^{2\theta_t-j_t} + 2^{j_0-1} p_1^{j_1} \cdots p_t^{j_t}. \end{cases}$$

Finalmente, una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si

$$2^{\theta_0} p_1^{\theta_1} \cdots p_t^{\theta_t} > \left| 2^{2\theta_0-j_0} p_1^{2\theta_1-j_1} \cdots p_t^{2\theta_t-j_t} - 2^{j_0-1} p_1^{j_1} \cdots p_t^{j_t} \right|,$$

es decir, si y sólo si

$$\begin{aligned} 1 &> \left| 2^{\theta_0-j_0} p_1^{\theta_1-j_1} \cdots p_t^{\theta_t-j_t} - 2^{j_0-\theta_0-1} p_1^{j_1-\theta_1} \cdots p_t^{j_t-\theta_t} \right|, \\ &= 2^{\theta_0-j_0} p_1^{\theta_1-j_1} \cdots p_t^{\theta_t-j_t} - \frac{1}{2\left(2^{\theta_0-j_0} p_1^{\theta_1-j_1} \cdots p_t^{\theta_t-j_t}\right)}, \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si

$$-1 < 2^{\theta_0 - j_0} p_1^{\theta_1 - j_1} \cdots p_t^{\theta_t - j_t} - \frac{1}{2\left(2^{\theta_0 - j_0} p_1^{\theta_1 - j_1} \cdots p_t^{\theta_t - j_t}\right)} < 1,$$

y, como

$$-1 < x - \frac{1}{2x} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} < x < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \text{o} \\ \dfrac{-\sqrt{3}-1}{2} < x < \dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}, \end{cases}$$

al ser $2^{\theta_0 - j_0} \cdot p_1^{\theta_1 - j_1} \cdots p_t^{\theta_t - j_t} > 0$, resulta que una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < 2^{\theta_0 - j_0} p_1^{\theta_1 - j_1} \cdots p_t^{\theta_t - j_t} < \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

y, por tanto, el número de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie cuyo cateto repetido es igual a m es

$$\operatorname{card}\left(\left\{(j_0, j_1, \ldots, j_t) \in \{1, \ldots, \theta_0\} \times \prod_{k=1}^{t} \{0, 1, \ldots, 2\theta_k\} : \right.\right.$$
$$\left.\left. : \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 2^{\theta_0 - j_0} p_1^{\theta_1 - j_1} \cdots p_t^{\theta_t - j_t} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\right).$$

$\square$

A continuación vamos a ilustrar los resultados obtenidos en el teorema 9 en un ejemplo práctico.

EJEMPLO 6.

1. Para $m = 32 = 2^5$, según dicho teorema, existen exactamente cinco cuaternas pitagóricas isósceles cuyo cateto repetido es igual a 32, una de las cuales es de segunda especie, siendo éstas

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow (2^5, 2^5, 2^{10-1} - 2^{1-1}, 2^{10-1} + 2^{1-1}) = (32, 32, 511, 513), \\ k = 2 \Rightarrow (2^5, 2^5, 2^{10-2} - 2^{2-1}, 2^{10-2} + 2^{2-1}) = (32, 32, 254, 258), \\ k = 3 \Rightarrow (2^5, 2^5, 2^{10-3} - 2^{3-1}, 2^{10-3} + 2^{3-1}) = (32, 32, 124, 132), \\ k = 4 \Rightarrow (2^5, 2^5, 2^{10-4} - 2^{4-1}, 2^{10-4} + 2^{4-1}) = (32, 32, 56, 72), \\ k = 5 \Rightarrow (2^{10-5} - 2^{5-1}, 2^5, 2^5, 2^{10-5} + 2^{5-1}) = (16, 32, 32, 48). \end{cases}$$

2. Para $m = 18 = 2 \cdot 3^2$, según dicho teorema, existen exactamente $1(2 \cdot 2 + 1) = 5$ cuaternas pitagóricas isósceles cuyo cateto repetido es igual a 18. Además, considerando la función $g : \{1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{Q}$ definida por

$$g(j_0, j_1) = 2^{1-j_0} \cdot 3^{2-j_1},$$

como

$$\begin{cases} g(1,0) = 9 \notin \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \\ g(1,1) = 3 \notin \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \\ g(1,2) = 1 \in \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \\ g(1,3) = \dfrac{1}{3} \notin \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \\ g(1,4) = \dfrac{1}{9} \notin \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \end{cases}$$

entonces,

$$\operatorname{card}\left(\left\{(j_0, j_1) \in \{1\} \times \{0,1,2,3,4\} : \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 2^{1-j_0} \cdot 3^{2-j_1} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}\right) = 1,$$

y, por tanto, únicamente una de estas cinco cuaternas pitagóricas isósceles es de segunda especie

$$\begin{cases} (j_0, j_1) = (1,0) \Rightarrow (18, 18, 161, 163), \\ (j_0, j_1) = (1,1) \Rightarrow (18, 18, 51, 57), \\ (j_0, j_1) = (1,2) \Rightarrow (9, 18, 18, 27), \\ (j_0, j_1) = (1,3) \Rightarrow (18, 18, 21, 33), \\ (j_0, j_1) = (1,4) \Rightarrow (18, 18, 79, 83). \end{cases}$$

A continuación se exponen resultados sobre cuaternas pitgóricas denominadas ligadas.

Definición 5. Una cuaterna pitagórica (a, b, c, d) con $a < \min\{b, c\}$ se dice que es *ligada* si $d = a + b$ ó $d = a + c$. Además, se dice que:

1. Es ligada de *primera especie* cuando es ordenada y $d = a + b$.
2. Es ligada de *segunda especie* cuando es ordenada y $d = a + c$.

Nótese que no existe ninguna cuaterna pitagórica ordenada (a, b, c, d) tal que $d = b + c$, ya que, si así fuese, ocurriría que $a^2 = 2bc$, lo cual es imposible, pues $a^2 \leq bc < 2bc$.

Teorema 10. *Si (a, b, c, d) es una cuaterna pitagórica (no necesariamente ordenada) con inradio $q_r \in \mathbb{N}$ y tal que $d = a + c$, se verifica que:*

1. $b = 2q_r$.

2. $ac = 2q_r^2$ (es decir, a y c son dos divisores gemelos de $2q_r^2$).

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $d = a + c$, resulta que
$$2q_r = a + b + c - d = b.$$

2. Como $0 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a + c)^2 = b^2 - 2ac \Rightarrow b^2 = 2ac$, entonces, según el apartado anterior,
$$2q_r^2 = \frac{b^2}{2} = ac.$$

□

TEOREMA 11. *Para cada $k \in \mathbb{N}$, el número de cuaternas pitagóricas ligadas con inradio igual a k es*
$$n_l^{q_r}(k) = \frac{\operatorname{div}(2k^2)}{2} = \operatorname{card}\left(\left\{\gamma \in \operatorname{Div}(2k^2)\,:\, 1 \leq \gamma < \sqrt{2}k\right\}\right),$$
y, además, se verifica que
$$\begin{cases} n_{l_1}^{q_r}(k) = \operatorname{card}\left(\left\{\gamma \in \operatorname{Div}(2k^2)\,:\, k \leq \gamma < \sqrt{2}k\right\}\right) = \operatorname{div}_{[k,\sqrt{2}k)}(2k^2), \\ n_{l_2}^{q_r}(k) = \operatorname{card}\left(\left\{\gamma \in \operatorname{Div}(2k^2)\,:\, 1 \leq \gamma \leq k\right\}\right) = \operatorname{div}_{\leq k}(2k^2). \end{cases}$$
(debemos tener en cuenta que la cuaterna pitagórica correspondiente al par de divisores gemelos $(k, 2k)$ es isósceles de segunda especie, por lo que será ligada de primera especie y ligada de segunda especie, de ahí que $\gamma = k$ aparezca en los dos conjuntos).

DEMOSTRACIÓN. El teorema 10 nos asegura que, para cada $k \in \mathbb{N}$, las únicas cuaternas pitagóricas con inradio igual a k y tales que $d = a + c$ son
$$(a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma) = \left(\gamma, 2k, \frac{2k^2}{\gamma}, \gamma + \frac{2k^2}{\gamma}\right) = (\gamma, 2k, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}),$$
siendo $\gamma \in \operatorname{Div}(2k^2)$. Además, como, para cada $\gamma \in \operatorname{Div}(2k^2)$, se verifica que
$$(a_{\overline{\gamma}}, b_{\overline{\gamma}}, c_{\overline{\gamma}}, d_{\overline{\gamma}}) = (\overline{\gamma}, 2k, \gamma, \gamma + \overline{\gamma}) = (c_\gamma, b_\gamma, a_\gamma, d_\gamma),$$
entonces, cada par de catetos menor y mayor se repite (salvo el orden de éstos) exactamente dos veces y, por tanto, el número de cuaternas pitagóricas ligadas distintas (salvo el orden de los catetos menor y mayor) tales que su inradio es igual a k viene dado por
$$n_l^{q_r}(k) = \frac{\operatorname{div}(2k^2)}{2} = \operatorname{card}\left(\left\{\gamma \in \operatorname{Div}(2k^2)\,:\, 1 \leq \gamma < \sqrt{2}k\right\}\right).$$

Además, se puede conseguir que estas cuaternas pitagóricas ligadas estén ordenadas, ya que, para cualquier $\gamma \in \mathrm{Div}(2k^2)$ tal que $\gamma < \sqrt{2}k$, se verifica que

$$a_\gamma = \gamma < \sqrt{2}k < 2k = b_\gamma$$

y que

$$2k = b_\gamma \leq c_\gamma = \frac{2k^2}{\gamma} \iff \gamma \leq k,$$

por lo que

$$\begin{cases} n_{l_1}^{q_r}(k) = \mathrm{card}\left(\left\{\gamma \in \mathrm{Div}(2k^2) \,:\, k \leq \gamma < \sqrt{2}k\right\}\right), \\ n_{l_2}^{q_r}(k) = \mathrm{card}\left(\left\{\gamma \in \mathrm{Div}(2k^2) \,:\, 1 \leq \gamma \leq k\right\}\right). \end{cases}$$

□

El siguiente ejemplo práctico pone de manifiesto los resultados obtenidos en el teorema 11.

Ejemplo 7. Para $k = 6$, como $2k^2 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ y

$$\mathrm{Div}(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

según el teorema 11,

$$n_l^{q_r}(6) = \frac{\mathrm{div}(72)}{2} = \frac{(3+1)(2+1)}{2} = 6,$$

siendo

$$\begin{cases} n_{l_1}^{q_r}(6) = \mathrm{div}_{[6,6\sqrt{2})}(72) = \mathrm{card}\left(\{6, 8\}\right) = 2, \\ n_{l_2}^{q_r}(6) = \mathrm{div}_{\leq 6}(72) = \mathrm{card}\left(\{1, 2, 3, 4, 6\}\right) = 5, \end{cases}$$

y las cuaternas pitagóricas ligadas correspondientes

$$\begin{cases} (1, 12, 72, 73) & \text{segunda especie}, \\ (2, 12, 36, 38) & \text{segunda especie}, \\ (3, 12, 24, 27) & \text{segunda especie}, \\ (4, 12, 18, 22) & \text{segunda especie}, \\ (6, 12, 12, 18) & \text{primera y segunda especie}, \\ (8, 9, 12, 17) & \text{primera especie}. \end{cases}$$

Veremos a continuación resultados relacionados con las denominadas cuaternas pitagóricas de sumas simétricas.

Definición 6. Una cuaterna pitagórica ordenada (a, b, c, d) se dice que es de *sumas simétricas* si $a + d = b + c$.

Teorema 12. *Si (a, b, c, d) es una cuaterna pitagórica de sumas simétricas con inradio $q_r \in \mathbb{N}$, se verifica que:*

1. $q_r = a$.

2. $a^2 = (b-a)(c-a)$, *es decir,* $(b-a, c-a)$ *es un par de divisores gemelos de* a^2.

DEMOSTRACIÓN.

1. $q_r = \dfrac{a+b+c-d}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.
2. Teniendo en cuenta el teorema 2, que $a+d = b+c$ y que, según el primer apartado, $q_r = a$, resulta que

$$a^2 = q_r^2 + (q_r - a)^2 = (d-c)(d-b) = (b-a)(c-a).$$

□

TEOREMA 13. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, *el número de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas con inradio igual a* k *es*

$$n_{ss}^{q_r}(k) = \operatorname{card}\left(\left\{\gamma \in \operatorname{Div}(k^2) : \gamma \leq k\right\}\right) = \frac{\operatorname{div}(k^2)+1}{2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $k \in \mathbb{N}$, según el teorema 12, las únicas cuaternas pitagóricas de sumas simétricas con inradio igual a k son las de la forma

$$(a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma) = (k, k+\gamma, k+\overline{\gamma}, k+\gamma+\overline{\gamma}),$$

siendo $(\gamma, \overline{\gamma})$ un par de divisores gemelos de k^2. Además, como, para cada par $(\gamma, \overline{\gamma})$ de divisores gemelos de k^2, se verifica que

$$(a_{\overline{\gamma}}, b_{\overline{\gamma}}, c_{\overline{\gamma}}, d_{\overline{\gamma}}) = (k, k+\overline{\gamma}, k+\gamma, k+\gamma+\overline{\gamma}) = (a_\gamma, c_\gamma, b_\gamma, d_\gamma),$$

entonces, cada par de catetos mayores se repite (salvo el orden de éstos) exactamente dos veces y, por tanto, el número de cuaternas pitagóricas (a, b, c, d) de sumas simétricas distintas (salvo el orden de los catetos mayores) tales que su inradio es igual a k viene dado por

$$n_{ss}^{q_r}(k) = \operatorname{card}\left(\left\{\gamma \in \operatorname{Div}(k^2) : \gamma \leq k\right\}\right) = \frac{\operatorname{div}(k^2)+1}{2},$$

ya que

$$\forall\, \gamma \in \operatorname{Div}(k^2) \,:\, \gamma \leq k : \begin{cases} a_\gamma = k < k+\gamma = b_\gamma, \\ c_\gamma = k+\overline{\gamma} < k+\gamma+\overline{\gamma} = d_\gamma \end{cases}$$

y

$$k+\gamma = b_\gamma \leq c_\gamma = k+\overline{\gamma} = k + \frac{k^2}{\gamma} \iff \gamma \leq \frac{k^2}{\gamma} \iff \gamma^2 \leq k^2 \iff \gamma \leq k.$$

□

El siguiente ejemplo práctico clarifica los resultados obtenidos anteriormente en el teorema 13.

Ejemplo 8. Para $k = 6$, como $k^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ y

$$\mathrm{Div}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\},$$

entonces,

$$n_{ss}^{q_r}(6) = \frac{\mathrm{div}(36) + 1}{2} = \frac{(2+1)(2+1)+1}{2} = 5,$$

siendo

$$\mathrm{Div}_{\leq 6}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6\},$$

y las cuaternas pitagóricas de sumas simétricas correspondientes

$$\begin{cases} \gamma = 1 & (6, 7, 42, 43), \\ \gamma = 2 & (6, 8, 24, 26), \\ \gamma = 3 & (6, 9, 18, 21), \\ \gamma = 4 & (6, 10, 15, 19), \\ \gamma = 6 & (6, 12, 12, 18). \end{cases}$$

El siguiente teorema muestra un resultado que relaciona las cuaternas pitagóricas ligadas y de sumas simétricas.

Teorema 14. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:*

1. *Existe una única cuaterna pitagórica (a, b, c, d) con inradio $q_r = n$ que es ligada y de sumas simétricas.*
2. *Existen exactamente n cuaternas pitagóricas $\big\{(a_i, b_i, c_i, d_i) \in \mathcal{C} : i \in \{1, \dots, n\}\big\}$ con inradio $q_r = n$ de forma que*

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\} : d_i = c_i + 1,$$

siendo todas ellas primitivas (ya que cualesquiera dos números naturales consecutivos siempre son primos entre sí). Además:

a) Únicamente una de estas n cuaternas pitagóricas es de sumas simétricas.

b) Si $n = 1$, la cuaterna pitagórica correspondiente, $(1, 2, 2, 3)$, es ligada (tanto de primera como de segunda especie) y, si $n \geq 2$, entonces, ninguna de estas n cuaternas pitagóricas es ligada de primera especie y exactamente una de ellas es ligada de segunda especie.

Demostración.

1. La existencia está clara, ya que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la cuaterna pitagórica $(n, 2n, 2n, 3n)$ tiene inradio $q_r = n$, es ligada y de sumas simétricas. Además, si (a, b, c, d) es una cuaterna pitagórica de sumas simétricas y ligada de primera especie (si fuese ligada de segunda especie se razonaría de forma totalmente análoga), entonces,

$$\begin{cases} d = b + c - a \\ d = a + b \end{cases} \Rightarrow c = 2a,$$

por lo que, al ser $a^2+b^2+c^2-d^2=0$ y $a\neq 0$, se verifica que

$$0=a^2+b^2+(2a)^2-(a+b)^2=4a^2-2ab=2a(2a-b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow b=2a\Rightarrow d=a+2a=3a,$$

luego

$$n=q_r=\frac{a+2a+2a-3a}{2}=a,$$

y, por tanto, $(a,b,c,d)=(n,2n,2n,3n)$.

2. Si (a,b,c,d) es una cuaterna pitagórica con inradio $q_r=n$ y tal que $d=c+1$, entonces,

$$\begin{cases} 0=a^2+b^2+c^2-(c+1)^2=a^2+b^2-2c-1\Rightarrow c=\dfrac{a^2+b^2-1}{2}, \\ n=q_r=\dfrac{a+b+c-(c+1)}{2}=\dfrac{a+b-1}{2}, \end{cases}$$

por lo que a y b han de tener distinta paridad, es decir, existe un número k impar tal que $b=a+k$, y, por tanto,

$$n=\frac{a+a+k-1}{2}=\frac{2a+k-1}{2}\Rightarrow k=2(n-a)+1,$$

lo cual implica que $a\in\{1,\dots,n\}$. Finalmente, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, la cuaterna pitagórica correspondiente es

$$\begin{aligned}(a_i,b_i,c_i,d_i)&=\left(i,i+k_i,\frac{i^2+(i+k_i)^2-1}{2},\frac{i^2+(i+k_i)^2+1}{2}\right)\\ &=\left(i,2n+1-i,\frac{i^2+(2n+1-i)^2-1}{2},\frac{i^2+(2n+1-i)^2+1}{2}\right),\end{aligned}$$

Además:

a) Si una de estas cuaternas pitagóricas es de sumas simétricas, entonces,

$$\begin{aligned}0&=i+\frac{i^2+(2n+1-i)^2+1}{2}-\left(2n+1-i+\frac{i^2+(2n+1-i)^2-1}{2}\right)\\ &=2(i-n),\end{aligned}$$

por lo que $i=n$ y, por tanto, la única de estas cuaternas pitagóricas que es de sumas simétricas es

$$(a_n,b_n,c_n,d_n)=(n,n+1,n^2+n,n^2+n+1).$$

b) Vamos a distinguir los dos casos:

I) Si $n=1$, entonces, $i=1$, siendo $k_i=2(1-1)+1=1$ y, por tanto, la cuaterna pitagórica correspondiente es $(1,2,2,3)$, que es ligada (tanto de primera como de segunda especie).

II) Si $n \geq 2$ y una de estas cuaternas pitagóricas es ligada, puede ocurrir que:

a') Sea de primera especie, en cuyo caso,

$$0 = \frac{i^2 + (i + k_i)^2 + 1}{2} - (i + i + k_i) = i^2 + (k_i - 2)i + \frac{(k_i - 1)^2}{2},$$

por lo que

$$i = \frac{2 - k_i \pm \sqrt{2 - k_i^2}}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow k_i = 1,$$

y, como, según hemos probado anteriormente,

$$n = i = \frac{2 - 1 \pm 1}{2} = \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{imposible}, \\ \qquad \text{o} \\ 1 \Rightarrow \text{imposible}, \end{cases}$$

entonces, ninguna de estas n cuaternas pitagóricas es ligada de primera especie.

b') Sea de segunda especie, en cuyo caso,

$$0 = \frac{i^2 + (i + k_i)^2 + 1}{2} - \left(i + \frac{i^2 + (i + k_i)^2 - 1}{2}\right) = 1 - i \Rightarrow i = 1,$$

por lo que

$$k_1 = 2(n - 1) + 1 = 2n - 1,$$

y, por tanto, la única de estas cuaternas pitagóricas que es ligada de segunda especie es

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 2n, 2n^2, 2n^2 + 1).$$

□

6. Conclusiones

En el presente trabajo hemos obtenido algunos resultados característicos sobre cuaternas pitagóricas (isósceles, ligadas y de sumas simétricas). Fruto de este estudio, surgió la sucesión, cuyos primeros términos son $1, 3, 6, 10, 9, 19, 16, 25, 29, 27, \ldots$ e indican el número de cuaternas pitagóricas existentes con inradio igual a cada uno de los correspondientes números naturales. Esta sucesión corresponde a la sucesión `https://oeis.org/A360946` que aparece en la OEIS, introducida el día 26 de febrero de 2023 por los autores de este artículo.

REFERENCIAS

[1] L. E. DICKSON, Lowest integers representing sides of a right triangle, *Amer. Math. Monthly* **1** (1894), 6–11.

[2] E. J. ECKERT, The group of primitive Pythagorean triangles, *Math. Magazine* **57** (1984), 22–27.

[3] A. FÄSSLER, Multiple Pythagorean number triples, *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 505–517.

[4] T. NAGELL, *Introduction to Number Theory*, John Wiley & Sons, 1951.

[5] J. P. ROBERTSON, Magic squares of squares, *Math. Magazine* **69** (1996), 289–293.

[6] J. M. RODRÍGUEZ CABALLERO, A characterization of the hypotenuses of primitive Pythagorean triangles using partitions into consecutive parts, *Amer. Math. Monthly* **126** (2019), 74–77.

[7] W. SIERPIŃSKI, *Pythagorean Triangles*, Scripta Mathematica Studies, No. 9, Dover Publications, 1962.

[8] R. TAKLOO-BIGHASH, *A Pythagorean Introduction to Number Theory. Right Triangles, Sums of Squares, and Arithmetic*, Springer, 2018.

[9] M. G. TEIGEN Y D. W. HADWIN, On generating Pythagorean triples, *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), 378–279.

JOSÉ MANUEL SÁNCHEZ MUÑOZ, GIE «PENSAMIENTO MATEMÁTICO», UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
Correo electrónico: `jmanuel.sanchez@gmx.es`

MIGUEL ÁNGEL PÉREZ GARCÍA-ORTEGA, IES «BARTOLOMÉ JOSÉ GALLARDO», CAMPANARIO, BADAJOZ
Correo electrónico: `mianpgo@gmail.com`

JOSÉ MIGUEL BLANCO CASADO, IES «PUERTA DE LA SERENA», VILLANUEVA DE LA SERENA, BADAJOZ
Correo electrónico: `josiguelblanco@yahoo.es`