CAPÍTULO 10.- CUATERNAS PITAGÓRICAS.

Definición 10.1. Se llama cuaterna pitagórica a un elemento $(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4$ tal que $a^2+b^2+c^2=d^2$. En lo sucesivo (por similitud con las ternas pitagóricas), dada una cuaterna pitagórica (a,b,c,d), a, b y c se denominarán catetos y d hipotenusa y denotaremos por $©=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 : a^2+b^2+c^2=d^2\}$ al conjunto formado por todas las cuaternas pitagóricas.

Definición 10.2. Dada una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d)\in ©$, se dice que es primitiva cuando $mcd(a,b,c,d)=1$ y se dice que está ordenada cuando $a\le b\le c<d$.

Propiedades 10.1. Si $(a,b,c,d)\in ©$ es una cuaterna pitagórica, se verifica que:

① Al menos dos de sus catetos son pares.

② $d>\max\{a,b,c\}$

③ Para cualquier $k\in\mathbb{N}$, (ka,kb,kc,kd) también es una cuaterna pitagórica.

Demostración:

① Esto se debe a que:

☺ Si los tres catetos fuesen impares, entonces, 3 sería un resto cuadrático módulo 4, lo cual no es posible.

☹ Si un cateto fuese par y los otros dos catetos fuesen impares, entonces, 2 sería un resto cuadrático módulo 4, lo cual no es posible.

② Si alguno de los catetos fuese mayor o igual que la hipotenusa, entonces, su cuadrado sería mayor o igual que el cuadrado de ésta, por lo que la suma de los cuadrados de los otros dos catetos habría de ser menor o igual que 0, lo cual no es posible.

③ Para cualquier $k\in\mathbb{N}$, como:

$$(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2=k^2(a^2+b^2+c^2)=k^2d^2=(kd)^2$$

entonces, (ka,kb,kc,kd) también es una cuaterna pitagórica.

Definición 10.3. Dada una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d)\in ©$, se definen:

☺ Su “inradio” como:

$$q_r=\frac{a+b+c-d}{2}$$

😐 Sus “exinradios” como:

$$\begin{cases} q_a=\dfrac{-a+b+c+d}{2} \\ q_b=\dfrac{a-b+c+d}{2} \\ q_c=\dfrac{a+b-c+d}{2} \end{cases}$$

☺ Su "semiperímetro" como:

$$q_s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Lema 10.1. Para cualquier cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in$ ©, se verifica que:

$$\begin{cases} a+b+c-d > 0 \\ a+b+d-c > 0 \\ a+c+d-b > 0 \\ b+c+d-a > 0 \end{cases}$$

Demostración:

Vamos a probar únicamente las dos primeras desigualdades, ya que las dos últimas se probarían de forma totalmente análoga a la segunda, sin más que intercambiar los papeles de a, b y c:

① Como $a+b+c+d > 0$ y:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)(a+b+c-d) &= (a+b+c)^2 - d^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)-d^2 \\ &= 2(ab+ac+bc) \\ &> 0\end{aligned}$$

entonces, $a+b+c-d > 0.$

② Como $a+b+c+d > 0$ y:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)(a+b+d-c) &= (a+b+d)^2 - c^2 \\ &= a^2+b^2+d^2+2(ab+ad+bd)-c^2 \\ &= 2(a^2+b^2+ab+ad+bd) \\ &> 0\end{aligned}$$

entonces, $a+b+d-c > 0.$

Teorema 10.1.

① Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe, al menos, una cuaterna pitagórica con inradio $q_r = n.$

② El inradio q_r, los exinradios q_a, q_b y q_c y el semiperímetro q_s de cualquier cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in$ © son números naturales.

Solución:

① Como (1,2,2,3) es una cuaterna pitagórica, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $(n,2n,2n,3n)$ también es una cuaterna pitagórica, cuyo inradio es:

$$q_r = \frac{n+2n+2n-3n}{2} = n$$

② Como al menos dos de los catetos de la cuaterna pitagórica (a,b,c,d) son pares, entonces, la hipotenusa tiene la misma paridad que el otro cateto, por lo que $a+b+c-d,\ -a+b+c+d,\ a-b+c+d,\ a+b-c+d$ y $a+b+c+d$ son números enteros pares y positivos (según nos asegura el Lema 10.1.). Por tanto:

$$\begin{cases} q_r = \dfrac{a+b+c-d}{2} \in \mathbb{N} \\ q_a = \dfrac{-a+b+c+d}{2} \in \mathbb{N} \\ q_b = \dfrac{a-b+c+d}{2} \in \mathbb{N} \\ q_c = \dfrac{a+b-c+d}{2} \in \mathbb{N} \\ q_s = \dfrac{a+b+c+d}{2} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Teorema 10.2. Dada una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio q_r, exinradios q_a, q_b y q_c y semiperímetro q_s, se verifica que:

① $ab+ac+bc = 2q_rq_s$

② $q_aq_b + q_aq_c + q_bq_c = q_s^2$

③ $2[q_a(q_b-q_r)+q_b(q_c-q_r)+q_c(q_a-q_r)] = q_a^2+q_b^2+q_c^2+q_r^2 = 2d^2$

④ $ab+ac+ad+bc+bd+cd = q_rq_a+q_rq_b+q_rq_c+q_aq_b+q_aq_c+q_bq_c$

Demostración:

① Como:

$$\begin{aligned} 2q_r^2 &= 2\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac-ad+bc-bd-cd)}{2} \\ &= \frac{2d^2+2(ab+ac-ad+bc-bd-cd)}{2} \\ &= d^2+ab+ac+bc-(a+b+c)d \\ &= d^2+ab+ac+bc-(2q_r+d)d \\ &= ab+ac+bc-2q_rd \end{aligned}$$

entonces:

$$ab+ac+bc = 2q_r^2+2q_rd = 2q_r(q_r+d) = 2q_r\left(\frac{a+b+c-d}{2}+d\right) = 2q_r\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right) = 2q_rq_s$$

② Como:

$$\begin{aligned} q_a q_b &= \left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right) \\ &= \frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4} \\ &= \frac{c^2+d^2+2cd-a^2-b^2+2ab}{4} \\ &= \frac{2c^2+2cd+2ab}{4} \\ &= \frac{c^2+cd+ab}{2} \end{aligned}$$

y, de igual forma:

$$\begin{cases} q_a q_c = \dfrac{b^2+bd+ac}{2} \\ q_b q_c = \dfrac{a^2+ad+bc}{2} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned} q_a q_b + q_a q_c + q_b q_c &= \frac{c^2+cd+ab}{2} + \frac{b^2+bd+ac}{2} + \frac{a^2+ad+bc}{2} \\ &= \frac{d^2+d(a+b+c)+ab+ac+bc}{2} \\ &= \frac{d(a+b+c+d)+2q_r q_s}{2} \text{ (primer apartado)} \\ &= dq_s + q_r q_s \\ &= q_s(d+q_r) \\ &= q_s\left(d+\frac{a+b+c-d}{2}\right) \\ &= q_s\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right) \\ &= q_s^2 \end{aligned}$$

③ Vamos a probar cada una de las dos igualdades por separado:

❶ Como:

$$\begin{aligned} 2q_s &= q_r + q_a + q_b + q_c \\ 4q_s^2 &= q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2+2(q_r q_a + q_r q_b + q_r q_c + q_a q_b + q_a q_c + q_b q_c) \\ 4q_s^2 &= q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2+2(q_r q_a + q_r q_b + q_r q_c + q_s^2) \text{ (segundo apartado)} \\ 2q_s^2 &= q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2+2(q_r q_a + q_r q_b + q_r q_c) \\ 2(q_a q_b + q_a q_c + q_b q_c) &= q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2+2(q_r q_a + q_r q_b + q_r q_c) \text{ (segundo apartado)} \end{aligned}$$

entonces:

$$2[q_a(q_b-q_r)+q_b(q_c-q_r)+q_c(q_a-q_r)] = q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2$$

❷ Utilizando las distintas definiciones y operando, resulta que:

$$\begin{aligned}
q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2 &= \left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2+\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)^2\\
&= \frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2)}{4}\\
&= a^2+b^2+c^2+d^2\\
&= 2d^2
\end{aligned}$$

④ Como:

$$\begin{cases}
q_rq_a=\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)=\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{4}=\frac{-a^2+b^2+c^2-d^2}{4}+\frac{bc+ad}{2}\\
q_rq_b=\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)=\frac{(a+c)^2-(b-d)^2}{4}=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}+\frac{ac+bd}{2}\\
q_rq_c=\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)=\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4}=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{4}+\frac{ab+cd}{2}\\
q_aq_b=\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)=\frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4}=\frac{-a^2-b^2+c^2+d^2}{4}+\frac{cd+ab}{2}\\
q_aq_c=\left(\frac{-a+b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)=\frac{(b+d)^2-(a-c)^2}{4}=\frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{4}+\frac{bd+ac}{2}\\
q_bq_c=\left(\frac{a-b+c+d}{2}\right)\left(\frac{a+b-c+d}{2}\right)=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{4}=\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{4}+\frac{ad+bc}{2}
\end{cases}$$

entonces:

$$q_rq_a+q_rq_b+q_rq_c+q_aq_b+q_aq_c+q_bq_c=ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

(nótese que esta igualdad se verifica para cualquier cuaterna de números reales, no necesariamente pitagórica).

Ejemplo 10.1. Vamos a ilustrar el Teorema 10.2 con un ejemplo. La cuaterna pitagórica $(4,7,32,33)$ verifica que:

$$\begin{cases}
q_r=5\\
q_a=34\\
q_b=31\\
q_c=6\\
q_s=38
\end{cases}$$

y, además:

① $ab+ac+bc=4\cdot7+4\cdot2+7\cdot32=380=2\cdot5\cdot38=2q_rq_s$

② $q_aq_b+q_aq_c+q_bq_c=34\cdot31+34\cdot6+31\cdot6=1444=38^2=q_s^2$

③ $\begin{cases}
q_r^2+q_a^2+q_b^2+q_c^2=5^2+34^2+31^2+6^2=2178\\
2d^2=2\cdot33^2=2178\\
2[q_a(q_b-q_r)+q_b(q_c-q_r)+q_c(q_a-q_r)]=2[34(31-5)+31(6-5)+6(34-5)]=2178
\end{cases}$

④ $\begin{cases}
ab+ac+ad+bc+bd+cd=4\cdot7+4\cdot32+4\cdot33+7\cdot32+7\cdot33+32\cdot33=1799\\
q_rq_a+q_rq_b+q_rq_c+q_aq_b+q_aq_c+q_bq_c=5\cdot34+5\cdot31+5\cdot6+34\cdot31+34\cdot6+31\cdot6=1799
\end{cases}$

Teorema 10.3. Para cualquier cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio $q_r \in \mathbb{N}$, se verifica que:

① $$\begin{cases} q_r^2 + (q_r - a)^2 = (d-c)(d-b) \\ q_r^2 + (q_r - b)^2 = (d-a)(d-c) \\ q_r^2 + (q_r - c)^2 = (d-a)(d-b) \end{cases}$$

② $$q_r^2 + (q_r - a)^2 + (q_r - b)^2 + (q_r - c)^2 = d(d - 2q_r)$$

③ $$\left[q_r^2 + (q_r - a)^2\right]\left[q_r^2 + (q_r - b)^2\right]\left[q_r^2 + (q_r - c)^2\right] = (d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2$$

Demostración:

① Vamos a probar únicamente la primera de estas tres igualdades, ya que las otras dos se probarían de forma totalmente análoga intercambiando los papeles de a, b y c. Como $q_r = \dfrac{a+b+c-d}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} q_r^2 + (q_r - a)^2 &= \left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{-a+b+c-d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac-ad+bc-bd-cd)}{4} + \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(-ab-ac+ad+bc-bd-cd)}{4} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(bc-bd-cd)}{2} \\ &= d^2+bc-bd-cd \\ &= (d-c)(d-b) \end{aligned}$$

En lo sucesivo, diremos que $\Delta = d - c$ y $\overline{\Delta} = d - b$ son divisores "gemelos" de $q_r^2 + (q_r - a)^2$.

② Como:

$$\begin{cases} q_r^2 = \left(\dfrac{a+b+c-d}{2}\right)^2 = \dfrac{d^2+ab+ac-ad+bc-bd-cd}{2} \\ (q_r-a)^2 = \left(\dfrac{-a+b+c-d}{2}\right)^2 = \dfrac{d^2-ab-ac+ad+bc-bd-cd}{2} \\ (q_r-b)^2 = \left(\dfrac{a-b+c-d}{2}\right)^2 = \dfrac{d^2-ab+ac-ad-bc+bd-cd}{2} \\ (q_r-c)^2 = \left(\dfrac{a+b-c-d}{2}\right)^2 = \dfrac{d^2+ab-ac-ad-bc-bd+cd}{2} \end{cases}$$

sumando término a término estas cuatro igualdades, resulta que:

$$\begin{aligned} q_r^2 + (q_r - a)^2 + (q_r - b)^2 + (q_r - c)^2 &= \frac{4d^2-2ad-2bd-2cd}{2} \\ &= d(2d-a-b-c) \\ &= d(d-2q_r) \end{aligned}$$

③ Basta con multiplicar, término a término, las tres igualdades probadas en el primer apartado.

Corolario 10.1. Dados $q_r, \Delta \in \mathbb{N}$, existe una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio q_r y tal que $\Delta = d - c$ si y sólo si Δ es un divisor de $q_r^2 + (q_r - a)^2$.

Demostración:

Es consecuencia directa del Teorema 10.3.

Teorema 10.4. Dada una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio $q_r \in \mathbb{N}$, existe un par de divisores gemelos $(\Delta, \overline{\Delta})$ de $q_r^2 + (q_r - a)^2$ tal que:

① $b = 2q_r - a + \Delta$

② $c = 2q_r - a + \overline{\Delta}$

③ $d = 2q_r - a + \Delta + \overline{\Delta}$

Demostración:

Como, según el Teorema 10.3., $(\Delta, \overline{\Delta}) = (d-c, d-b)$ es un par de divisores gemelos de $q_r^2 + (q_r - a)^2$ y:

$$q_r = \frac{a+b+c-d}{2}$$

resulta que:

① $b = 2q_r - a - c + d = 2q_r - a + \Delta$

② $c = 2q_r - a - b + d = 2q_r - a + \overline{\Delta}$

③ $d = c + \Delta = 2q_r - a + \Delta + \overline{\Delta}$

Teorema 10.5. Dada una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio $q_r \in \mathbb{N}$ y $(\Delta, \overline{\Delta}) = (d-c, d-b)$, se verifica que:

① $a \le b \Leftrightarrow \Delta \ge 2(a - q_r)$

② $b \le c \Leftrightarrow \Delta \le \overline{\Delta}$

Demostración:

① Según el Teorema 10.4.:

$$a \le b \Leftrightarrow a \le 2q_r - a + \Delta \Leftrightarrow \Delta \ge 2(a - q_r)$$

② $b \le c \Leftrightarrow d - b \ge d - c \Leftrightarrow \overline{\Delta} \ge \Delta \Leftrightarrow \Delta \le \overline{\Delta}$

Teorema 10.6. Dados $q_r, u \in \mathbb{N}$, el número de cuaternas pitagóricas ordenadas $(a,b,c,d) \in ©$ tales que su inradio es igual a q_r y su cateto menor $a = u$ viene dado por el cardinal del conjunto:

$$\left\{ \Delta \in Div\left[q_r^2 + (q_r - u)^2 \right] : 2(u - q_r) \le \Delta \le \sqrt{q_r^2 + (q_r - u)^2} \right\}$$

Además, para cada Δ perteneciente a este conjunto, la cuaterna pitagórica correspondiente es:

$$(a_\Delta, b_\Delta, c_\Delta, d_\Delta) = \left(u, 2q_r - u + \Delta, 2q_r - u + \overline{\Delta}, 2q_r - u + \Delta + \overline{\Delta} \right)$$

Demostración:

Basta con tener en cuenta el Corolario 10.1., el Teorema 10.5. y el Teorema 10.4.

Corolario 10.2. Dados $q_r, u \in \mathbb{N}$ tales que $u \leq q_r$, el número de cuaternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c, d) \in$ © tales que su inradio es igual a q_r y su cateto menor es $a = u$ viene dado por el cardinal del conjunto:

$$\left\{\Delta \in Div\left[q_r^2 + (q_r - u)^2\right] : 1 \leq \Delta \leq \sqrt{q_r^2 + (q_r - u)^2}\right\}$$

lo cual nos garantiza que, en este caso, existe, al menos, una terna pitagórica primitiva con estas características.

Demostración:

Basta con tener en cuenta el Teorema 10.6., que los divisores de cualquier número natural son mayores o iguales que 1 y que $u - q_r \leq 0 < 1$. Además, tomando $\Delta = 1$, como $d = c + 1$, entonces, la cuaterna pitagórica correspondiente es primitiva, ya que $mcd(a, b, c, d) = 1$, pues cualesquiera que sean dos números consecutivos siempre son primos entre sí.

Ejemplo 10.2.

❶ Vamos a calcular todas las cuaternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 4$ y cuyo cateto menor es $a = 2$. Como $a = 2 < 4 = q_r$ y:

$$q_r^2 + (q_r - a)^2 = 16 + 4 = 20$$

el Corolario 10.2. nos asegura que el número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 4$ y cuyo cateto menor es $a = 2$ es:

$$\aleph_4(2) = Card\{\Delta \in Div[20] : 1 \leq \Delta \leq 2\sqrt{5}\} = Card\{1, 2, 4\} = 3$$

siendo, según el Teorema 10.4., estas cuaternas pitagóricas las siguientes:

$$\begin{cases} \Delta = 1 \ \rightarrow \ (2, 7, 26, 27) \\ \Delta = 2 \ \rightarrow \ (2, 8, 16, 18) \\ \Delta = 4 \ \rightarrow \ (2, 10, 11, 15) \end{cases}$$

❷ Vamos a calcular todas las cuaternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 6$ y cuyo cateto menor es $a = 8$. Como $a = 8 > 6 = q_r$ y:

$$q_r^2 + (q_r - a)^2 = 36 + 4 = 40$$

el Teorema 10.6. nos asegura que el número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es $q_r = 6$ y cuyo cateto menor es $a = 8$ es:

$$\aleph_6(8) = Card\{\Delta \in Div[40] : 4 \leq \Delta \leq 2\sqrt{10}\} = Card\{4, 5\} = 2$$

siendo, estas cuaternas pitagóricas las siguientes:

$$\begin{cases} \Delta = 4 \ \rightarrow \ (8, 8, 14, 18) \\ \Delta = 5 \ \rightarrow \ (8, 9, 12, 17) \end{cases}$$

<u>Teorema 10.7.</u> Dados $q_r, u \in \mathbb{N}$ tales que $u > q_r$ y que existe una cuaterna pitagórica ordenada $(a,b,c,d) \in$ © con inradio igual a q_r y cateto menor $a = u$, se verifica que:

$$u < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r$$

Esta acotación nos va a permitir contar el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas con un determinado inradio, ya que, si $q_r \in \mathbb{N}$ y, para cada $u \in \left[1, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r\right) \cap \mathbb{N}$, llamamos:

$$\aleph_{q_r}(u) = Card\left\{\Delta \in Div\left[q_r^2 + (q_r - u)^2\right] : 2(u - q_r) \le \Delta \le \sqrt{q_r^2 + (q_r - u)^2}\right\}$$

al número de cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a q_r y cateto menor igual a a, entonces, el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a q_r es:

$$\aleph_{q_r} = \sum_{u=1}^{\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) q_r\right]} \aleph_{q_r}(u)$$

<u>*Demostración:*</u>

Según el Teorema 10.6., cualquier divisor de $q_r^2 + (u - q_r)^2$ que nos genere una cuaterna pitagórica con estas características ha de verificar que:

$$\begin{aligned} 2(u - q_r) &\le \Delta \le \sqrt{q_r^2 + (u - q_r)^2} \\ 4(u - q_r)^2 &\le \Delta^2 \le q_r^2 + (u - q_r)^2 \\ 3(u - q_r)^2 &\le \Delta^2 \le q_r^2 \end{aligned}$$

por lo que, si fuese $u = kq_r$ $(k \in Q,\ k > 1)$, entonces:

$$\begin{aligned} 3(u - q_r)^2 &\le q_r^2 \\ 3q_r^2(k-1)^2 &\le q_r^2 \\ 3(k-1)^2 &\le 1 \\ \sqrt{3}\,(k-1) &\le 1 \\ k &\le 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

y, por tanto:

$$u \le \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r \underset{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r \in \mathbb{I}}{\overset{u \in Q}{\Rightarrow}} u < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r$$

<u>Ejemplo 10.3.</u> Vamos a calcular el número total de cuaternas pitagóricas ordenadas que existen con inradio $q_r = 3$. Como:

$$\left[\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r\right] = \left[3 + \sqrt{3}\right] = 4$$

entonces, el cateto de menor de cualquiera de estas ternas verifica que $a \in \{1,2,3,4\}$. Además:

❶ Para $a = 1 < 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 4 = 13$, el Corolario 10.2. nos asegura que:

$$\aleph_3(1) = Card\{\Delta \in Div[13] : 1 \le \Delta \le \sqrt{13}\} = Card\{1\} = 1$$

❷ Para $a = 2 < 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 1 = 10$, el Corolario 10.2. nos asegura que:

$$\aleph_3(2) = Card\{\Delta \in Div[10] : 1 \le \Delta \le \sqrt{10}\} = Card\{1,2\} = 2$$

❸ Para $a = 3 \le 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 0 = 9$, el Corolario 10.2. nos asegura que:

$$\aleph_3(3) = Card\{\Delta \in Div[9] : 1 \le \Delta \le 3\} = Card\{1,3\} = 2$$

❹ Para $a = 4 > 3 = q_r$, como $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 9 + 1 = 10$, el Teorema 10.6. nos asegura que:

$$\aleph_3(4) = Card\{\Delta \in Div[10] : 2 \le \Delta \le \sqrt{10}\} = Card\{2\} = 1$$

y, por tanto:

$$\aleph_3 = \sum_{a=1}^{4} \aleph_3(a) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$$

Definición 10.4. Una cuaterna pitagórica ordenada $(a,b,c,d) \in ©$ se dice que:

① Es isósceles de “primera especie” cuando $a = b < c$.

② Es isósceles de “segunda especie” cuando $a < b = c$.

Teorema 10.8. Para cualquier cuaterna pitagórica ordenada $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio $q_r \in \mathbb{N}$, se verifica que:

① Sus tres catetos no pueden ser iguales.

② Es isósceles de primera especie si y sólo si $\Delta = 2(a - q_r)$, en cuyo caso:

☺ a es par.

😐 $a > q_r$

☹ $(a - q_r) \mid q_r^2$

③ Si es isósceles de primera especie, entonces, $q_r^2 + (q_r - c)^2$ es un cuadrado perfecto.

④ Si es isósceles de segunda especie, entonces, $q_r^2 + (q_r - a)^2$ es un cuadrado perfecto (el recíproco, en general, no es cierto).

Demostración:

① Si fuesen $a = b = c$, entonces:

$$3a^2 = d^2 \Rightarrow \sqrt{3}\, a = d \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{d}{a} \in Q$$

lo cual es imposible. Por tanto, alguno de los catetos ha de ser distinto de los otros dos.

② Es isósceles de primera especie si y sólo si:

$$a = b = 2q_r + \Delta - a \Leftrightarrow \Delta = 2(a - q_r)$$

en cuyo caso:

☺ $\Delta = 2(a - q_r)$ es un divisor par de $q_r^2 + (q_r - a)^2$, lo cual implica que $q_r^2 + (q_r - a)^2$ ha de ser par, es decir, ambos sumandos deben tener la misma paridad y, por tanto, a ha de ser par.

😐 Como cualquier divisor de $q_r^2 + (q_r - a)^2$ verifica que:

$$0 < 1 \le \Delta = 2(a - q_r)$$

entonces, $a - q_r > 0$ y, por tanto, $a > q_r$.

☹ Como $\Delta = 2(a - q_r)$ es un divisor de $q_r^2 + (q_r - a)^2$, entonces:

$$(a - q_r) \mid \left[q_r^2 + (q_r - a)^2\right] \Rightarrow (a - q_r) \mid q_r^2$$

③ Si es isósceles de primera especie, entonces, $a = b$, por lo que, según el Teorema 10.3.:

$$q_r^2 + (q_r - c)^2 \underset{*}{=} (d - a)(d - b) = (d - a)^2$$

④ Si es isósceles de segunda especie, entonces, $b = c$, por lo que, según el Teorema 10.3.:

$$q_r^2 + (q_r - a)^2 \underset{*}{=} (d - c)(d - b) = (d - c)^2$$

Además, el recíproco, en general, no es cierto, ya que, por ejemplo, la cuaterna pitagórica $(3, 4, 12, 13)$ verifica que $q_r = 3 = a$, por lo que $q_r^2 + (q_r - a)^2 = 3^2$ es un cuadrado perfecto y, sin embargo, esta cuaterna pitagórica no es isósceles de segunda especie.

<u>Teorema 10.9.</u> Si $a \in \mathbb{N}$ y $q_r \in 2\mathbb{N} - 1$ son tales que:

☺ a es par.

😐 $a > q_r$

☹ $(a - q_r) \mid q_r^2$

entonces, existe, al menos, una cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) \in ©$ con inradio q_r que es isósceles de primera especie.

<u>Demostración:</u>

Como:

$$\left\{\begin{array}{l}(a - q_r) \mid q_r^2 \\ (a - q_r) \mid (q_r - a)^2\end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{(a - q_r)}_{\text{impar}} \mid \left[\underbrace{q_r^2 + (q_r - a)^2}_{\text{par}}\right] \Rightarrow 2(a - q_r) \mid \left[q_r^2 + (q_r - a)^2\right]$$

entonces, existe $\Delta \in Div\left[q_r^2 + (q_r - a)^2\right]$ tal que $\Delta = 2(a - q_r)$ y, por tanto:

$$a = 2q_r + \Delta - a = b$$

<u>Ejemplo 10.4.</u> El Teorema 10.9. no se verifica si $q_r \in 2\mathbb{N}$. Vamos a verlo con un ejemplo, tomando $q_r = 10$ y $a = 14$, que verifican las tres hipótesis del teorema y, sin embargo:

$$2(a - q_r) = 8 \not| \ 116 = q_r^2 + (q_r - a)^2$$

por lo que, si existiese alguna cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) \in ©$ con inradio igual a q_r, según el Teorema 10.8., ésta no sería isósceles de primera especie.

<u>Propiedades 10.2.</u>

① Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe, al menos, una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(a, b, c, d) \in ©$ con inradio $q_r = n$.

② Para $q_r = 1$ y $q_r = 2$ no existe ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.

③ Para cualquier $q_r \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$, existe, al menos, una cuaterna pitagórica $(a, b, c, d) \in ©$ isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.

④ Dada una cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) \in ©$:

- ❶ Si (a, b, c, d) es isósceles de primera especie, entonces, a es par.

- ❷ Si (a, b, c, d) es isósceles de segunda especie y primitiva, entonces, a es impar y no es múltiplo de 3 ni de 5.

<u>Demostración:</u>

① Como (1,2,2,3) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie, entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $(n, 2n, 2n, 3n)$ también es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie, cuyo inradio es:

$$q_r = \frac{n + 2n + 2n - 3n}{2} = n$$

② Vamos a distinguir ambos casos:

- ❶ Para $q_r = 1$, como $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} < 2$, entonces, no existe ningún valor par de a en el intervalo $\left(q_r, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r\right) = \left(1, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, por lo que, según el Teorema 10.8., no existe ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.

- ❷ Para $q_r = 2$, como $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 4$, entonces, no existe ningún valor par de a en el intervalo $\left(q_r, \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r\right) = \left(2, 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$, por lo que, según el Teorema 10.8., no existe ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio igual a q_r.

③ Vamos a distinguir dos casos:

❶ Si q_r es impar, tomando $a = q_r + 1,$ se verifica que:

☺ a es par.

😐 $a > q_r$

☹ $a - q_r = 1 \mid q_r^2$

por lo que el Teorema 10.9. nos asegura que existe, al menos, una cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) \in ©$ con inradio q_r que es isósceles de primera especie.

❷ Si q_r es par, tomando $a = q_r + 2,$ se verifica que:

☺ $2(a - q_r) = 4$

☹ $q_r^2 + (q_r - a)^2 = q_r^2 + 4 \equiv 0 \pmod 4$

por lo que, tomando $\Delta = 2(a - q_r) = 4 \in Div(q_r^2 + 4) = Div\left[q_r^2 + (q_r - a)^2\right],$ el Teorema 10.8. Nos asegura que la cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) \in ©$ tiene inradio igual a q_r y es isósceles de primera especie.

④ Vamos distinguir los dos casos:

❶ Si (a, b, c, d) es isósceles de primera especie, como $a = b$ y ninguna cuaterna pitagórica puede tener dos catetos impares, entonces, necesariamente ha de ocurrir que a sea par.

❷ Si (a, b, c, d) es isósceles de segunda especie y primitiva:

☺ Como $b = c$ y ninguna cuaterna pitagórica puede tener dos catetos impares, entonces, necesariamente ha de ocurrir que b sea par, por lo que, si a fuese par, esta cuaterna pitagórica no sería primitiva.

😐 Como $b = c,$ si a fuese múltiplo de 3, al ser esta cuaterna pitagórica primitiva, 2 sería resto cuadrático módulo 3, lo cual no es posible.

☹ Como $b = c,$ si a fuese múltiplo de 5, al ser esta cuaterna pitagórica primitiva, 2 ó 3 serían restos cuadráticos módulo 5, lo cual no es posible.

Teorema 10.10. Si $(u, v, w) \in T$ es una terna pitagórica ordenada, entonces, para cualquier $\Delta \in Div(w^2)$ tal que $\Delta \le w,$ se verifica que:

① $\left(v - u, u + v + \Delta, u + v + \dfrac{w^2}{\Delta}, u + v + \Delta + \dfrac{w^2}{\Delta}\right)$ es una cuaterna pitagórica ordenada con inradio $q_r = v.$

② $\left(u + v, v - u + \Delta, v - u + \dfrac{w^2}{\Delta}, v - u + \Delta + \dfrac{w^2}{\Delta}\right)$ es una cuaterna pitagórica ordenada con inradio $q_r = v$ si y sólo si $\Delta > 2u.$

Además, para ambas cuaternas pitagóricas, se verifica que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto mayor es igual a $\Delta.$

Demostración:

① Tomando $q_r = v$ y $a = v - u$ y sustituyendo en la expresión que aparece en el Teorema 10.4., obtenemos la cuaterna pitagórica:

$$(a,b,c,d) = \left(v-u, u+v+\Delta, u+v+\frac{w^2}{\Delta}, u+v+\Delta+\frac{w^2}{\Delta}\right)$$

verificando que $b \le c < d$. Además, como:

$$b - a = u + v + \Delta - (v - u) = \Delta + 2u > 0$$

entonces, esta cuaterna pitagórica es ordenada y tiene inradio $q_r = v$.

② Tomando $q_r = v$ y $a = u + v$ y sustituyendo en la expresión que aparece en el Teorema 10.4., obtenemos la cuaterna pitagórica:

$$(a,b,c,d) = \left(u+v, v-u+\Delta, v-u+\frac{w^2}{\Delta}, v-u+\Delta+\frac{w^2}{\Delta}\right)$$

verificando que $b \le c < d$. Además, como:

$$b - a = v - u + \Delta - (u + v) = \Delta - 2u$$

entonces, esta cuaterna pitagórica, cuyo inradio es $q_r = v$, es ordenada si y sólo si $\Delta > 2u$.

Corolario 10.3. Si $(u,v,w) \in T$ es una terna pitagórica ordenada, se verifica que:

① $(v-u, u+v+w, u+v+w, u+v+2w)$ es una cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio $q_r = v$.

② $(u+v, -u+v+w, -u+v+w, -u+v+2w)$ es una cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio $q_r = v$ si y sólo si $w > 2u$.

Además, para ambas cuaternas pitagóricas, se verifica que la diferencia entre la hipotenusa y el cateto mayor es igual a w.

Demostración:

En ambos casos, basta con tomar $\Delta = w$ y aplicar el Teorema 10.10.

Ejemplo 10.5. Considerando la terna pitagórica (13,84,85), como:

$$\{\Delta \in Div(85^2) : \Delta \le 85\} = \{1, 5, 17, 25, 85\}$$

y $25 < 2 \cdot 13 < 85$, el Teorema 10.10. nos asegura que podemos obtener seis cuaternas pitagóricas ordenadas con inradio $q_r = 84$ a partir de ella, siendo estas cuaternas las siguientes:

$$\begin{cases} \Delta = 1 \;\to\; (71, 98, 7232, 7233) \\ \Delta = 5 \;\to\; (71, 102, 1542, 1547) \\ \Delta = 17 \;\to\; (71, 114, 522, 539) \\ \Delta = 25 \;\to\; (71, 122, 386, 411) \\ \Delta = 85 \;\to\; \begin{cases} (71, 182, 182, 267) \\ (97, 156, 156, 241) \end{cases} \end{cases}$$

y pudiéndose observar que las dos correspondientes a $\Delta = 85 > 2 \cdot 13$ son isósceles de segunda especie, según nos asegura el Corolario 10.3.

<u>Ejemplo 10.6.</u> En el Ejemplo 6.3., se determinaron todas las ternas pitagóricas con hipotenusa $w = 65,$ siendo éstas:

$$\{(16, 63, 65), (25, 60, 65), (33, 56, 65), (39, 52, 65)\}$$

Vamos a determinar todas las cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie que se obtienen a partir de ellas:

❶ Como $2 \cdot 16 = 32 < 65,$ el Corolario 10.3. nos asegura que la terna pitagórica $(16, 63, 65)$ nos proporciona dos cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 63,$ siendo éstas:

$$\{(47, 144, 144, 209), (79, 112, 112, 177)\}$$

❷ Como $2 \cdot 25 = 50 < 65,$ el Corolario 10.3. nos asegura que la terna pitagórica $(25, 60, 65)$ nos proporciona dos cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 60,$ siendo éstas:

$$\{(35, 150, 150, 215), (85, 100, 100, 165)\}$$

❸ Como $2 \cdot 33 = 66 > 65,$ el Corolario 10.3. nos asegura que la terna pitagórica $(33, 56, 65)$ nos proporciona una única cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 56,$ siendo ésta:

$$\{(23, 154, 154, 219)\}$$

❹ Como $2 \cdot 39 = 78 > 65,$ el Corolario 10.3. nos asegura que la terna pitagórica $(39, 52, 65)$ nos proporciona una única cuaterna pitagórica ordenada isósceles de segunda especie con inradio $q_r = 52,$ siendo ésta:

$$\{(13, 156, 156, 221)\}$$

<u>Corolario 10.4.</u> Dado $\Delta \in \mathbb{N}$ cuya descomposición en factores primos es $\Delta = 2^{\beta_0} \cdot p_1^{\beta_1} \cdot ... \cdot p_t^{\beta_t} \cdot q_1^{\theta_1} \cdot ... \cdot q_l^{\theta_l}$, siendo $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_t, \theta_1, ..., \theta_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y:

$$\begin{cases} \forall\, k = 1, ..., t : p_k \equiv 1 \pmod{4} \\ \forall\, j = 1, ..., l : q_j \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

el número $\aleph^{\text{segunda especie}}(\Delta)$ de cuaternas pitagóricas ordenadas $(a, b, c, d) \in ©$ isósceles de segunda especie tales $\Delta = d - c$ verifica que:

$$\frac{\prod_{k=1}^{t} (2\beta_k + 1) - 1}{2} \leq \aleph_{2e}(\Delta) \leq \prod_{k=1}^{t} (2\beta_k + 1) - 1$$

<u>Demostración:</u>

En el Corolario 10.3., hemos demostrado que cualquier terna pitagórica ordenada $(u, v, w) \in T$ puede generar una o dos cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie:

$$\{(v - u, u + v + w, u + v + w, u + v + 2w), (u + v, -u + v + w, -u + v + w, -u + v + 2w)\}$$

siendo válida la segunda de ellas si y sólo si $w > 2u$ y, en el Teorema 10.8., hemos demostrado que cualquier cuaterna pitagórica ordenada $(a,b,c,d) \in ©$ con inradio $q_r \in \mathbb{N}$ e isósceles de segunda especie genera una terna pitagórica $(|q_r - a|, q_r, d-c),$ por lo que el número $\aleph^{\text{segunda especie}}(\Delta)$ de cuaternas pitagóricas ordenadas $(a,b,c,d) \in ©$ isósceles de segunda especie tales que $\Delta = d - c$ estará acotado entre el número $n^c(\Delta)$ de ternas pitagóricas con hipotenusa igual a Δ y su doble. Además, en el Teorema 6.5., se probó que el número de ternas pitagóricas con hipotenusa igual a Δ es:

$$n^c(\Delta) = \frac{\prod_{k=1}^{t} (2\beta_k + 1) - 1}{2}$$

y, por tanto:

$$\frac{\prod_{k=1}^{t} (2\beta_k + 1) - 1}{2} \leq \aleph_{2e}(\Delta) \leq \prod_{k=1}^{t} (2\beta_k + 1) - 1$$

Teorema 10.11.

① Para cualquier cuaterna pitagórica isósceles, el cateto repetido es par.

② Para cada $n \in \mathbb{N},$ existen exactamente n cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a $2^n.$ Además, todas ellas menos una son de primera especie, siendo la otra de segunda especie.

③ Si $m = 2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t}$ $(\theta_0, \theta_1, ..., \theta_t \in \mathbb{N})$ es la descomposición en factores primos de $m \in \mathbb{N},$ entonces, existen exactamente $\theta_0 \prod_{k=1}^{t} (2\theta_k + 1)$ cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a $m.$ Además, el número de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie cuyo cateto repetido es igual a m es:

$$Card\left\{(j_0, j_1, ..., j_t) \in \{1, ..., \theta_0\} \times \prod_{k=1}^{t} \{0, 1, ..., 2\theta_k\} : \frac{\sqrt{3} - 1}{2} < 2^{\theta_0 - j_0} \cdot p_1^{\theta_1 - j_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t - j_t} < \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right\}$$

Solución:

① Según las Propiedades 10.1., al menos dos catetos son pares, por lo que, necesariamente, el cateto repetido en cualquier cuaterna pitagórica isósceles ha de ser par.

② Dado $n \in \mathbb{N},$ si $(2^n, 2^n, c, d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica isósceles (no necesariamente ordenada), entonces:

$$2^{2n+1} = 2(2^n)^2 = d^2 - c^2 = (d-c)(d+c)$$

por lo que $(d-c, d+c)$ es un par de divisores gemelos de $2^{2n+1},$ cuyos divisores son:

$$Div(2^{2n+1}) = \{1, 2, 2^2, ..., 2^n, 2^{n+1}, ..., 2^{2n-1}, 2^{2n}, 2^{2n+1}\}$$

Además, como los números naturales $d-c$ y $d+c$ tienen la misma paridad y $d-c < d+c,$ entonces, los únicos valores que puede tomar $d-c$ son:

$$d - c \in \{2, 2^2, ..., 2^n\}$$

y, por tanto, existen exactamente n cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a 2^n, siendo éstas:

$$\forall\, k \in \{1, ..., n\} : (2^n, 2^n, 2^{2n-k} - 2^{k-1}, 2^{2n-k} + 2^{k-1}) \to \begin{cases} q_r^{(k)} = 2^n - 2^{k-1} \\ q_s^{(k)} = 2^n - 2^{2n-k} \end{cases}$$

Finalmente, una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si:

$$2^n > 2^{2n-k} - 2^{k-1}$$

es decir, si y sólo si:

$$2^{n-k+1} > 2^{2n-2k+1} - 1 = \frac{2^{2(n-k+1)}}{2} - 1$$

y, como la función cuadrática $y = \dfrac{x^2}{2} - x - 1$ es negativa en el intervalo $(1 - \sqrt{3}\,, 1 + \sqrt{3}\,)$, al ser $2^{n-k+1} > 0$, resulta que una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si:

$$0 < 2^{n-k+1} < 1 + \sqrt{3}$$

lo cual sólo es posible para $k = n$ y, por tanto, únicamente una de estas n cuaternas pitagóricas isósceles es de segunda especie, $(2^n - 2^{n-1}, 2^n, 2^n, 2^n + 2^{n-1})$.

③ Si $m = 2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t}\ (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_t \in \mathbb{N})$ es la descomposición en factores primos de $m \in \mathbb{N}$ y $(m, m, c, d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica isósceles (no necesariamente ordenada), entonces:

$$2^{2\theta_0+1} \cdot p_1^{2\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t} = 2m^2 = d^2 - c^2 = (d-c)(d+c)$$

por lo que $(d-c, d+c)$ es un par de divisores gemelos de $2^{2\theta_0+1} \cdot p_1^{2\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t}$. Además, como los números naturales $d-c$ y $d+c$ tienen la misma paridad, los únicos valores que pueden tomar son:

$$(d-c, d+c) = \begin{cases} \left(2^{j_0} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t}, 2^{2\theta_0+1-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t}\right) & 2^{j_0} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t} < 2^{2\theta_0+1-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t} \\ \left(2^{2\theta_0+1-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t}, 2^{j_0} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t}\right) & 2^{j_0} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t} > 2^{2\theta_0+1-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t} \end{cases}$$

siendo $j_0 \in \{1, ..., \theta_0\}$ y, para cada $k \in \{1, ..., t\}$, $j_k \in \{0, 1, ..., 2\theta_k\}$ y, por tanto, existen exactamente $\theta_0 \prod_{k=1}^{t} (2\theta_k + 1)$ cuaternas pitagóricas isósceles tales que su cateto repetido es igual a m:

$$\left(2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t}, 2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t}, \left|2^{2\theta_0-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t} - 2^{j_0-1} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t}\right|, 2^{2\theta_0-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t} + 2^{j_0-1} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t}\right)$$

Finalmente, una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si:

$$2^{\theta_0} \cdot p_1^{\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t} > \left|2^{2\theta_0-j_0} \cdot p_1^{2\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{2\theta_t-j_t} - 2^{j_0-1} \cdot p_1^{j_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t}\right|$$

es decir, si y sólo si:

$$1 > \left|2^{\theta_0-j_0} \cdot p_1^{\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t-j_t} - 2^{j_0-\theta_0-1} p_1^{j_1-\theta_1} \cdot ... \cdot p_t^{j_t-\theta_t}\right| = \left|2^{\theta_0-j_0} \cdot p_1^{\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t-j_t} - \frac{1}{2\left(2^{\theta_0-j_0} \cdot p_1^{\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t-j_t}\right)}\right|$$

o lo que es lo mismo, si y sólo si:

$$-1 < 2^{\theta_0-j_0} \cdot p_1^{\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t-j_t} - \frac{1}{2(2^{\theta_0-j_0} \cdot p_1^{\theta_1-j_1} \cdot ... \cdot p_t^{\theta_t-j_t})} < 1$$

y, como:

$$-1 < x - \frac{1}{2x} < 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \text{ó} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2} < x < \frac{-\sqrt{3}+1}{2} \end{array} \right.$$

al ser $2^{\theta_0 - j_0} \cdot p_1^{\theta_1 - j_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\theta_t - j_t} > 0$, resulta que una de estas cuaternas pitagóricas isósceles será de segunda especie si y sólo si:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < 2^{\theta_0 - j_0} \cdot p_1^{\theta_1 - j_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\theta_t - j_t} < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

y, por tanto, el número de cuaternas pitagóricas isósceles de segunda especie cuyo cateto repetido es igual a m es:

$$Card\left\{ (j_0, j_1, \ldots, j_t) \in \{1, \ldots, \theta_0\} \times \prod_{k=1}^{t} \{0, 1, \ldots, 2\theta_k\} : \frac{\sqrt{3}-1}{2} < 2^{\theta_0 - j_0} \cdot p_1^{\theta_1 - j_1} \cdot \ldots \cdot p_t^{\theta_t - j_t} < \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\}$$

<u>Ejemplo 10.7.</u> Vamos a ilustrar el Teorema 10.11. con dos ejemplos:

① Para $m = 32 = 2^5$, según dicho teorema, existen exactamente cinco cuaternas pitagóricas isósceles cuyo cateto repetido es igual a $32 = 2^5$, una de las cuales es de segunda especie, siendo éstas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (2^5, 2^5, 2^{10-1} - 2^{1-1}, 2^{10-1} + 2^{1-1}) & k=1 \\ (2^5, 2^5, 2^{10-2} - 2^{2-1}, 2^{10-2} + 2^{2-1}) & k=2 \\ (2^5, 2^5, 2^{10-3} - 2^{3-1}, 2^{10-3} + 2^{3-1}) & k=3 \\ (2^5, 2^5, 2^{10-4} - 2^{4-1}, 2^{10-4} + 2^{4-1}) & k=4 \\ (2^{10-5} - 2^{5-1}, 2^5, 2^5, 2^{10-5} + 2^{5-1}) & k=5 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} (32, 32, 511, 513) & k=1 \\ (32, 32, 254, 258) & k=2 \\ (32, 32, 124, 132) & k=3 \\ (32, 32, 56, 72) & k=4 \\ (16, 32, 32, 48) & k=5 \end{array} \right.$$

② Para $m = 18 = 2 \cdot 3^2$, según dicho teorema, existen exactamente $1(2 \cdot 2 + 1) = 5$ cuaternas pitagóricas isósceles cuyo cateto repetido es igual a $18 = 2 \cdot 3^2$. Además, considerando la función $g : \{1\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\} \to Q$ definida por:

$$g(j_0, j_1) = 2^{1-j_0} \cdot 3^{2-j_1}$$

como:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1,0) = 9 \notin \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \\ g(1,1) = 3 \notin \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \\ g(1,2) = 1 \in \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \\ g(1,3) = \frac{1}{3} \notin \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \\ g(1,4) = \frac{1}{9} \notin \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \end{array} \right.$$

entonces:

$$Card\left\{(j_0,j_1)\in\{1\}\times\{0,1,2,3,4\}:\frac{\sqrt{3}-1}{2}<2^{1-j_0}\cdot 3^{2-j_1}<\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\}=1$$

y, por tanto, únicamente una de estas cinco cuaternas pitagóricas isósceles es de segunda especie:

$$\left\{\begin{array}{ll}(2\cdot 3^2,2\cdot 3^2,|2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-0}-2^{1-1}\cdot 3^0|,2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-0}+2^{1-1}\cdot 3^0) & (j_0,j_1)=(1,0)\\ (2\cdot 3^2,2\cdot 3^2,|2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-1}-2^{1-1}\cdot 3^1|,2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-1}+2^{1-1}\cdot 3^1) & (j_0,j_1)=(1,1)\\ (2\cdot 3^2,2\cdot 3^2,|2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-2}-2^{1-1}\cdot 3^2|,2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-2}+2^{1-1}\cdot 3^2) & (j_0,j_1)=(1,2)\\ (2\cdot 3^2,2\cdot 3^2,|2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-3}-2^{1-1}\cdot 3^3|,2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-3}+2^{1-1}\cdot 3^3) & (j_0,j_1)=(1,3)\\ (2\cdot 3^2,2\cdot 3^2,|2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-4}-2^{1-1}\cdot 3^4|,2^{2\cdot 1-1}\cdot 3^{2\cdot 2-4}+2^{1-1}\cdot 3^4) & (j_0,j_1)=(1,4)\end{array}\right.=\left\{\begin{array}{ll}(18,18,161,163) & (j_0,j_1)=(1,0)\\ (18,18,51,57) & (j_0,j_1)=(1,1)\\ (9,18,18,27) & (j_0,j_1)=(1,2)\\ (18,18,21,33) & (j_0,j_1)=(1,3)\\ (18,18,79,83) & (j_0,j_1)=(1,4)\end{array}\right.$$

Lema 10.2. Si $(a,a,c,d)\in©$ es una cuaterna pitagórica isósceles de primera especie con inradio q_r, entonces:

① $q_r<a<c$

② $c-q_r\neq q_r$

③ $c-q_r<q_r\Leftrightarrow d<2a$

Demostración:

① Como:

$$a-q_r=a-\frac{2a+c-d}{2}=\frac{d-c}{2}>0$$

entonces:

$$q_r<a<c$$

② Si fuese $c-q_r=q_r$, entonces:

$$0=c-2q_r=c-2\left(\frac{2a+c-d}{2}\right)=d-2a\Rightarrow d=2a$$

por lo que:

$$2a^2+c^2\underset{\text{pitagórica}}{\overset{\text{cuaterna}}{=}}d^2=4a^2\Rightarrow c^2=2a^2\Rightarrow c=\sqrt{2}\,a\notin\mathbb{N}$$

y se llega a una contradicción.

③ $c-q_r<q_r\Leftrightarrow c<2q_r=2a+c-d\Leftrightarrow 0<2a-d\Leftrightarrow d<2a$

Teorema 10.12. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto $T_{\text{ordenadas}}$ de ternas pitagóricas ordenadas y el conjunto $©^{q_r>a}_{\text{isósceles}}$ de cuaternas pitagóricas isósceles (de segunda especie, ya que, según el Lema 10.2, cualquier cuaterna pitagórica isósceles de primera especie tiene inradio menor que su cateto menor) tales que su inradio es mayor que su cateto menor. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.

<u>*Demostración:*</u>

Si $(a,b,b,d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie tal que $q_r > a$, como $q_r - a < q_r$, según el Teorema 10.8., $(q_r - a, q_r, d-b)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier terna pitagórica ordenada $(u,v,w) \in T_{\text{ordenadas}}$, la correspondencia buscada debería ser de la forma:

$$(u,v,w) = (q_r - a, q_r, d-b) \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = \dfrac{-a+2b-d}{2} \\ v = \dfrac{a+2b-d}{2} \\ w = -b+d \end{cases} \\ \begin{cases} a = -u+v \\ b = u+v+w \\ d = u+v+2w \end{cases} \end{cases}$$

siendo:

$$a^2 + 2b^2 - d^2 = (-u+v)^2 + 2(u+v+w)^2 - (u+v+2w)^2 = 2(u^2+v^2-w^2)$$

por lo que (a,b,b,d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie si y sólo si (u,v,w) es una terna pitagórica ordenada. Además, el inradio de la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie correspondiente a cualquier terna pitagórica ordenada (u,v,w) verifica que:

$$q_r = \frac{a+2b-d}{2} = \frac{-u+v+2(u+v+w)-(u+v+2w)}{2} = v > -u+v = a$$

A continuación, como las aplicaciones lineales $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por estas relaciones:

$$f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son biyectivas (por ser inversas una de la otra, ya que $fg = 1_{\mathbb{R}_3}$), tenemos dos correspondencias biunívocas inversas una de la otra:

$$T_{\text{ordenadas}} \xrightarrow{g} ©^{q_r > a}_{\text{isósceles de segunda especie}}$$

$$(u,v,w) \to (-u+v, u+v+w, u+v+w, u+v+2w)$$

$$©^{q_r > a}_{\text{isósceles de segunda especie}} \xrightarrow{f} T_{\text{ordenadas}}$$

$$(a,b,b,d) \to \left(\frac{-a+2b-d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right)$$

Finalmente

- ☺ Si $(u,v,w)\in T$ es una terna pitagórica ordenada primitiva, como w es impar, resulta que:

$$\begin{aligned} 1 &= mcd(u,v,w) \\ &= mcd(v,u,w) \\ &= mcd(v,u+v,w) \\ &= mcd(2v,u+v,w) \\ &= mcd(-u+v,u+v,w) \\ &= mcd(-u+v,u+v+w,w) \\ &= mcd(-u+v,u+v+w,u+v+2w) \end{aligned}$$

  y, por tanto, la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(-u+v,u+v+w,u+v+w,u+v+2w)$ también es primitiva.

- ☹ Si (a,b,b,d) es una cuaterna isósceles de segunda especie primitiva, según el Teorema 10.10., b es par, por lo que, tanto a como d son impares, verificándose que:

$$\begin{aligned} 1 &= mcd(a,b,b,d) \\ &= mcd(a,b,d) \\ &= mcd(a,b,-b+d) \\ &= mcd(a,a+2b-d,-b+d) \\ &= mcd(-a+2b-d,a+2b-d,-b+d) \\ &= mcd\left(\frac{-a+2b-d}{2},\frac{a+2b-d}{2},-b+d\right) \end{aligned}$$

  y, por tanto, la terna pitagórica ordenada $\left(\frac{-a+2b-d}{2},\frac{a+2b-d}{2},-b+d\right)$ también es primitiva.

<u>Ejemplo 10.8.</u> Según el Teorema 10.12. la terna pitagórica ordenada (3,4,5) se corresponde con la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie (1,12,12,17), ya que:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

<u>Teorema 10.13.</u>

① Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $T^{w>2u}_{\text{ordenadas}}$ y $©^{q_r<a}_{\text{isósceles de segunda especie}}$. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.

② Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $T^{w<2u}_{\text{ordenadas}}$ y $©^{2a>d}_{\text{isósceles de primera especie}}$. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.

③ Existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos $T^{w<2v}_{\text{ordenadas}}$ y $©^{2a<d}_{\text{isósceles de primera especie}}$. Además, esta correspondencia asocia ternas pitagóricas primitivas con cuaternas pitagóricas primitivas y viceversa.

④ $Card\left[©^{2a>d}_{\text{isósceles de primera especie}}\right] < Card\left[©^{2a<d}_{\text{isósceles de primera especie}}\right]$, pudiéndose definir una aplicación inyectiva $\psi : ©^{2a>d}_{\text{isósceles de primera especie}} \to ©^{2a<d}_{\text{isósceles de primera especie}}$ verificando que, para cada $(a,a,c,d) \in ©^{2a>d}_{\text{isósceles de primera especie}}$, el cateto mayor de $\psi(a,a,c,d)$ es igual a c.

<u>Demostración:</u>

① Si $(a,b,b,d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie tal que $q_r < a$, según el Teorema 10.7., como:

$$a < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) q_r < 2q_r \Rightarrow a - q_r < q_r$$

entonces, el Teorema 10.8. nos asegura que $(a - q_r, q_r, d - b)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier terna pitagórica ordenada $(u,v,w) \in T$, la correspondencia buscada debería ser de la forma:

$$(u,v,w) = (a - q_r, q_r, d - b) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{a - 2b + d}{2} \\ v = \dfrac{a + 2b - d}{2} \\ w = -b + d \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} a = u + v \\ b = -u + v + w \\ d = -u + v + 2w \end{array} \right. \end{array} \right.$$

siendo:

$$a^2 + 2b^2 - d^2 = (u+v)^2 + 2(-u+v+w)^2 - (-u+v+2w)^2 = 2(u^2 + v^2 - w^2)$$

por lo que (a,b,b,d) es una cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie si y sólo si (u,v,w) es una terna pitagórica ordenada. Además, el inradio de la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie correspondiente a cualquier terna pitagórica ordenada (u,v,w) verifica que:

$$q_r = \frac{a + 2b - d}{2} = \frac{u + v + 2(-u+v+w) - (-u+v+2w)}{2} = v < u + v = a$$

A continuación, como las aplicaciones lineales $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por estas relaciones:

$$f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son biyectivas (por ser inversas una de la otra, ya que $fg = 1_{\mathbb{R}_3}$) y:

$$w - 2u = -b + d - 2\left(\frac{a-2b+d}{2}\right) = -b + d - (a - 2b + d) = b - a > 0$$

entonces, $w > 2u$ y, por tanto, tenemos dos correspondencias biunívocas inversas una de la otra:

$$T^{w>2u}_{\text{ordenadas}} \xrightarrow{g} ©^{q_r<a}_{\text{isósceles de segunda especie}}$$

$$(u, v, w) \to (u+v, -u+v+w, -u+v+w, -u+v+2w)$$

$$©^{q_r<a}_{\text{isósceles de segunda especie}} \xrightarrow{f} T^{w>2u}_{\text{ordenadas}}$$

$$(a, b, b, d) \to \left(\frac{a-2b+d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right)$$

Finalmente:

☺ Si $(u, v, w) \in T$ es una terna pitagórica ordenada primitiva, como w es impar, resulta que:

$$\begin{aligned} 1 &= mcd(u, v, w) \\ &= mcd(u+v, v, w) \\ &= mcd(u+v, 2v, w) \\ &= mcd(u+v, -u+v, w) \\ &= mcd(u+v, -u+v+w, w) \\ & mcd(u+v, -u+v+w, -u+v+2w) \end{aligned}$$

y, por tanto, la cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie $(u+v, -u+v+w, -u+v+w, -u+v+2w)$ también es primitiva.

☹ Si (a, b, b, d) es una cuaterna isósceles de segunda especie primitiva, según el Teorema 10.10., b es par, por lo que, tanto a como d son impares, verificándose que:

$$\begin{aligned} 1 &= mcd(a, b, b, d) \\ &= mcd(a, b, d) \\ &= mcd(a, b, -b+d) \\ &= mcd(a, a+2b-d, -b+d) \\ &= mcd(a-2b+d, a+2b-d, -b+d) \\ &= mcd\left(\frac{a-2b+d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right) \end{aligned}$$

y, por tanto, la terna pitagórica ordenada $\left(\frac{a-2b+d}{2}, \frac{a+2b-d}{2}, -b+d\right)$ también es primitiva.

② Si $(a,a,c,d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica isósceles de primera especie tal que $2a > d,$ para cada terna pitagórica ordenada $(u,v,w) \in T,$ según el Teorema 10.8. y el Lema 10.2., $(c-q_r, q_r, d-a)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier terna pitagórica ordenada $(u,v,w) \in T,$ la correspondencia buscada debería ser de la forma:

$$(u,v,w) = (c-q_r, q_r, d-a) \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = \dfrac{-2a+c+d}{2} \\ v = \dfrac{2a+c-d}{2} \\ w = -a+d \end{cases} \\ \begin{cases} a = -u+v+w \\ c = u+v \\ d = -u+v+2w \end{cases} \end{cases}$$

siendo:

$$2a^2 + c^2 - d^2 = (-u+v+w)^2 + (u+v)^2 - (-u+v+2w)^2 = 2(u^2+v^2-w^2)$$

por lo que (a,a,c,d) es una cuaterna pitagórica isósceles de primera especie si y sólo si (u,v,w) es una terna pitagórica ordenada. Además, como las aplicaciones lineales $f_{2a>d}, g_{2a>d} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas por estas relaciones:

$$f_{2a>d} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_{2a>d} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son biyectivas (por ser inversas una de la otra, ya que $f_{2a>d} g_{2a>d} = 1_{\mathbb{R}_3}$) y:

$$\begin{cases} w - 2u = -a + d - 2\left(\dfrac{-2a+c+d}{2}\right) = -a + d - (-2a+c+d) = a - c < 0 \\ 2a - d = 2(-u+v+w) - (-u+v+2w) = -u + v > 0 \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} w < 2u \\ 2a > d \end{cases}$$

y, por tanto, tenemos dos correspondencias biunívocas inversas una de la otra:

$$T^{w<2u}_{\text{ordenadas}} \overset{g_{2a>d}}{\to} ©^{2a>d}_{\text{isósceles de primera especie}}$$

$$(u,v,w) \to (-u+v+w, -u+v+w, u+v, -u+v+2w)$$

$$©^{2a>d}_{\text{isósceles de primera especie}} \overset{f_{2a>d}}{\to} T^{w<2u}_{\text{ordenadas}}$$

$$(a,a,c,d) \to \left(\frac{-2a+c+d}{2}, \frac{2a+c-d}{2}, -a+d\right)$$

Finalmente, si $(u,v,w)\in T$ es una terna pitagórica ordenada primitiva, como w es impar, resulta que:

$$\begin{aligned}1 &= mcd(u,v,w)\\ &= mcd(v,u,w)\\ &= mcd(v,u+v,w)\\ &= mcd(2v,u+v,w)\\ &= mcd(-u+v,u+v,w)\\ &= mcd(-u+v+w,u+v,w)\\ & mcd(-u+v+w,u+v,-u+v+2w)\end{aligned}$$

y, por tanto, la cuaterna pitagórica isósceles de primera especie $(-u+v+w,-u+v+w,u+v,-u+v+2w)$ también es primitiva.

③ Si $(a,a,c,d)\in ©$ es una cuaterna pitagórica isósceles de primera especie tal que $2a<d$, para cada terna pitagórica ordenada $(u,v,w)\in T$, según el Teorema 10.8. y el Lema 10.2., $(q_r,c-q_r,d-a)$ es una terna pitagórica ordenada, por lo que, para cualquier terna pitagórica ordenada $(u,v,w)\in T$, la correspondencia buscada debería ser de la forma:

$$(u,v,w)=(q_r,c-q_r,d-a)\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}u=\dfrac{2a+c-d}{2}\\ v=\dfrac{-2a+c+d}{2}\\ w=-a+d\end{cases}\\ \begin{cases}a=u-v+w\\ c=u+v\\ d=u-v+2w\end{cases}\end{cases}$$

siendo:

$$2a^2+c^2-d^2=2(u-v+w)^2+(u+v)^2-(u-v+2w)^2=2(u^2+v^2-w^2)$$

por lo que (a,a,c,d) es una cuaterna pitagórica isósceles de primera especie si y sólo si (u,v,w) es una terna pitagórica ordenada. Además, como las aplicaciones lineales $f_{2a<d},g_{2a<d}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definidas por estas relaciones:

$$f_{2a<d}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad g_{2a<d}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

son biyectivas (por ser inversas una de la otra, ya que $f_{2a<d}g_{2a<d}=1_{\mathbb{R}_3}$) y:

$$\begin{cases}w-2v=-a+d-2\left(\dfrac{-2a+c+d}{2}\right)=-a+d-(-2a+c+d)=a-c<0\\ 2a-d=2(u-v+w)-(u-v+2w)=u-v<0\end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} w < 2v \\ 2a < d \end{cases}$$

y, por tanto, tenemos dos correspondencias biunívocas inversas una de la otra:

$$T_{\text{ordenadas}}^{w<2v} \overset{g_{2a<d}}{\to} ©_{\text{isósceles de primera especie}}^{2a<d}$$

$$(u,v,w) \to (-u+v+w, -u+v+w, u+v, -u+v+2w)$$

$$©_{\text{isósceles de primera especie}}^{2a<d} \overset{f_{2a<d}}{\to} T_{\text{ordenadas}}^{w<2v}$$

$$(a,a,c,d) \to \left(\frac{-2a+c+d}{2}, \frac{2a+c-d}{2}, -a+d\right)$$

Finalmente, si $(u,v,w) \in T$ es una terna pitagórica ordenada primitiva, como w es impar, resulta que:

$$\begin{aligned} 1 &= mcd(u,v,w) \\ &= mcd(v,u,w) \\ &= mcd(v,u+v,w) \\ &= mcd(-2v,u+v,w) \\ &= mcd(u-v,u+v,w) \\ &= mcd(u-v+w,u+v,w) \\ & \quad mcd(u-v+w,u+v,u-v+2w) \end{aligned}$$

y, por tanto, la cuaterna pitagórica isósceles de primera especie $(u-v+w, u-v+w, u+v, u-v+2w)$ también es primitiva.

④ Como, para cualquier terna pitagórica ordenada (u,v,w), se verifica que $u < v$ y, además:

$$T_{\text{ordenadas}}^{w<2u} \underset{(5,12,13)\notin T_{\text{ordenadas}}^{w<2u}}{\overset{(5,12,13)\in T_{\text{ordenadas}}^{w<2v}}{\subsetneq}} T_{\text{ordenadas}}^{w<2v}$$

por lo que:

$$Card\left[©_{\text{isósceles de primera especie}}^{2a>d}\right] \underset{\text{apartado}}{\overset{\text{segundo}}{=}} Card[T_{\text{ordenadas}}^{w<2u}] \underset{*}{<} Card[T_{\text{ordenadas}}^{w<2v}] \underset{\text{apartado}}{\overset{\text{primer}}{=}} Card\left[©_{\text{isósceles de primera especie}}^{2a<d}\right]$$

Además, podemos considerar la aplicación inyectiva:

$$©_{\text{isósceles de primera especie}}^{2a>d} \overset{f_{2a>d}}{\to} T_{\text{ordenadas}}^{w<2u} \subsetneq T_{\text{ordenadas}}^{w<2v} \overset{g_{2a<d}}{\to} ©_{\text{isósceles de primera especie}}^{2a<d}$$

$$(a,a,c,d) \to \left(\frac{-2a+c+d}{2}, \frac{2a+c-d}{2}, -a+d\right) \to (2d-3a, 2d-3a, c, 3d-4a)$$

que verifica la condición del enunciado.

Ejemplo 10.9. Según el Teorema 10.13.:

① La cuaterna pitagórica isósceles de segunda especie (17,20,20,33) se corresponde con la terna pitagórica ordenada (5,12,13) (que verifica $w = 13 > 2 \cdot 5 = 2u$), ya que:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 20 \\ 33 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

② La cuaterna pitagórica isósceles de primera especie (6,6,7,11) (que verifica $2a = 2 \cdot 6 > 11 = d$) se corresponde con la terna pitagórica ordenada (3,4,5) (que verifica $w = 5 < 2 \cdot 3 = 2u$) ya que:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

③ La cuaterna pitagórica isósceles de primera especie (6,6,17,19) (que verifica $2a = 2 \cdot 6 < 19 = d$) se corresponde con la terna pitagórica ordenada (5,12,13) (que verifica $w = 13 < 2 \cdot 12 = 2v$), ya que:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 19 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

④ La cuaterna pitagórica isósceles de primera especie (6,6,7,11) (que verifica $2a = 2 \cdot 6 > 11 = d$) se corresponde con la cuaterna pitagórica pitagórica isósceles de primera especie (4,4,7,9) (que verifica $2a = 2 \cdot 4 < 9 = d$), ya que:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Sin embargo, la cuaterna pitagórica isósceles de primera especie (6,6,17,19) (que verifica $2a = 2 \cdot 6 < 19 = d$) no se corresponde con ninguna cuaterna pitagórica isósceles de primera especie tal que $2a > d$, ya que:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \notin T^{w<2u}_{\text{ordenadas}} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 17 \\ 33 \end{pmatrix} \to \text{no ordenada} \end{cases}$$

<u>Definición 10.5.</u> Una cuaterna pitagórica $(a,b,c,d) \in ©$ con $a < \min\{b,c\}$ se dice que es ligada si $d = a + b$ o $d = a + c$. Además, se dice que:

① Es ligada de “primera especie” cuando es ordenada y $d = a + b$.

② Es ligada de “segunda especie” cuando es ordenada y $d = a + c$.

<u>Teorema 10.14.</u> Si $(a,b,c,d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica (no necesariamente ordenada) con inradio $q_r \in \mathbb{N}$ y tal que $d = a + c$, se verifica que:

① $b = 2q_r$

② $ac = 2q_r^2$ (es decir, a y c son dos divisores gemelos de $2q_r^2$)

<u>Demostración:</u>

① Como $d = a + c$, resulta que:

$$2q_r = a + b + c - d = b$$

② Como:

$$0 = a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a + c)^2 = b^2 - 2ac \Rightarrow b^2 = 2ac$$

entonces, según el apartado anterior:

$$2q_r^2 = \frac{b^2}{2} = ac$$

<u>Teorema 10.15.</u> Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número de cuaternas pitagóricas ligadas con inradio $q_r = n$ es:

$$l^{(n)} = \frac{d(2n^2)}{2} = Card\{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma < \sqrt{2}\, n\}$$

Además:

$$\begin{cases} l^{(n)}_{\text{primera especie}} = Card\{\gamma \in Div(2n^2) : n \le \gamma < \sqrt{2}\, n\} \\ l^{(n)}_{\text{segunda especie}} = Card\{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma \le n\} \end{cases}$$

(debemos tener en cuenta que la cuaterna pitagórica correspondiente al par de divisores gemelos $(n, 2n)$ es isósceles de segunda especie, por lo que será ligada de primera especie y ligada de segunda especie, de ahí que $\gamma = n$ aparezca en los dos conjuntos).

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, según el Teorema 10.14:

$$\forall\ \gamma \in Div(2n^2) : (a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma) = \left(\gamma, 2n, \frac{2n^2}{\gamma}, \gamma + \frac{2n^2}{\gamma}\right) = (\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma})$$

son las únicas cuaternas pitagóricas ligadas con inradio n. Además, como, para cada $\gamma \in Div(2n^2)$, se verifica que:

$$\left(a_{\overline{\gamma}}, b_{\overline{\gamma}}, c_{\overline{\gamma}}, d_{\overline{\gamma}}\right) = \left(\overline{\gamma}, 2n, \frac{2n^2}{\overline{\gamma}}, \overline{\gamma} + \frac{2n^2}{\overline{\gamma}}\right) = (\overline{\gamma}, 2n, \gamma, \gamma + \overline{\gamma}) = (c_\gamma, b_\gamma, a_\gamma, d_\gamma)$$

entonces, cada par de catetos menor y mayor se repite (salvo el orden de éstos) exactamente dos veces y, por tanto, el número de cuaternas pitagóricas ligadas $(a, b, c, d) \in ©$ distintas (salvo el orden de los catetos menor y mayor) tales que su inradio es igual a n viene dado por:

$$l^{(n)} = \frac{d(2n^2)}{2} = Card\{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma < \sqrt{2}\, n\}$$

Además, se puede conseguir que estas $l^{(n)}$ cuaternas pitagóricas ligadas estén ordenadas, ya que, para cualquier $\gamma \in Div(2n^2)$ tal que $\gamma < \sqrt{2}\, n$, se verifica que:

$$a_\gamma = \gamma \underset{*}{<} \sqrt{2}\, n < 2n = b_\gamma$$

y que:

$$2n = b_\gamma \le c_\gamma = \frac{2n^2}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \le n$$

por lo que:

$$\begin{cases} l^{(n)}_{\text{primera especie}} = Card\{\gamma \in Div(2n^2) : n \le \gamma < \sqrt{2}\, n\} = d_{[n, \sqrt{2}\, n)}(2n^2) \\ l^{(n)}_{\text{segunda especie}} = Card\{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma \le n\} = d_{\le n}(2n^2) \end{cases}$$

Corolario 10.5. Existe una sucesión $((a_n, b_n, c_n, d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de cuaternas pitagóricas ligadas de segunda especie, todas ellas primitivas y tales que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : q_r^{(a_n, b_n, c_n, d_n)} = n$$

Demostración:

Teniendo en cuenta el Teorema 10.15., basta con considerar la sucesión de cuaternas pitagóricas ligadas de segunda especie cuyo término general es:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n, c_n, d_n) = (1, 2n, 2n^2, 2n^2 + 1)$$

que verifica las condiciones del enunciado.

Ejemplo 10.10. Para $n = 6,$ como $2n^2 = 72 = 2^3 3^2$ y:

$$Div(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

según el Teorema 10.15.:

$$l^{(6)} = \frac{d(72)}{2} = \frac{(3+1)(2+1)}{2} = 6$$

siendo:

$$\begin{cases} l^{(6)}_{\text{primera especie}} = d_{[6, 6\sqrt{2})}(72) = Card\{6, 8\} = 2 \\ l^{(6)}_{\text{segunda especie}} = d_{\leq 6}(72) = Card\{1, 2, 3, 4, 6\} = 5 \end{cases}$$

y la cuaternas pitagóricas ligadas correspondientes:

$$\begin{cases} (1, 12, 72, 73) \rightarrow & \text{segunda especie} \\ (2, 12, 36, 38) \rightarrow & \text{segunda especie} \\ (3, 12, 24, 27) \rightarrow & \text{segunda especie} \\ (4, 12, 18, 22) \rightarrow & \text{segunda especie} \\ (6, 12, 12, 18) \rightarrow & \text{primera y segunda especie} \\ (8, 9, 12, 17) \rightarrow & \text{primera especie} \end{cases}$$

Lema 10.3. Si $n \in \mathbb{N}$ y $(\gamma, \overline{\gamma})$ es un par de divisores gemelos de $2n^2,$ entonces:

$$mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}) = mcd(n, \gamma, \overline{\gamma})$$

Demostración:

① $$\begin{cases} mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid n \\ mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid \gamma \\ mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid \overline{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid 2n \\ mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid \gamma \\ mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid \overline{\gamma} \\ mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid \gamma + \overline{\gamma} \end{cases} \Rightarrow mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma})$$

② Si llamamos $l = mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}),$ como:

$$\begin{cases} l \mid \gamma \\ l \mid \overline{\gamma} \end{cases} \Rightarrow l^2 \mid \gamma \cdot \overline{\gamma} = 2n^2 \Rightarrow l^2 \mid n^2 \Rightarrow l \mid n$$

entonces:

$$mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}) = l \mid mcd(n, \gamma, \overline{\gamma})$$

Por tanto:

$$\begin{cases} mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \mid mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}) \\ mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}) \mid mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \end{cases} \Rightarrow mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}) = mcd(n, \gamma, \overline{\gamma})$$

Teorema 10.16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ternas pitagóricas ordenadas con inradio $r = n$ y el conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas con inradio $q_r = n$. Además, esta correspondencia mantiene el máximo común divisor, por lo que una terna pitagórica ordenada con inradio $r = n$ es primitiva si y sólo si la cuaterna pitagórica ligada correspondiente es primitiva y, por tanto, el Teorema 2.8. nos asegura que el número de cuaternas pitagóricas ligadas con inradio $q_r = n$ que son primitivas es igual a 2^t, siendo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de factores primos impares de n.

Demostración:

Según los Teoremas 2.4. y 2.5., existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ternas pitagóricas ordenadas con inradio $r = n$ y el conjunto $\{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma < \sqrt{2}\, n\}$, siendo:

$$\forall\ \gamma \in Div(2n^2)\ /\ \gamma < \sqrt{2}\, n : (a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma) = (2n + \gamma, 2n + \overline{\gamma}, 2n + \gamma + \overline{\gamma})$$

y, según los Teoremas 10.15. y 10.16., existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas con inradio $q_r = n$ y el conjunto $\{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma < \sqrt{2}\, n\}$, siendo:

$$\forall\ \gamma \in Div(2n^2)\ /\ \gamma < \sqrt{2}\, n : (a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma) = \left(\gamma, 2n, \frac{2n^2}{\gamma}, \gamma + \frac{2n^2}{\gamma}\right) = (\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma})$$

Por tanto, basta con considerar la correspondencia composición de las dos siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} T^{r=n}_{\text{ordenadas}} & \rightarrow & \{\gamma \in Div(2n^2) : \gamma < \sqrt{2}\, n\} & \rightarrow & ©^{q_r=n}_{\text{ligadas}} \\ (2n + \gamma, 2n + \overline{\gamma}, 2n + \gamma + \overline{\gamma}) & \rightarrow & \gamma & \rightarrow & (\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma}) \end{array}$$

Además, según los Lemas 2.1. y 10.3., se verifica que:

$$mcd(2n + \gamma, 2n + \overline{\gamma}, 2n + \gamma + \overline{\gamma}) \underset{\text{Lema 2.1.}}{=} mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \underset{\text{Lema 10.3.}}{=} mcd(\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma + \overline{\gamma})$$

y, por tanto, una terna pitagórica ordenada con inradio $r = n$ es primitiva si y sólo si la cuaterna pitagórica ligada correspondiente es primitiva.

Ejemplo 10.11. Para $n = 6,$ la correspondencia descrita en el Teorema 10.16. es la siguiente:

$T^{r=6}_{\text{ordenadas}}$	$\to$	$\{\gamma \in Div(72) : \gamma < 6\sqrt{2}\}$	$\to$	$©^{q_r=6}_{\text{ligadas}}$	
$(12+\gamma, 12+\overline{\gamma}, 12+\gamma+\overline{\gamma})$	$\to$	γ	$\to$	$(\gamma, 12, \overline{\gamma}, \gamma+\overline{\gamma})$	$mcd(6, \gamma, \overline{\gamma})$
$(13, 84, 85)$	$\to$	1	$\to$	$(1, 12, 72, 73)$	1
$(14, 48, 50)$	$\to$	2	$\to$	$(2, 12, 36, 38)$	2
$(15, 36, 39)$	$\to$	3	$\to$	$(3, 12, 24, 27)$	3
$(16, 30, 34)$	$\to$	4	$\to$	$(4, 12, 18, 22)$	2
$(18, 24, 30)$	$\to$	6	$\to$	$(6, 12, 12, 18)$	6
$(20, 21, 29)$	$\to$	8	$\to$	$(8, 12, 9, 17) \equiv (8, 9, 12, 17)$	1

Además, como $6 = 2 \cdot 3$ tiene un único factor primo impar, según el Teorema 2.8., existen exactamente $2^1 = 2$ cuaternas pitagóricas ligadas con inradio $q_r = 6$ que son primitivas:

$$\{(1, 12, 72, 73), (8, 9, 12, 17)\}$$

Teorema 10.17. Para cada $n \in \mathbb{N},$ existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ternas pitagóricas ordenadas con semiperímetro $s = n$ y el conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie no isósceles con inradio $q_r = n.$ Además, esta correspondencia mantiene el máximo común divisor, por lo que una terna pitagórica ordenada con semiperímetro $s = n$ es primitiva si y sólo si la cuaterna pitagórica ligada de primera especie no isósceles correspondiente es primitiva y, por tanto, el Teorema 4.8. nos asegura que el número de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie no isósceles con inradio $q_r = n$ que son primitivas es menor o igual a $2^t - 1,$ siendo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ el número de factores primos impares de $n.$

Demostración:

Según los Teoremas 4.3. y 4.4., existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de ternas pitagóricas ordenadas con semiperímetro $s = n$ y el conjunto $\{\gamma \in Div(2n^2) : n < \gamma < \sqrt{2}\, n\},$ siendo:

$$\forall\ \gamma \in Div(2n^2) \ /\ n < d < \sqrt{2}\, n : (a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma) = (2n-\gamma, 2n-\overline{\gamma}, \gamma+\overline{\gamma}-2n)$$

y, según los Teoremas 10.15. y 10.16., existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie (no isósceles) con inradio $q_r = n$ y el conjunto $\{\gamma \in Div(2n^2) : n < \gamma < \sqrt{2}\, n\},$ siendo:

$$\forall\ \gamma \in Div(2n^2) \ /\ n < d < \sqrt{2}\, n : (a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma) = (\gamma, 2n, \overline{\gamma}, \gamma+\overline{\gamma})$$

Por tanto, basta con considerar la correspondencia composición de las dos siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} T^{s=n}_{\text{ordenadas}} & \to & \{\gamma \in Div(2n^2) : n < \gamma < \sqrt{2}\, n\} & \to & ©^{q_r=n}_{\text{ligadas de primera especie no isósceles}} \\ (2n-\gamma, 2n-\overline{\gamma}, \gamma+\overline{\gamma}-2n) & \to & \gamma & \to & (\gamma, \overline{\gamma}, 2n, \gamma+\overline{\gamma}) \end{array}$$

Además, según los Lemas 4.1. y 10.3., se verifica que:

$$mcd(2n-\gamma, 2n-\overline{\gamma}, \gamma+\overline{\gamma}-2n) \underset{\text{Lema 4.1.}}{=} mcd(n, \gamma, \overline{\gamma}) \underset{\text{Lema 10.3.}}{=} mcd(\gamma, \overline{\gamma}, 2n, \gamma+\overline{\gamma})$$

y, por tanto, una terna pitagórica ordenada con semiperímetro $s = n$ es primitiva si y sólo si la cuaterna pitagórica ligada de primera especie no isósceles correspondiente es primitiva.

Ejemplo 10.12. Para $n = 42$, como $2n^2 = 3528$, y

$$\{\gamma \in Div(3528) : 42 < \gamma < 42\sqrt{2}\} = \{49, 56\}$$

entonces, la correspondencia descrita en el Teorema 10.17. es la siguiente:

$$T^{s=42}_{\text{ordenadas}} \to \{\gamma \in Div(3528) : 42 < \gamma < 42\sqrt{2}\} \to ©^{q_r=42}_{\text{ligadas de primera especie no isósceles}}$$

$(84+\gamma, 84+\overline{\gamma}, 84+\gamma+\overline{\gamma})$	$\to$	γ	$\to$	$(\gamma, \overline{\gamma}, 84, \gamma+\overline{\gamma})$	$mcd(84, \gamma, \overline{\gamma})$
$(133, 156, 205)$	$\to$	49	$\to$	$(49, 72, 84, 121)$	1
$(140, 147, 203)$	$\to$	56	$\to$	$(56, 63, 84, 119)$	7

Además, como $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ tiene dos factores primos impares, según el Teorema 4.8., el número de cuaternas pitagóricas ligadas de primera especie no isósceles con inradio $q_r = 42$ que son primitivas es menor o igual que $2^2 - 1 = 3$, de hecho, es igual a $1 < 3$:

$$\{(49, 72, 84, 121)\}$$

Definición 10.6. Una cuaterna pitagórica ordenada $(a, b, c, d) \in ©$ se dice que es de sumas simétricas si $a + d = b + c$.

Teorema 10.18. Si $(a, b, c, d) \in ©$ es una cuaterna pitagorcia de sumas simétricas con inradio $q_r \in \mathbb{N}$ y semiperímetro $q_s \in \mathbb{N}$, se verifica que:

① $\begin{cases} q_r = a \\ q_s = a + d \end{cases}$

② $bc = q_r q_s$

③ $a^2 = (b-a)(c-a)$ (es decir, $b - a$ y $c - a$ son dos divisores gemelos de a^2)

Demostración:

① $\begin{cases} q_r = \dfrac{a+b+c-d}{2} = \dfrac{2a}{2} = a \\ q_s = \dfrac{a+b+c+d}{2} = \dfrac{2(a+d)}{2} = a + d \end{cases}$

② Como $a + d = b + c$, entonces:

$$(a+d)^2 = (b+c)^2$$
$$a^2 + d^2 + 2ad = b^2 + c^2 + 2bc$$
$$2a^2 + 2ad = 2bc$$
$$a(a+d) = bc$$
$$q_r q_s = bc$$

③ Según el Teorema 10.3.:

$$a^2 \underset{q_r=a}{=} q_r^2 + (q_r - a)^2 \underset{*}{=} (d-c)(d-b) \underset{a+d=b+c}{=} (b-a)(c-a)$$

Teorema 10.19. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el número de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas con inradio $q_r = n$ es:

$$ss^{(n)} = Card\{\gamma \in Div(n^2) : \gamma \leq n\} = \frac{d(n^2)+1}{2}$$

Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, según el Teorema 10.18:

$$\forall\ \gamma \in Div(n^2) : (a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, d_\gamma) = \left(n, n+\gamma, n+\frac{n^2}{\gamma}, n+\gamma+\frac{n^2}{\gamma}\right) = (n, n+\gamma, n+\overline{\gamma}, n+\gamma+\overline{\gamma})$$

son las únicas cuaternas pitagóricas de sumas simétricas con inradio n. Además, como, para cada $\gamma \in Div(n^2)$, se verifica que:

$$\left(a_{\overline{\gamma}}, b_{\overline{\gamma}}, c_{\overline{\gamma}}, d_{\overline{\gamma}}\right) = \left(n, n+\overline{\gamma}, n+\frac{n^2}{\overline{\gamma}}, n+\overline{\gamma}+\frac{n^2}{\overline{\gamma}}\right) = (n, n+\overline{\gamma}, n+\gamma, n+\overline{\gamma}+\gamma) = (a_\gamma, c_\gamma, b_\gamma, d_\gamma)$$

entonces, cada par de catetos mayores se repite (salvo el orden de éstos) exactamente dos veces y, por tanto, el número de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas $(a,b,c,d) \in$ © distintas (salvo el orden de los catetos mayores) tales que su inradio es igual a n viene dado por:

$$ss^{(n)} = Card\{\gamma \in Div(n^2) : \gamma \leq n\} = \frac{d(n^2)+1}{2}$$

ya que:

$$\forall\ \gamma \in Div(n^2)\ /\ \gamma \leq n : \begin{cases} a_\gamma = n < n+\gamma = b_\gamma \\ c_\gamma = n+\overline{\gamma} < n+\gamma+\overline{\gamma} = d_\gamma \end{cases}$$

y:

$$n+\gamma = b_\gamma \leq c_\gamma = n+\frac{n^2}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma \leq \frac{n^2}{\gamma} \Leftrightarrow \gamma^2 \leq n^2 \Leftrightarrow \gamma \leq n$$

Corolario 10.6. Existe una sucesión $((a_n, b_n, c_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas, todas ellas primitivas y tales que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : q_r^{(a_n, b_n, c_n, d_n)} = n$$

Demostración:

Teniendo en cuenta el Teorema 10.19., basta con considerar la sucesión de cuaternas pitagóricas de sumas simétricas cuyo término general es:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : (a_n, b_n, c_n, d_n) = (n, n+1, n^2+n, n^2+n+1)$$

que verifica las condiciones del enunciado, ya que:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} : mcd(n, n+1) = 1$$

<u>Ejemplo 10.13.</u> Para $n = 6$, como $n^2 = 36 = 2^2 3^2$ y:

$$Div(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

entonces:

$$ss^{(6)} = \frac{d(36)+1}{2} = \frac{(2+1)(2+1)+1}{2} = 5$$

siendo:

$$\{\gamma \in Div(36) : \gamma \leq 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

y las cuaternas pitagóricas de sumas simétricas correspondientes:

$$\begin{cases} \gamma = 1 \ \rightarrow \ (6, 7, 42, 43) \\ \gamma = 2 \ \rightarrow \ (6, 8, 24, 26) \\ \gamma = 3 \ \rightarrow \ (6, 9, 18, 21) \\ \gamma = 4 \ \rightarrow \ (6, 10, 15, 19) \\ \gamma = 6 \ \rightarrow \ (6, 12, 12, 18) \end{cases}$$

<u>Teorema 10.20.</u> Para cada $n \in \mathbb{N}$:

① Existe una única cuaterna pitagórica $(a, b, c, d) \in \copyright$ con inradio $q_r = n$ que es ligada y de sumas simétricas.

② Existen exactamente n cuaternas pitagóricas $\{(a_i, b_i, c_i, d_i) \in \copyright : i \in \{1, ..., n\}\}$ con inradio $q_r = n$ de forma que:

$$\forall \ i \in \{1, ..., n\} : d_i = c_i + 1$$

siendo todas ellas primitivas (ya que cualesquiera dos números naturales consecutivos siempre son primos entre sí). Además:

❶ Únicamente una de estas n cuaternas pitagóricas es de sumas simétricas.

❷ Si $n = 1$, la cuaterna pitagórica correspondiente, (1,2,2,3), es ligada (tanto de primera como de segunda especie) y, si $n \geq 2$, entonces, ninguna de estas n cuaternas pitagóricas es ligada de primera especie y exactamente una de ellas es ligada de segunda especie.

<u>Demostración:</u>

① La existencia está clara, ya que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la cuaterna pitagórica $(n, 2n, 2n, 3n) \in \copyright$ tiene inradio $q_r = n$, es ligada y de sumas simétricas. Además, si $(a, b, c, d) \in \copyright$ es una cuaterna pitagórica de sumas simétricas y ligada de primera especie (si fuese ligada de segunda especie se razonaría de forma totalmente análoga), entonces:

$$\begin{cases} d = b + c - a \\ d = a + b \end{cases} \Rightarrow c = 2a$$

por lo que:

$$0 \underset{\text{pitagórica}}{\overset{\text{cuaterna}}{=}} a^2+b^2+(2a)^2-(a+b)^2=4a^2-2ab=2a(2a-b) \underset{a\neq 0}{\Rightarrow} b=2a \Rightarrow d=a+2a=3a$$

luego:

$$n=q_r=\frac{a+2a+2a-3a}{2}=a$$

y, por tanto, $(a,b,c,d)=(n,2n,2n,3n)$.

② Si $(a,b,c,d)\in ©$ es una cuaterna pitagórica con inradio $q_r=n$ y tal que:

$$d=c+1$$

entonces:

☺ $0 \underset{\text{pitagórica}}{\overset{\text{cuaterna}}{=}} a^2+b^2+c^2-(c+1)^2=a^2+b^2-2c-1 \Rightarrow c=\dfrac{a^2+b^2-1}{2}$

☹ $n=q_r=\dfrac{a+b+c-(c+1)}{2}=\dfrac{a+b-1}{2}$

por lo que a y b han de tener distinta paridad, luego:

$$\exists\ k\in 2\mathbb{N}-1 : b=a+k$$

y, por tanto:

$$n=\frac{a+a+k-1}{2}=\frac{2a+k-1}{2}\Rightarrow k=2(n-a)+1$$

lo cual implica que $a\in\{1,\dots,n\}$. Finalmente, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, la cuaterna pitagórica correspondiente es:

$$\begin{aligned}(a_i,b_i,c_i,d_i)&=\left(i,i+k_i,\frac{i^2+(i+k_i)^2-1}{2},\frac{i^2+(i+k_i)^2+1}{2}\right)\\&=\left(i,2n+1-i,\frac{i^2+(2n+1-i)^2-1}{2},\frac{i^2+(2n+1-i)^2+1}{2}\right)\end{aligned}$$

Además:

❶ Si una de estas cuaternas pitagóricas es de sumas simétricas, entonces:

$$0=i+\frac{i^2+(i+k_i)^2+1}{2}-\left[i+k_i+\frac{i^2+(i+k_i)^2-1}{2}\right]=1-k_i\Rightarrow k_i=1$$

por lo que:

$$1=k_i=2(n-i)+1\Rightarrow i=n$$

y, por tanto, la única de estas cuaternas pitagóricas que es de sumas simétricas es:

$$(a_n,b_n,c_n,d_n)=(n,n+1,n^2+n,n^2+n+1)$$

❷ Si $n=1$, entonces, $i=1$, siendo:

$$k_1 = 2(1-1)+1 = 1$$

y, por tanto, la cuaterna pitagórica correspondiente es (1,2,2,3), que es ligada (tanto de primera como de segunda especie).

❷ Si $n \geq 2$ y una de estas cuaternas pitagóricas es ligada, puede ocurrir que:

☺ Sea de primera especie, en cuyo caso:

$$0 = \frac{i^2+(i+k_i)^2+1}{2} - (i+i+k_i) = i^2 + (k_i-2)i + \frac{(k_i-1)^2}{2}$$

por lo que:

$$i = \frac{2-k_i \pm \sqrt{2-k_i^2}}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow k_i = 1 \Rightarrow n \underset{\text{antes}}{\overset{\text{visto}}{=}} i = \frac{2-1\pm 1}{2} = \begin{cases} 0 \to \text{ no} \\ \text{ó} \\ 1 \to \text{ no} \end{cases}$$

y, por tanto, ninguna de estas n cuaternas pitagóricas es ligada de primera especie.

☹ Sea de segunda especie, en cuyo caso:

$$0 = \frac{i^2+(i+k_i)^2+1}{2} - \left(i + \frac{i^2+(i+k_i)^2-1}{2}\right) = 1-i \Rightarrow i = 1$$

por lo que:

$$k_1 = 2(n-1)+1 = 2n-1$$

y, por tanto, la única de estas cuaternas pitagóricas que es ligada de segunda especie es:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 2n, 2n^2, 2n^2+1)$$

<u>Teorema 10.21.</u> Si $(a,b,c,d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica, entonces, $(d-a)^2+(d-b)^2+(d-c)^2$ no es un cuadrado perfecto, es decir, $d-a$, $d-b$ y $d-c$ no pueden ser los catetos de otra cuaterna pitagórica.

<u>Demostración:</u>

Vamos a distinguir dos casos:

① Si $(a,b,c,d) \in ©$ es una cuaterna pitagórica primitiva, entonces, d es impar y uno y sólo uno de los elementos del conjunto $\{a,b,c\}$ también lo es, ya que:

❶ Si los tres elementos del conjunto $\{a,b,c\}$ fuesen pares, entonces, d sería par, por lo que:

$$2 \mid mcd(a,b,c,d) = 1$$

lo cual es imposible.

❷ Si los tres elementos del conjunto $\{a,b,c\}$ fuesen impares, entonces:

$$d^2 \equiv 3 \pmod 4$$

lo cual es imposible.

❸ Si exactamente dos de los tres elementos del conjunto $\{a, b, c\}$ fuesen impares, entonces:

$$d^2 \equiv 2 \pmod 4$$

lo cual es imposible.

Resulta, pues, que:

$$\left\{\begin{array}{r} a+b+c \equiv 1 \pmod 2 \\ d \equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right. \Rightarrow d(a+b+c) \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 2d(a+b+c) \equiv 2 \pmod 4$$

por lo que:

$$\begin{aligned}(d-a)^2+(d-b)^2+(d-c)^2 &= 3d^2+a^2+b^2+c^2-2d(a+b+c) \\ &= 4d^2-2d(a+b+c) \\ &\equiv 2 \pmod 4\end{aligned}$$

y, por tanto, $(d-a)^2+(d-b)^2+(d-c)^2$ no puede ser un cuadrado perfecto.

② Si $(a, b, c, d) \in ©$ fuese una cuaterna pitagórica cualquiera con $mcd(a, b, c, d) = k \in \mathbb{N}$ y $(d-a)^2+(d-b)^2+(d-c)^2$ fuese un cuadrado perfecto, como:

$$\left\{\begin{array}{l} k \mid d-a \\ k \mid d-b \\ k \mid d-c \end{array}\right.$$

y:

$$\begin{aligned}k^2\left[\left(\frac{d}{k}-\frac{a}{k}\right)^2+\left(\frac{d}{k}-\frac{b}{k}\right)^2+\left(\frac{d}{k}-\frac{c}{k}\right)^2\right] &= k^2\left[\left(\frac{d-a}{k}\right)^2+\left(\frac{d-b}{k}\right)^2+\left(\frac{d-c}{k}\right)^2\right] \\ &= (d-a)^2+(d-b)^2+(d-c)^2\end{aligned}$$

entonces, $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}, \frac{d}{k}\right)$ es una cuaterna pitagórica primitiva y $\left(\frac{d}{k}-\frac{a}{k}\right)^2+\left(\frac{d}{k}-\frac{b}{k}\right)^2+\left(\frac{d}{k}-\frac{c}{k}\right)^2$ sería un cuadrado perfecto, lo cual es imposible, según se prueba en el caso anterior.

<u>Ejercicio 10.1.</u> Se dice que $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{N}^5$ es una “quinteta pitagórica” si se verifica que:

☺ $a+b+c+d = 2e$

☹ $bc+bd+cd = e^2$

Probar que:

① $(1, 2, 2, 3, 4)$, $(2, 10, 7, 3, 11)$ y $(2, 7, 6, 3, 9)$ son quintetas pitagóricas.

② Si $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{N}^5$ es una quinteta pitagórica, entonces, $(e-b, e-c, e-d, e-a)$ es una cuaterna pitagórica.

Solución:

① $(1,2,2,3,4)$, $(2,10,7,3,11)$ y $(2,7,6,3,9)$ son quintetas pitagóricas, ya que:

☺ $$\begin{cases} 1+2+2+3=2\cdot 4 \\ 2+10+7+3=2\cdot 11 \\ 2+7+6+3=2\cdot 9 \end{cases}$$

☹ $$\begin{cases} 2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 3=4^2 \\ 10\cdot 7+10\cdot 3+7\cdot 3=11^2 \\ 7\cdot 6+7\cdot 3+6\cdot 3=9^2 \end{cases}$$

② Como:

$$\begin{aligned} \underline{b+c+d} &= 2e-a \\ b^2+c^2+d^2+2(bc+bd+cd) &= 4e^2+a^2-4ae \\ b^2+c^2+d^2+2e^2 &= 4e^2+a^2-4ae \\ \overline{b^2+c^2+d^2} &= 2e^2+a^2-4ae \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} (e-b)^2+(e-c)^2+(e-d)^2 &= 3e^2+\overline{b^2+c^2+d^2}-2e\left(\underline{b+c+d}\right) \\ &= 3e^2+2e^2+a^2-4ae-2e(2e-a) \\ &= e^2+a^2-2ae \\ &= (e-a)^2 \end{aligned}$$

y, por tanto, $(e-b,e-c,e-d,e-a)$ es una cuaterna pitagórica.

Ejercicio 10.2. Si existiese un ortoedro perfecto (ladrillo de Euler para el que la longitud de su diagonal principal es un número natural), entonces, la longitud de alguna de sus aristas sería múltiplo de 7.

Solución:

Si u, v y w fuesen las longitudes de las aristas de un ortoedro perfecto, entonces, (u,v), (u,w) y (v,w) serían pares de catetos de tres ternas pitagóricas, por lo que, si ocurriese que:

$$\begin{cases} u \not\equiv 0 \pmod 7 \\ v \not\equiv 0 \pmod 7 \\ w \not\equiv 0 \pmod 7 \end{cases}$$

como los restos cuadráticos no nulos módulo 7 son $\{1,2,4\}$, necesariamente, habría de ocurrir que:

$$\begin{cases} u^2 \equiv v^2 \pmod 7 \\ u^2 \equiv w^2 \pmod 7 \\ v^2 \equiv w^2 \pmod 7 \end{cases} \Rightarrow u^2 \equiv v^2 \equiv w^2 \pmod 7 \Rightarrow u^2+v^2+w^2 \equiv 3u^2 \pmod 7$$

y, por tanto, $u^2+v^2+w^2$ no podría ser un cuadrado perfecto, llegándose a una contradicción.

<u>Ejercicio 10.3.</u> No existe ningún ortoedro perfecto (ladrillo de Euler para el que la longitud de su diagonal principal es un número natural) primitivo (es decir, que la cuaterna pitagórica (u, v, w, t) formada por las longitudes de sus aristas y la longitud de su diagonal principal sea primitiva) tal que la longitud de su diagonal principal sea múltiplo de 7.

<u>Solución:</u>

Si u, v, w y t fuesen las longitudes de las tres aristas y de la diagonal principal de un ortoedro perfecto, como los restos cuadráticos módulo 7 son $\{0, 1, 2, 4\}$, si t fuese múltiplo de 7, ocurriría que:

$$u^2 + v^2 + w^2 = t^2 \equiv 0 \pmod{7}$$

por lo que las única combinaciones posibles serían:

① $1 + 2 + 4 = 7 \equiv 0 \pmod{7}$, en cuyo caso, los restos cuadráticos módulo 7 de u, v y w deberían ser no nulos y distintos, lo cual es imposible, ya que (u, v), (u, w) y (v, w) serían pares de catetos de tres ternas pitagóricas.

② $0 + 0 + 0 = 0 \equiv 0 \pmod{7}$, en cuyo caso, u^2, v^2 y v^2 y, por tanto, u, v y w serían múltiplos de 7, lo cual significa que la cuaterna pitagórica (u, v, w, t) no sería primitiva.