Capítulo 2 Inradio

El *inradio* de un triángulo es el radio de su circunferencia inscrita. Es llamativo el hecho de que, en el caso de triángulos cuyos lados formen una terna pitagórica, el inradio sea siempre un número natural, así como que, para cualquier número natural, exista, al menos, una terna pitagórica cuyo inradio sea igual a dicho número. Sólo existe una terna pitagórica con inradio igual a 1 y dos ternas pitagóricas con inradio igual a 2, pero, para todos los demás números naturales, existen, al menos, tres ternas pitagóricas cuyo inradio es igual a dicho número y, únicamente en los números primos impares, existen tres.

Surge, de forma natural, contabilizar el número de ternas pitagóricas que tienen como inradio un cierto número natural r. Para ello, hemos caracterizado las ternas pitagóricas en función de su inradio r y de los divisores de $2r^2$, de forma que cada par de divisores gemelos de $2r^2$ genera una terna pitagórica con inradio r, por lo que el número de ternas pitagóricas cuyo inradio es igual a r será igual a la mitad del número de divisores de $2r^2$. También se han caracterizado aquellas ternas pitagóricas con inradio igual a r que son ordenadas y se ha calculado cuántas de ellas son primitivas.

Otra cuestión que llama la atención es que, cuando el inradio r de una terna pitagórica es un número natural impar, su semiperímetro s es par y, sin embargo, cuando el inradio r es un número natural par, el semiperímetro s es, en ocasiones par y en otras impar, razón por la cual existe un mayor número de ternas pitagóricas cuyo semiperímetro es un número par. De la misma manera, se observa que, si el inradio r de una terna pitagórica es congruente con ± 1 módulo 3, entonces, su semiperímetro s es múltiplo de 3, y, si r es múltiplo de 3, entonces, el semiperímetro s es en unas ocasiones múltiplo de 3 y en otras ocasiones no.

Al comparar la relación de orden entre lados, inradio y exinradios de una terna pitagórica ordenada con inradio r, sorprende la relación entre el cateto menor a de la terna pitagórica y el exinradio mediano r_b de ésta, ya que, en algunos casos $a < r_b$, en otros casos se da la igualdad y en otros casos $a > r_b$, lo cual está determinado por el número de divisores de $2r^2$ menores que $\sqrt{2}r$ que se encuentran en los intervalos $(0, r)$ ó $(r, \sqrt{2}r)$. Únicamente en las ternas pitagóricas proporcionales a la terna $(3, 4, 5)$ se

2. Según el apartado anterior, $2r^2 = (c-a)(c-b)$, por lo que $d = c-b$ y $\overline{d} = c-a$ son divisores (que denominaremos *divisores gemelos*) de $2r^2$ y, como, según el teorema 1.4,
$$r = \frac{a+b-c}{2},$$
resulta que
$$\begin{cases} a = 2r - b + c = 2r + d, \\ b = 2r - a + c = 2r + \overline{d}, \\ c = a + b - 2r = 2r + d + \overline{d}. \end{cases}$$

$\square$

Teorema 2.5. *Dado $k \in \mathbb{N}$, el número de ternas pitagóricas (a, b, c) distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a k viene dado por*
$$n^r(k) = \frac{d(2k^2)}{2} = d_{<\sqrt{2}k}(2k^2),$$
siendo $d_{<\sqrt{2}k}(2k^2)$ el número de divisores de $2k^2$ que son menores que $\sqrt{2}k$. Además, haciendo una elección adecuada de dichos divisores, se puede conseguir que todas estas ternas pitagóricas sean ordenadas.

Demostración. Según el teorema 2.4,
$$(a_d, b_d, c_d) = (2k + d, 2k + \overline{d}, 2k + d + \overline{d}),$$
con $d \in \mathrm{Div}(2k^2)$, son las únicas ternas pitagóricas con inradio igual a k. Además, como, para cada $d \in \mathrm{Div}(2k^2)$, se verifica que
$$\left(a_{\overline{d}}, b_{\overline{d}}, c_{\overline{d}}\right) = (2k + \overline{d}, 2k + d, 2k + \overline{d} + d) = (b_d, a_d, c_d)\,,$$
entonces, cada par de catetos se repite (salvo el orden de éstos) exactamente dos veces y, por tanto, el número de ternas pitagóricas (a, b, c) distintas (salvo el orden de los catetos) tales que su inradio es igual a k viene dado por
$$n^r(k) = \frac{d(2k^2)}{2} = d_{<\sqrt{2}k}(2k^2).$$
Además, se puede conseguir que estas $n_r(k)$ ternas pitagóricas estén ordenadas, ya que, para cualquier $d \in \mathrm{Div}(2k^2)$ tal que $d < \sqrt{2}k$ $(*)$, se verifica que
$$a_d = 2k + d \underset{*}{<} 2k + \frac{2k^2}{d} = 2k + \overline{d} = b_d < b_d + d = c_d,$$
y, por tanto, el número de ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es igual a k viene dado por
$$n_o^r(k) = d_{<\sqrt{2}k}(2k^2) = \frac{d(2k^2)}{2} = n^r(k),$$
siendo $d_{<\sqrt{2}k}(2k^2)$ el número de divisores de $2k^2$ que son menores que $\sqrt{2}k$. $\square$

por lo que el teorema 2.5 nos asegura que $n^r(10) = \frac{12}{2} = 6$ y, además,

i	d_i	$\overline{d}_i$	$(2r + d_i, 2r + \overline{d}_i, 2r + d_i + \overline{d}_i)$	$\mathcal{T}^r(10)$	s
1	1	200	$(20+1, 20+200, 20+1+200)$	$(21, 220, 221)$	$231 \equiv 0(\text{mód } 3)$
2	2	100	$(20+2, 20+100, 20+2+100)$	$(22, 120, 122)$	$132 \equiv 0(\text{mód } 3)$
3	4	50	$(20+4, 20+50, 20+4+50)$	$(24, 70, 74)$	$84 \equiv 0(\text{mód } 3)$
4	5	40	$(20+5, 20+40, 20+5+40)$	$(25, 60, 65)$	$75 \equiv 0(\text{mód } 3)$
5	8	25	$(20+8, 20+25, 20+8+25)$	$(28, 45, 53)$	$63 \equiv 0(\text{mód } 3)$
6	10	20	$(20+10, 20+20, 20+10+20)$	$(30, 40, 50)$	$60 \equiv 0(\text{mód } 3)$

2. Si $r = 27 = 3^3$, como $2r^2 = 1458 = 2 \cdot 3^6$, entonces, $d(2r^2) = (1+1)(6+1) = 14$, siendo

$$\text{Div}(1458) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54, 81, 162, 243, 486, 729, 1458\},$$

por lo que el teorema 2.5 nos asegura que $n^r(27) = \frac{14}{2} = 7$ y, como

$$\left\{d \in \text{Div}(1458) : d \not\equiv 0(\text{mód } 3)\right\} = \{1, 2\},$$

resulta que hay exactamente $d(2) = 2$ ternas pitagóricas con inradio igual a 27 tales que su semiperímetro s es un número natural que no es múltiplo de 3. Además,

i	d_i	$\overline{d}_i$	$\mathcal{T}^r(27)$	s
1	1	1458	$(55, 1512, 1513)$	$1540 \not\equiv 0(\text{mód } 3)$
2	2	729	$(56, 783, 785)$	$812 \not\equiv 0(\text{mód } 3)$
3	3	486	$(57, 540, 543)$	$570 \equiv 0(\text{mód } 3)$
4	6	243	$(60, 297, 303)$	$330 \equiv 0(\text{mód } 3)$
5	9	162	$(63, 216, 225)$	$252 \equiv 0(\text{mód } 3)$
6	18	81	$(72, 135, 153)$	$180 \equiv 0(\text{mód } 3)$
7	27	54	$(81, 108, 135)$	$162 \equiv 0(\text{mód } 3)$

Pueden comprobarse todos estos resultados haciendo uso del programa 2.1 (pág. 330).

Corolario 2.7.1. *Dado $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \equiv \pm 1(\text{ mód } 6)$, para todas las ternas pitagóricas (a, b, c) tales que su inradio es igual a r, se verifica que su semiperímetro s es un número natural múltiplo de 6.*

Demostración. Es consecuencia directa del primer apartado del teorema 2.6 y del primer apartado del teorema 2.7. □

Lema 2.1. *Si $r \in \mathbb{N}$ y $(d, \overline{d})$ es un par de divisores gemelos de $2r^2$, entonces,*

$$\text{mcd}\left(2r + d, 2r + \overline{d}, 2r + d + \overline{d}\right) = \text{mcd}\left(r, d, \overline{d}\right).$$

Demostración.

1. ¿$\operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}) \mid \operatorname{mcd}(2r+d, 2r+\overline{d}, 2r+d+\overline{d})$? Como

$$\begin{cases} \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|r \\ \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|d \\ \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|\overline{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|(2r+d), \\ \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|(2r+\overline{d}), \\ \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|(2r+d+\overline{d}), \end{cases}$$

   entonces,

$$\operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}) \mid \operatorname{mcd}(2r+d, 2r+\overline{d}, 2r+d+\overline{d}).$$

2. ¿$\operatorname{mcd}(2r+d, 2r+\overline{d}, 2r+d+\overline{d}) \mid \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})$? Llamando

$$l = \operatorname{mcd}(2r+d, 2r+\overline{d}, 2r+d+\overline{d}),$$

   como

$$\begin{cases} l|(2r+d) \\ l|(2r+\overline{d}) \\ l|(2r+d+\overline{d}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l|d = 2r+d+\overline{d}-(2r+\overline{d}), \\ l|\overline{d} = 2r+d+\overline{d}-(2r+d), \end{cases}$$

   entonces,

$$l^2|(d\cdot\overline{d}) = 2r^2 \Rightarrow l^2|r^2 \Rightarrow l|r,$$

   por lo que

$$\operatorname{mcd}(2r+d, 2r+\overline{d}, 2r+d+\overline{d}) = l \mid \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}).$$

□

Lema 2.2. *Si $r\in\mathbb{N}$ y $(d,\overline{d})$ es un par de divisores gemelos de $2r^2$, entonces,*

$$\operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}) = \operatorname{mcd}(d,\overline{d}).$$

Demostración.

1. ¿$\operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}) \mid \operatorname{mcd}(d,\overline{d})$? Como

$$\begin{cases} \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|d \\ \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d})|\overline{d} \end{cases}$$

   entonces,

$$\operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}) \mid \operatorname{mcd}(d,\overline{d}).$$

2. Llamando $l = \operatorname{mcd}(d,\overline{d})$, como

$$\begin{cases} l|d \\ l|\overline{d} \end{cases} \Rightarrow l^2|(d\cdot\overline{d}) = 2r^2 \Rightarrow l^2|r^2 \Rightarrow l|r,$$

   entonces,

$$\operatorname{mcd}(d,\overline{d}) = l \mid \operatorname{mcd}(r,d,\overline{d}).$$

□

utilización del programa 2.1 (pág. 330).

Solución Ejercicio 2.6. Vamos a probar únicamente el primer apartado, ya que la demostración de los otros dos es totalmente análoga. Si (a, b, c) y (u, v, w) fuesen dos ternas pitagóricas distintas con el mismo inradio y el mismo semiperímetro, según el teorema 1.4 (pág. 26),

$$\begin{cases} \dfrac{a+b-c}{2} \underset{*}{=} \dfrac{u+v-w}{2} \\ \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{u+v+w}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=u+v, \\ c=w, \end{cases}$$

por lo que, según el teorema de Pitágoras $(*)$,

$$c^2 + 2ab \underset{*}{=} a^2 + b^2 + 2ab = u^2 + v^2 + 2uv \underset{*}{=} w^2 + 2uv \Rightarrow ab = uv$$

resultando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a+b=u+v \\ ab=uv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=u, \\ b=v, \end{cases} \\ \quad \text{ó} \\ \begin{cases} a=v, \\ b=u, \end{cases} \end{cases}$$

y llegándose a una contradicción, ya que las ternas pitagóricas (a, b, c) y (u, v, c) son distintas. Estos resultados pueden verificarse utilizando el programa 2.1 (pág. 330).

Solución Ejercicio 2.7. Para cada número primo p, como

$$\mathrm{Div}_{<\sqrt{2}p}(2p^2) = \begin{cases} \{1,2\} & \text{si} \quad p=2, \\ \{1,2,p\} & \text{si} \quad p \geq 3, \end{cases}$$

entonces, según el teorema 2.5 (pág. 50):

1. Para $p = 2$, existen exactamente dos ternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a p, siendo
$$\begin{cases} \mathrm{mcd}(1,8)=1 \\ \mathrm{mcd}(2,4)=2 \neq 1 \end{cases},$$
por lo que los lemas 2.1 (pág. 58) y 2.2 (pág. 59) nos aseguran que únicamente una de ellas es primitiva, siendo ésta
$$(2p+1, 2p^2+2p, 2p^2+2p+1) = (5, 12, 13).$$

2. Para $p \geq 3$, existen exactamente tres ternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a p, siendo
$$\begin{cases} \mathrm{mcd}(1,2p^2)=1, \\ \mathrm{mcd}(2,p^2)=1, \\ \mathrm{mcd}(p,2p)=p \neq 1, \end{cases}$$
por lo que los lemas 2.1 (pág. 58) y 2.2 (pág. 59) nos aseguran que únicamente dos de ellas son primitivas:

a) La terna pitagórica $(2p+1, 2p^2+2p, 2p^2+2p+1)$, cuyo cateto menor es un número impar. El programa 2.4 (pág. 330), introduciendo un valor para $n \in \mathbb{N}$, nos muestra los ternas pitagóricas de este tipo que se obtienen para cada uno de los n primeros números primos.

b) La terna pitagórica $(2p+2, p^2+2p, p^2+2p+2)$, cuyo cateto menor es un número par. El programa 2.5 (pág. 331), introduciendo un valor para $n \in \mathbb{N}$, nos muestra los ternas pitagóricas de este tipo que se obtienen para cada uno de los n primeros números primos impares.

Capítulo 3 (pág. 81)

Solución Ejercicio 3.1. Basta con emplear los resultados teóricos desarrollados a lo largo de este capítulo, pudiéndose comprobar los resultados obtenidos mediante la utilización del programa 3.1 (pág. 331).

Solución Ejercicio 3.2. Basta con emplear los resultados teóricos desarrollados a lo largo de este capítulo, pudiéndose comprobar los resultados obtenidos mediante la utilización del programa 3.2 (pág. 331).

Solución Ejercicio 3.3. Vamos a probar únicamente el primer apartado, ya que la demostración de los otros dos es totalmente análoga. Si (a, b, c) y (u, v, w) fuesen dos ternas pitagóricas con el mismo primer exinradio y el mismo inradio, según el teorema 1.4 (pág. 26),

$$\begin{cases} \dfrac{a-b+c}{2} \underset{*}{=} \dfrac{u-v+w}{2} \\ \dfrac{a+b-c}{2} \underset{*}{=} \dfrac{u+v-w}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-c = v-w, \\ a = u, \end{cases}$$

por lo que, según el teorema de Pitágoras $(*)$,

$$2b^2 + a^2 - 2bc \underset{*}{=} b^2 + c^2 - 2bc = v^2 + w^2 - 2vw \underset{*}{=} 2v^2 + u^2 - 2vw,$$

es decir,

$$b(b-c) = v(v-w),$$

lo cual implica que

$$b = v \Rightarrow c = w,$$

llegándose a una contradicción, ya que las ternas pitagóricas (a, b, c) y (u, v, w) son distintas. Estos resultados pueden verificarse utilizando el programa 3.1 (pág. 331).

Solución Ejercicio 3.4. Vamos a probar únicamente el primer apartado, ya que la demostración de los otros dos es totalmente análoga. Si (a, b, c) y (u, v, w) fuesen dos ternas pitagóricas con el mismo segundo exinradio y el mismo inradio, según el