

Surge este capítulo de la observación de que, mientras en la gran mayoría de ternas pitagóricas ordenadas, el cociente entre el segundo exinradio y el inradio es un número natural, en los cocientes entre el primer exinradio o el semiperímetro entre el inradio, se da esta circunstancia únicamente en las ternas pitagóricas que son proporcionales a $(3, 4, 5)$, siendo, en estos casos, los tres citados cocientes números naturales.

Definición 8.1. Se llaman proporciones radiales menor, mediana y mayor de una terna pitagórica ordenada a los números racionales

$$\begin{cases} \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \frac{r_a}{r}, \\ \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \frac{r_b}{r}, \\ \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = \frac{r_c}{r}. \end{cases}$$

Teorema 8.1. Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) con inradio r y exinradios r_a , r_b y r_c , se verifica que:

1. $\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \frac{a+c}{b}.$
2. $\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \frac{b+c}{a}.$
3. $\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 1.4 (pág. 26) (*) y el teorema de Pitágoras (*'), resulta que:

$$1. \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \frac{r_a}{r} = \frac{\frac{a-b+c}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{(a-b+c)(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} = \frac{2a^2 + 2ac}{2ab} = \frac{a+c}{b}.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} &= \frac{r_b}{r} \underset{*}{=} \frac{\frac{-a+b+c}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{(-a+b+c)(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} \underset{*'}{=} \frac{2b^2+2bc}{2ab} = \frac{b+c}{a}. \\
3. \quad \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} &= \frac{r_c}{r} \underset{*}{=} \frac{\frac{a+b+c}{2}}{\frac{a+b-c}{2}} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.
\end{aligned}$$

□

Corolario 8.1.1. Sean $(\gamma_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_n^{(3)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ las sucesiones de proporciones radiales menores, medianas y mayores, respectivamente, de una sucesión de ternas pitagóricas ordenadas $((a_n, b_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty. \end{cases}$$

1. Si se verifica que

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n = a_n + 1,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(1)} &= 1 + \sqrt{2}. \\
b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(2)} &= 1 + \sqrt{2}. \\
c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(3)} &= 3 + 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2. Si se verifica que

$$\forall n \in \mathbb{N} : c_n = b_n + 1,$$

entonces:

$$\begin{aligned}
a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(1)} &= 1. \\
b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(2)} &= +\infty. \\
c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(3)} &= +\infty.
\end{aligned}$$

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema 8.1, resulta que:

$$\begin{aligned}
1a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + c_n}{b_n}, \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \sqrt{a_n^2 + (a_n + 1)^2}}{a_n + 1}, \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \sqrt{2a_n^2 + 2a_n + 1}}{a_n + 1}, \\
&= 1 + \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$1b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + c_n}{a_n},$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1 + \sqrt{a_n^2 + (a_n + 1)^2}}{a_n}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1 + \sqrt{2a_n^2 + 2a_n + 1}}{a_n}, \\
 &= 1 + \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n + c_n}{a_n + b_n - c_n}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - 1 + b_n + \sqrt{(b_n - 1)^2 + b_n^2}}{b_n - 1 + b_n - \sqrt{(b_n - 1)^2 + b_n^2}}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n - 1 + \sqrt{2b_n^2 - 2b_n + 1}}{2b_n - 1 - \sqrt{2b_n^2 - 2b_n + 1}}, \\
 &= \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \\
 &= 3 + 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + c_n}{b_n}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{c_n^2 - (c_n - 1)^2} + c_n}{c_n - 1}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2c_n - 1} + c_n}{c_n - 1}, \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + c_n}{a_n}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - 1 + c_n}{\sqrt{c_n^2 - (c_n - 1)^2}}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2c_n - 1}{\sqrt{2c_n - 1}}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2c_n - 1}, \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n^{(3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n + c_n}{a_n + b_n - c_n}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(b_n + 1)^2 - b_n^2} + b_n + b_n + 1}{\sqrt{(b_n + 1)^2 - b_n^2} + b_n - (b_n + 1)}, \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2b_n + 1} + 2b_n + 1}{\sqrt{2b_n + 1} - 1}, \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

El programa 8.1 (pág. 320), introduciendo un valor para $m \in \mathbb{N}$, nos muestra los m primeros términos de la sucesión de ternas pitagóricas ordenadas cuyo término

general es $((2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1))_{n \in \mathbb{N}}$, que verifica la hipótesis del segundo apartado de este corolario. También, para cada terna pitagórica de esta sucesión, nos muestra sus respectivas proporciones radiales, permitiéndonos comprobar la tesis de dicho apartado. \square

Teorema 8.2. *Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que*

$$\begin{cases} \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = 2 \\ \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 3 \\ \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = 6 \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{N} / (a, b, c) = (3k, 4k, 5k).$$

Demostración. Tenemos que probar la doble implicación:

\Rightarrow Teniendo en cuenta el teorema 8.1 (*), si

$$\begin{cases} 2 = \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \frac{a+c}{b} \\ 3 = \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \frac{b+c}{a} \\ 6 = \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = \frac{a+b+c}{a+b-c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2b - a \\ c = 3a - b \\ c = \frac{5(a+b)}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3b}{4} \\ c = \frac{5b}{4} \end{cases},$$

entonces, $4|b$ y, además,

$$\exists k = \frac{b}{4} \in \mathbb{N} / (a, b, c) = (3k, 4k, 5k).$$

\Leftarrow Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(a, b, c) = (3k, 4k, 5k)$, teniendo en cuenta el teorema 1.4 (*) (pág. 26), resulta que

$$\begin{cases} \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \frac{r_a}{r} = \frac{\frac{3k-4k+5k}{2}}{\frac{3k+4k-5k}{2}} = 2, \\ \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \frac{r_b}{r} = \frac{\frac{-3k+4k+5k}{2}}{\frac{3k+4k-5k}{2}} = 3, \\ \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = \frac{r_c}{r} = \frac{\frac{3k+4k+5k}{2}}{\frac{3k+4k-5k}{2}} = 6. \end{cases}$$

\square

Teorema 8.3. *Dadas dos ternas pitagóricas ordenadas (a, b, c) y (u, v, w) , se verifica que:*

1. $\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(1)} \iff \exists k \in \mathbb{Q} / (u, v, w) = (ka, kb, kc).$
2. $\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(2)} \iff \exists k \in \mathbb{Q} / (u, v, w) = (ka, kb, kc).$

Demostración.

1. Tenemos que probar la doble implicación:

$\boxed{\Leftarrow}$ Si existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que $(u, v, w) = (ka, kb, kc)$, teniendo en cuenta el teorema 8.1 (*), se verifica que

$$\gamma_{(u,v,w)}^{(1)} = \frac{u+w}{v} = \frac{ka+kc}{kb} = \frac{a+c}{b} = \gamma_{(a,b,c)}^{(1)}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(1)}$, teniendo en cuenta el teorema 8.1 (*), se verifica que

$$1 = \frac{\gamma_{(a,b,c)}^{(1)}}{\gamma_{(u,v,w)}^{(1)}} = \frac{\frac{a+c}{b}}{\frac{u+w}{v}} = \frac{v}{b} \frac{a+c}{u+w},$$

por lo que, tomando

$$k = \frac{u+w}{a+c} = \frac{v}{b} \in \mathbb{Q}$$

y utilizando el teorema de Pitágoras (*), como $v = kb$ (*'), resulta que

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(u+w)^2}{(a+c)^2}, \\ &= \frac{u^2 + w^2 + 2uw}{a^2 + c^2 + 2ac}, \\ &= \frac{2u^2 + v^2 + 2uw}{2a^2 + b^2 + 2ac}, \\ &= \frac{2u^2 + k^2b^2 + 2uw}{2a^2 + b^2 + 2ac}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 2k^2a^2 + k^2b^2 + 2k^2ac &= 2u^2 + k^2b^2 + 2uw, \\ 2k^2a^2 + 2k^2ac &= 2u^2 + 2uw, \\ k^2a^2 + k^2ac &= u^2 + uw, \\ k^2a(a+c) &= u(u+w), \\ k^2a &= u \left(\frac{u+w}{a+c} \right), \\ ka &= u, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$w^2 = u^2 + v^2 = (ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 \Rightarrow w = kc,$$

lo cual significa que

$$\exists k \in \mathbb{Q} / (u, v, w) = (ka, kb, kc).$$

2. Tenemos que probar la doble implicación:

$\boxed{\Leftarrow}$ Si existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que $(u, v, w) = (ka, kb, kc)$, teniendo en cuenta el teorema 8.1 (*), se verifica que

$$\gamma_{(u,v,w)}^{(2)} = \frac{v+w}{u} = \frac{kb+kc}{ka} = \frac{b+c}{a} = \gamma_{(a,b,c)}^{(2)}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(2)}$, teniendo en cuenta el teorema 8.1 (*), se verifica que

$$1 = \frac{\gamma_{(a,b,c)}^{(2)}}{\gamma_{(u,v,w)}^{(2)}} = \frac{\frac{b+c}{a}}{\frac{v+w}{u}} = \frac{u}{a} \frac{b+c}{v+w},$$

por lo que, tomando

$$k = \frac{v+w}{b+c} = \frac{u}{a} \in \mathbb{Q}$$

y utilizando el teorema de Pitágoras (*), como $u = ka$ (*'), resulta que

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{(v+w)^2}{(b+c)^2}, \\ &= \frac{v^2 + w^2 + 2vw}{b^2 + c^2 + 2bc}, \\ &= \frac{u^2 + 2v^2 + 2vw}{a^2 + 2b^2 + 2bc}, \\ &= \frac{k^2 a^2 + 2v^2 + 2vw}{a^2 + 2b^2 + 2bc}, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} k^2 a^2 + 2k^2 b^2 + 2k^2 bc &= k^2 a^2 + 2v^2 + 2uw, \\ 2k^2 b^2 + 2k^2 bc &= 2v^2 + 2vw, \\ k^2 b^2 + k^2 bc &= v^2 + vw, \\ k^2 b(b+c) &= v(v+w), \\ k^2 b &= v \left(\frac{v+w}{b+c} \right), \\ kb &= v, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$w^2 = u^2 + v^2 = (ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2 c^2 \Rightarrow w = kc,$$

lo cual significa que

$$\exists k \in \mathbb{Q} / (u, v, w) = (ka, kb, kc).$$

□

Corolario 8.3.1.

1. Dos ternas pitagóricas primitivas y ordenadas (a, b, c) y (u, v, w) son iguales si y sólo si tienen igual proporción radial menor.
2. Dos ternas pitagóricas primitivas y ordenadas (a, b, c) y (u, v, w) son iguales si y sólo si tienen igual proporción radial mediana.

Demostración.

1. Según el teorema 8.3, $\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(1)}$ si y sólo si existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(p, q) = 1$ siendo

$$(qa, qb, qc) = (pu, pv, pw)$$

y, como, por ser ambas ternas pitagóricas primitivas, se verifica que

$$\text{mcd}(a, b, c) = 1 = \text{mcd}(u, v, w),$$

entonces, necesariamente ha de ocurrir que $p = 1 = q$, por lo que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(1)} \iff (a, b, c) = (u, v, w).$$

2. Según el teorema 8.3, $\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(2)}$ si y sólo si existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $\text{mcd}(p, q) = 1$ siendo

$$(qa, qb, qc) = (pu, pv, pw),$$

y, como, por ser ambas ternas pitagóricas primitivas, se verifica que

$$\text{mcd}(a, b, c) = 1 = \text{mcd}(u, v, w),$$

entonces, necesariamente ha de ocurrir que $p = 1 = q$, por lo que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \gamma_{(u,v,w)}^{(2)} \iff (a, b, c) = (u, v, w).$$

El programa 8.1 (pág. 320), introduciendo un valor para $m \in \mathbb{N}$, nos muestra los m primeros términos de la sucesión de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuyo término general es $((2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1))_{n \in \mathbb{N}}$, así como sus respectivas proporciones radiales, permitiéndonos comprobar la veracidad de estas afirmaciones. \square

Corolario 8.3.2. Para cualquier $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, existe una única terna pitagórica (a_n, b_n, c_n) primitiva y ordenada tal que

$$\gamma_{(a_n, b_n, c_n)}^{(2)} = n.$$

Demostración. Según el teorema 8.1, si (a, b, c) es una terna pitagórica ordenada cuya proporción radial mediana es un número natural, existe $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que

$$1 < \frac{b + c}{a} = m,$$

por lo que

$$0 = c^2 - (ma - b)^2 = a^2 + b^2 - (ma - b)^2 = a(2mb - (m^2 - 1)a),$$

luego

$$b = \frac{(m^2 - 1)a}{2m},$$

y, tomando $a = 2m$, resulta que

$$\begin{cases} b = m^2 - 1, \\ c = ma - b = 2m^2 - (m^2 - 1) = m^2 + 1, \end{cases}$$

siendo

$$(a, b, c) = (2m, m^2 - 1, m^2 + 1),$$

de forma que

$$\text{mcd}(2m, m^2 - 1, m^2 + 1) = \text{mcd}(2m, 2, m^2 + 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 0(\text{mód } 2), \\ 2 & \text{si } m \equiv 1(\text{mód } 2). \end{cases}$$

Por tanto, para cualquier $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, podemos considerar la terna pitagórica

$$(a_n, b_n, c_n) = \begin{cases} (2n, n^2 - 1, n^2 + 1) & \text{si } n \equiv 0(\text{mód } 2), \\ \left(n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}\right) & \text{si } n \equiv 1(\text{mód } 2), \end{cases}$$

que verifica que

1. Es primitiva, ya que $\text{mcd}(a_n, b_n, c_n) = 1$.

2. Es ordenada, ya que

$$b_n > a_n \iff n^2 - 2n - 1 > 0 \iff n > 1 + \sqrt{2} > 2 \iff n \geq 3.$$

3. Según el teorema 8.1,

$$\gamma_{(a_n, b_n, c_n)}^{(2)} = \begin{cases} \frac{n^2 - 1 + n^2 + 1}{2n} & \text{si } n \equiv 0(\text{mód } 2) \\ \frac{\frac{n^2 - 1}{2} + \frac{n^2 + 1}{2}}{n} & \text{si } n \equiv 1(\text{mód } 2) \end{cases} = n.$$

Finalmente, el corolario 8.3.1 garantiza la unicidad. El programa 8.8 (pág. 322), introduciendo un valor para $k \in \mathbb{N}$, nos muestra los k primeros términos de esta sucesión. \square

Corolario 8.3.3. *El conjunto $\mathcal{T}_{\gamma_{\mathbb{N}}^{(2)}}$ de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuya proporción radial mediana es un número natural es un conjunto totalmente ordenado.*

Demostración. Basta con tener en cuenta el corolario 8.3.2 y que la relación binaria

$$(a_n, b_n, c_n) \preceq (a_k, b_k, c_k) \iff n \leq k$$

es una relación de orden total. \square

Corolario 8.3.4. *Para cualquier terna pitagórica primitiva y ordenada cuya proporción radial mediana es un número natural, se verifica que*

1. *Su semiperímetro es un número natural múltiplo de 3 si y sólo si $n \not\equiv 1 \pmod{3}$.*
2. *Su semiperímetro es un número natural impar si y sólo si $n \equiv 1 \pmod{4}$.*

Demostración. Según el corolario 8.3.2, cualquier terna pitagórica primitiva y ordenada cuya proporción radial mediana es un número natural es de la forma

$$(a_n, b_n, c_n) = \begin{cases} (2n, n^2 - 1, n^2 + 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \left(n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}\right) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

siendo

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\} : \gamma_{(a_n, b_n, c_n)}^{(2)} = n,$$

por lo que sus respectivos semiperímetros son

$$s_n = \begin{cases} \frac{2n + n^2 - 1 + n^2 + 1}{2} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{n + \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{n^2 + 1}{2}}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} = \begin{cases} n(n + 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{n(n + 1)}{2} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

y, por tanto:

1. Su semiperímetro es un número natural múltiplo de 3 si y sólo si $n \not\equiv 1 \pmod{3}$, ya que

$$n(n + 1) \equiv 0 \pmod{3} \iff n \not\equiv 1 \pmod{3}.$$

2. Su semiperímetro es un número natural par siempre que n sea par, por tratarse de un producto de dos números naturales consecutivos. Además, si n es impar, resulta que:

a) Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, entonces,

$$n(n + 1) \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow \frac{n(n + 1)}{2} \equiv 1 \pmod{2}.$$

b) Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces,

$$n(n + 1) \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow \frac{n(n + 1)}{2} \equiv 0 \pmod{2}.$$

lo cual significa que, si n es impar, su semiperímetro es un número natural impar si y sólo si $n \equiv 1 \pmod{4}$.

El programa 8.8 (pág. 322), introduciendo un valor para $k \in \mathbb{N}$, nos muestra los k primeros términos de esta sucesión, permitiéndonos comprobar la veracidad de este resultado. \square

Corolario 8.3.5. *La sucesión de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas cuya proporción radial mediana es un número natural, cuyo término general es*

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\} : (a_n, b_n, c_n) = \begin{cases} (2n, n^2 - 1, n^2 + 1) & \text{si } n \equiv 0(\text{mód } 2), \\ \left(n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}\right) & \text{si } n \equiv 1(\text{mód } 2), \end{cases}$$

verifica que

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\} : r_{b_n} \geq a_n$$

y, además,

$$r_{b_n} = a_n \iff n = 3.$$

Demostración. Como, para cualquier $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, se verifica que

$$r_{b_n} = \begin{cases} \frac{-2n + n^2 - 1 + n^2 + 1}{2} = n(n - 1) & \text{si } n \equiv 0(\text{mód } 2), \\ \frac{-n + \frac{n^2 - 1}{2} + \frac{n^2 + 1}{2}}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} & \text{si } n \equiv 1(\text{mód } 2), \end{cases}$$

entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, resulta que

$$r_{b_n} - a_n = \begin{cases} n(n - 1) - 2n & \text{si } n \equiv 0(\text{mód } 2), \\ \frac{n(n - 1)}{2} - n & \text{si } n \equiv 1(\text{mód } 2), \end{cases} = \begin{cases} n(n - 3) & \text{si } n \equiv 0(\text{mód } 2), \\ \frac{n(n - 3)}{2} & \text{si } n \equiv 1(\text{mód } 2), \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{1, 2\} : r_{b_n} \geq a_n$$

siendo, además,

$$r_{b_n} = a_n \iff n = 3.$$

El programa 8.8 (pág. 322), introduciendo un valor para $k \in \mathbb{N}$, nos muestra los k primeros términos de esta sucesión, permitiéndonos comprobar la veracidad de este resultado. \square

Teorema 8.4. *Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) con inradio r y exinradios r_a, r_b y r_c , se verifica que:*

1. $\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} \gamma_{(a,b,c)}^{(2)}$.
2. $\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = 1 + \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} + \gamma_{(a,b,c)}^{(2)}$.
3. $(\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} - 1)(\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} - 1) = 2$.

Demostración.

1. Teniendo en cuenta el corolario 1.4.6 (*) (pág. 30), resulta que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = \frac{r_c}{r} = \frac{r_a}{r} \cdot \frac{r_b}{r} = \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} \gamma_{(a,b,c)}^{(2)}.$$

2. Teniendo en cuenta el resultado probado en el apartado anterior y el teorema 8.1 (*), resulta que

$$\begin{aligned} \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} &= \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = \frac{a+c}{b} \cdot \frac{b+c}{a} = \frac{ab+ac+bc+c^2}{ab}, \\ &= 1 + \frac{ac+bc+c^2}{ab} = 1 + \frac{ac+bc+a^2+b^2}{ab}, \\ &= 1 + \frac{a(a+c)+b(b+c)}{ab} = 1 + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} = 1 + \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} + \gamma_{(a,b,c)}^{(2)}. \end{aligned}$$

3. Utilizando los resultados probados en los dos apartados anteriores, resulta que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} + \gamma_{(a,b,c)}^{(2)},$$

por lo que

$$2 = \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} - \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} - \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} + 1 = \left(\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} - 1 \right) \left(\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} - 1 \right).$$

El programa 8.1 (pág. 320), introduciendo un valor para $m \in \mathbb{N}$, nos muestra los m primeros términos de la sucesión de ternas pitagóricas ordenadas cuyo término general es $((2n+1, 2n^2+2n, 2n^2+2n+1))_{n \in \mathbb{N}}$, así como sus respectivas proporciones radiales, permitiéndonos comprobar la veracidad de estas igualdades. \square

Teorema 8.5. Si $r \in \mathbb{N}$ y (d, \bar{d}) es un par de divisores gemelos de $2r^2$ tal que $d < \sqrt{2}r$, entonces, la terna pitagórica ordenada

$$(a_d, b_d, c_d) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d}),$$

cuyo inradio es igual a r , verifica que:

1. $\gamma_{(a_d, b_d, c_d)}^{(1)} = 1 + \frac{d}{r}.$
2. $\gamma_{(a_d, b_d, c_d)}^{(2)} = 1 + \frac{2r}{d}.$
3. $\gamma_{(a_d, b_d, c_d)}^{(3)} = 1 + \frac{d + \bar{d}}{r}.$

Demostración.

1. Según el teorema 8.1 (*),

$$\begin{aligned} \gamma_{(a_d, b_d, c_d)}^{(1)} &= \frac{2r + d + 2r + d + \bar{d}}{2r + \bar{d}} = 2 + \frac{2d - \bar{d}}{2r + \bar{d}} = 2 + \frac{2d - \frac{2r^2}{d}}{2r + \frac{2r^2}{d}}, \\ &= 2 + \frac{d^2 - r^2}{dr + r^2} = 2 + \frac{d - r}{r} = 1 + \frac{d}{r}. \end{aligned}$$

2. Según el teorema 8.1 (*),

$$\begin{aligned}\gamma_{(a_d, b_d, c_d)}^{(2)} &= \frac{2r + \bar{d} + 2r + d + \bar{d}}{2r + d} = 2 + \frac{2\bar{d} - d}{2r + d} = 2 + \frac{\frac{4r^2}{d} - d}{2r + d}, \\ &= 2 + \frac{4r^2 - d^2}{d(2r + d)} = 2 + \frac{2r - d}{d} = 1 + \frac{2r}{d}.\end{aligned}$$

3. Según el teorema 8.1 (*),

$$\gamma_{(a_d, b_d, c_d)}^{(3)} = \frac{2r + d + 2r + \bar{d} + 2r + d + \bar{d}}{2r} = 3 + \frac{d + \bar{d}}{r}.$$

□

Corolario 8.5.1.

1. Para cada $r \in \mathbb{N}$, existe una única terna pitagórica ordenada con inradio r y tal que su proporción radial menor es un número natural. Además, esta terna pitagórica es $(3r, 4r, 5r)$.
2. Para cada $r \in \mathbb{N}$, la única terna pitagórica ordenada con inradio r y tal que el cociente entre su exinradio mayor y su exinradio mediano es un número natural es $(3r, 4r, 5r)$.

Demostración.

1. Si (a, b, c) es una terna pitagórica ordenada con inradio r , según los teoremas 2.4 (pág. 49) y 2.5 (pág. 50), existe un par de divisores gemelos (d, \bar{d}) de $2r^2$ tales que $d < \sqrt{2}r$ y

$$(a, b, c) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d}),$$

siendo, según el teorema 8.5,

$$\gamma_{(a, b, c)}^{(1)} = 1 + \frac{d}{r},$$

por lo que

$$\gamma_{(a, b, c)}^{(1)} \in \mathbb{N} \iff r|d,$$

y, como el único múltiplo de r menor que $\sqrt{2}r$ es el propio r , resulta que $(d, \bar{d}) = (r, 2r)$, es decir,

$$(a, b, c) = (2r + r, 2r + 2r, 2r + r + 2r) = (3r, 4r, 5r).$$

2. Si (a, b, c) es una terna pitagórica ordenada, teniendo en cuenta el primer apartado del teorema 8.4 (*), resulta que

$$\frac{r_c}{r_b} = \frac{\frac{r_c}{r}}{\frac{r_b}{r}} = \frac{\gamma_{(a, b, c)}^{(3)}}{\gamma_{(a, b, c)}^{(2)}} = \gamma_{(a, b, c)}^{(1)},$$

por lo que, según hemos probado en el apartado anterior (*),

$$\frac{r_c}{r_b} \in \mathbb{N} \iff \gamma_{(a, b, c)}^{(1)} \in \mathbb{N} \iff (a, b, c) = (3r, 4r, 5r).$$

□

Corolario 8.5.2.

1. Si $k \in \mathbb{N}$ es tal que su descomposición factorial es $k = 2^{\beta_0} \prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i}$, con $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces, el número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio k y tales que su proporción radial mediana es un número natural es

$$n_{\gamma_{\mathbb{N}}^{(2)}}^r(k) = d_{\leq k}(2k) = (\beta_0 + 2) \prod_{i=1}^t (\beta_i + 1) - 1.$$

2. Si $k \in \mathbb{N}$ es tal que su descomposición factorial es $k = 2^{\beta_0} \prod_{i=1}^t p_i^{\beta_i}$, con $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces, el número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio k y tales que el cociente entre su exinradio mayor y su exinradio menor es un número natural es

$$n_{\left(\frac{r_c}{r_a}\right)_{\mathbb{N}}}^r(k) = d_{\leq k}(2k) = (\beta_0 + 2) \prod_{i=1}^t (\beta_i + 1) - 1.$$

Demostración.

1. Si (a, b, c) es una terna pitagórica ordenada con inradio k , según los teoremas 2.4 (pág. 49) y 2.5 (pág. 50), existe un par de divisores gemelos (d, \bar{d}) de $2k^2$ tales que $d < \sqrt{2}k$ y

$$(a, b, c) = (2k + d, 2k + \bar{d}, 2k + d + \bar{d}),$$

siendo, según el teorema 8.5,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \frac{2k}{d},$$

por lo que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} \in \mathbb{N} \iff d|2k$$

y, como el mayor divisor de $2k$ que es menor que $\sqrt{2}k$ es el propio k , resulta que habrá tantas ternas pitagóricas ordenadas con inradio k y tales que su proporción radial mediana es un número natural como divisores de $2k$ menores o iguales que k , es decir,

$$n_{\gamma_{(2)}^{(2)} \in \mathbb{N}}^r(k) = d_{\leq k}(2k) = (\beta_0 + 2) \prod_{i=1}^t (\beta_i + 1) - 1.$$

2. Si (a, b, c) es una terna pitagórica ordenada, teniendo en cuenta el teorema 8.4 (*), resulta que

$$\frac{r_c}{r_a} = \frac{\frac{r_c}{r}}{\frac{r_a}{r}} = \frac{\gamma_{(a,b,c)}^{(3)}}{\gamma_{(a,b,c)}^{(1)}} = \gamma_{(a,b,c)}^{(2)},$$

por lo que, según el apartado anterior, el número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio k y tales que el cociente entre su exinradio mayor y su exinradio menor es un número natural es

$$n_{\frac{r_c}{r_a} \in \mathbb{N}}^r(k) = d_{\leq k}(2k) = (\beta_0 + 2) \prod_{i=1}^t (\beta_i + 1) - 1.$$

□

Ejemplo 8.1. Para $r = 6 = 2 \cdot 3$, según el corolario 8.5.2, el número de ternas pitagóricas ordenadas con inradio igual a 6 y tales que su proporción radial mediana es un número natural es

$$n_{\gamma^{(2)} \in \mathbb{N}}^r(6) = d_{\leq r}(12) = (1+2)(1+1) - 1 = 5,$$

siendo

$$\mathcal{T}_{\gamma^{(2)} \in \mathbb{N}}^r(6) = \{13, (13, 84, 85), 7, (14, 48, 50), 5, (15, 36, 39), 4, (16, 30, 34), 3, (18, 24, 30)\},$$

donde el número que antecede a cada terna pitagórica es su correspondiente proporción radial mediana. Además, como $2r^2 = 72 = 2^3 \cdot 3^2$, según el teorema 2.5 (pág. 50), el número total de ternas pitagóricas con inradio igual a 6 es

$$n_o^r(6) = \frac{(3+1)(2+1)}{2} = 6,$$

por lo que existe una única terna pitagórica ordenada con inradio igual a 6 cuya proporción radial mediana no es un número natural, siendo ésta, acompañada de su correspondiente proporción radial mediana,

$$\left\{ \frac{5}{2}, (20, 21, 29) \right\}.$$

El programa 8.5 (pág. 321), introduciendo un valor para $k \in \mathbb{N}$, nos muestra todas las ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es igual a k y tales que su proporción radial mediana es un número natural, así como aquellas para las que no lo es, permitiéndonos comprobar la veracidad de los resultados obtenidos en este ejemplo.

Corolario 8.5.3. Si $n \in \mathbb{N}$, p es un número primo y (a, b, c) es una terna pitagórica ordenada con inradio igual a p^n , entonces, $\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} \in \mathbb{N}$.

Demostración. Según el teorema 2.4 (pág. 49), existe un par de divisores gemelos (d, \bar{d}) de $2p^{2n}$ tales que $d < \sqrt{2}p^n$ y

$$(a, b, c) = (2p^n + d, 2p^n + \bar{d}, 2p^n + d + \bar{d}),$$

siendo, según el teorema 8.5,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \frac{2p^n}{d},$$

por lo que vamos a distinguir dos casos:

1. Si $p = 2$, entonces, $2p^{2n} = 2^{2n+1}$, por lo que

$$\text{Div}(2p^{2n}) = \text{Div}(2^{2n+1}) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n, 2^{n+1}, \dots, 2^{2n+1}\}$$

y, como $2^n < \sqrt{2} \cdot 2^n < 2^{n+1}$, resulta que

$$\text{Div}_{< \sqrt{2}p^n}(2p^{2n}) = \text{Div}_{< \sqrt{2} \cdot 2^n}(2^{2n+1}) = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\},$$

luego

$$\forall d \in \text{Div}_{<\sqrt{2}p^n}(2p^{2n}) : d|2^{2n+1} = 2p^n$$

y, por tanto,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \frac{2p^n}{d} \in \mathbb{N}.$$

2. Si $p > 2$, entonces:

$$\text{Div}(2p^{2n}) = \{1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2, \dots, p^n, 2p^n, p^{n+1}, 2p^{n+1}, \dots, p^{2n}, 2p^{2n}\}$$

y, como $p^n < \sqrt{2}p^n < 2p^n$, resulta que

$$\text{Div}_{<\sqrt{2}p^n}(2p^{2n}) = \{1, 2, p, 2p, p^2, 2p^2, \dots, p^n\},$$

luego

$$\forall d \in \text{Div}_{<\sqrt{2}p^n}(2p^{2n}) : d|2p^n$$

y, por tanto,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \frac{2p^n}{d} \in \mathbb{N}.$$

El programa 8.2 (pág. 320), introduciendo un número primo p y un valor para $n \in \mathbb{N}$, nos muestra todas las ternas pitagóricas ordenadas cuyo inradio es igual a p^n , así como sus correspondientes proporciones radiales medianas, permitiéndonos comprobar que todas ellas son números naturales. \square

Corolario 8.5.4. *Para cada $r \in \mathbb{N}$, existe una única terna pitagórica ordenada con inradio r y tal que su proporción radial mayor es un número natural. Además, esta terna pitagórica es $(3r, 4r, 5r)$.*

Demostración. Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) , como, según el teorema 8.1 (*) se verifica que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \gamma_{(ka, kb, kc)}^{(3)} = \frac{k(a+b+c)}{k(a+b-c)} = \frac{a+b+c}{a+b-c} = \gamma_{(a,b,c)}^{(3)},$$

entonces,

$$\forall k \in \mathbb{N} : \gamma_{(ka, kb, kc)}^{(3)} \in \mathbb{N} \iff \gamma_{(a,b,c)}^{(3)} \in \mathbb{N},$$

por lo que basta con probar que la única terna primitiva ordenada cuya proporción radial mayor es un número natural es $(3, 4, 5)$, pues

$$\gamma_{(3,4,5)}^{(3)} = \frac{3+4+5}{3+4-5} = \frac{12}{2} = 6 \in \mathbb{N},$$

y, además, si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva y ordenada con inradio $r > 1$ (es decir, distinta de $(3, 4, 5)$), según los teoremas 2.4 (pág. 49) y 2.5 (pág. 50), existe un par de divisores gemelos (d, \bar{d}) de $2r^2$ tales que $d < \sqrt{2}r$ y

$$(a, b, c) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d}),$$

siendo, según el teorema 8.5,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} = 3 + \frac{d + \bar{d}}{r},$$

por lo que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} \in \mathbb{N} \iff r|(d + \bar{d}),$$

y, si p es un factor primo cualquiera de r , como

$$r|(d + \bar{d}) \Rightarrow p|(d + \bar{d}) \Rightarrow \begin{cases} p|c = 2r + d + \bar{d} \\ p|(a + b) = 4r + d + \bar{d} \end{cases} \Rightarrow p|2ab = (a + b)^2 - c^2,$$

entonces, vamos a distinguir dos casos:

1. Si $p = 2$, según el segundo apartado de las propiedades 1.1 (pág. 17), se verifica que

$$\begin{cases} p|a, \\ \text{ó} \\ p|b. \end{cases}$$

2. Si $p > 2$, al ser p primo (*), resulta que

$$p|ab \Rightarrow_* \begin{cases} p|a, \\ \text{ó} \\ p|b, \end{cases}$$

pudiendo suponer que $p|a$ (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga), en cuyo caso,

$$p|d = a - 2r \Rightarrow p|\bar{d} = (d + \bar{d}) - d \Rightarrow p|b = 2r + \bar{d}$$

y se llega a una contradicción, ya que la terna pitagórica (a, b, c) es primitiva. \square

Corolario 8.5.5. *No existe ninguna terna pitagórica ordenada tal que el cociente entre su exinradio mediano y su exinradio menor sea un número natural.*

Demostración. Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) , como, según el teorema 1.4 (*) (pág. 26), se verifica que

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left(\frac{r_b}{r_a} \right)_{(ka, kb, kc)} = \frac{k(-a + b + c)}{k(a - b + c)} = \frac{-a + b + c}{a - b + c} = \left(\frac{r_b}{r_a} \right)_{(a, b, c)},$$

entonces,

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left(\frac{r_b}{r_a} \right)_{(ka, kb, kc)} \in \mathbb{N} \iff \left(\frac{r_b}{r_a} \right)_{(a, b, c)} \in \mathbb{N},$$

por lo que basta con probar que no existe ninguna terna pitagórica primitiva y ordenada tal que el cociente entre su exinradio mediano y su exinradio menor sea un número natural. Además, si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva y ordenada con inradio $r \in \mathbb{N}$, según los teoremas 2.4 (pág. 49) 2.5 (pág. 50), existe un par de divisores gemelos (d, \bar{d}) de $2r^2$ tales que $d < \sqrt{2}r$ y

$$(a, b, c) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d}),$$

siendo, según el teorema 1.4 (*) (pág. 26),

$$\frac{r_b}{r_a} \underset{*}{=} \frac{-(2r+d) + 2r + \bar{d} + 2r + d + \bar{d}}{2r + d - (2r + \bar{d}) + 2r + d + \bar{d}} = \frac{r + \bar{d}}{r + d},$$

por lo que

$$\frac{r_b}{r_a} \in \mathbb{N} \iff (r+d)|(r+\bar{d})$$

y, al ser $r+d \geq 1+1=2$, si p es un factor primo cualquiera de $r+d$, como

$$(r+d)|(r+\bar{d}) \Rightarrow p|(r+\bar{d}) \Rightarrow \begin{cases} p|c = r+d+r+\bar{d} \\ p|a-b = r+d-(r+\bar{d}) \end{cases} \Rightarrow p|2ab = c^2 - (a-b)^2,$$

entonces, vamos a distinguir dos casos:

1. Si $p=2$, según el segundo apartado de las propiedades 1.1 (pág. 17), se verifica que

$$\begin{cases} p|a, \\ \text{ó} \\ p|b. \end{cases}$$

2. Si $p>2$, al ser p primo (*), resulta que

$$p|ab \underset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} p|a, \\ \text{ó} \\ p|b, \end{cases}$$

pudiendo suponer que $p|a$ (en caso contrario, se razonaría de forma totalmente análoga), en cuyo caso,

$$p|r = a - (r+d) \Rightarrow p|b = r + r + \bar{d}$$

y se llega a una contradicción, ya que la terna pitagórica (a, b, c) es primitiva. \square

Teorema 8.6. *Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) , se verifica que*

$$1 < \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} < 1 + \sqrt{2}.$$

Demostración. Como $b < c < a + c$, según el teorema 8.1 (*), se verifica que

$$1 < \frac{a+c}{b} \underset{*}{=} \gamma_{(a,b,c)}^{(1)}.$$

y, como

$$c^2 = a^2 + b^2 < 2b^2 \Rightarrow c < \sqrt{2}b,$$

entonces,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(1)} \underset{*}{=} \frac{a+c}{b} < \frac{b+c}{b} < \frac{b+\sqrt{2}b}{b} = 1 + \sqrt{2}.$$

\square

Teorema 8.7. Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) , se verifica que:

1. $\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} > 1 + \sqrt{2}$.
2. $\gamma_{(a,b,c)}^{(3)} > 3 + 2\sqrt{2}$.

Demostración. Si $r \in \mathbb{N}$ es el inradio de esta terna pitagórica, según los teoremas 2.4 (pág. 49) y 2.5 (pág. 50), existe un par de divisores gemelos (d, \bar{d}) de $2r^2$ tales que $d < \sqrt{2}r$ y

$$(a, b, c) = (2r + d, 2r + \bar{d}, 2r + d + \bar{d}),$$

por lo que:

1. Según el teorema 8.5,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \frac{2r}{d} > 1 + \sqrt{2}.$$

2. Según el teorema 8.5,

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 3 + \frac{d + \bar{d}}{r} = 3 + \frac{d + \frac{2r^2}{d}}{r} = 3 + \frac{d^2 + 2r^2}{rd} > 3 + 2\sqrt{2},$$

ya que, como $d < \sqrt{2}r$ (*), se verifica que

$$\frac{d^2 + 2r^2}{rd} - 2\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2}r - d)^2}{rd} > 0.$$

□

Teorema 8.8. Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que existe una terna pitagórica ordenada con semiperímetro igual a k , se verifica que existe, al menos, una terna pitagórica ordenada con inradio igual a k y tal que su proporción radial mediana no es un número natural.

Demostración. Dado $k \in \mathbb{N}$, si existe una terna pitagórica ordenada con semiperímetro igual a k , el teorema 4.3 (pág. 83) nos asegura que existe $d \in \text{Div}_{(k, \sqrt{2}k)}(2k^2) \subset \text{Div}_{<\sqrt{2}k}(2k^2)$, de forma que, según el Teorema 2.4 (pág. 49), existe una terna pitagórica con inradio igual a k . Además, como $k < d < \sqrt{2}k < 2k$, entonces, $d \nmid 2k$, (ya que el mayor divisor de $2k$ menor que $2k$ es k), por lo que, según el teorema 8.5, se verifica que

$$\gamma_{(a,b,c)}^{(2)} = 1 + \frac{2k}{d} \notin \mathbb{N}.$$

□

Ejercicios

Ejercicio 8.1. Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) , probar que

$$1 < \gamma_{(a,b,c)}^{(1)} < \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} < \gamma_{(a,b,c)}^{(3)}.$$

Ejercicio 8.2. Dada una terna pitagórica ordenada (a, b, c) tal que $\gamma_{(a,b,c)}^{(1)}, \gamma_{(a,b,c)}^{(2)} \in \mathbb{N}$, probar que (a, b, c) es proporcional a $(3, 4, 5)$.

Ejercicio 8.3. Dar un ejemplo que ponga de manifiesto que el recíproco del teorema 8.8 no es, en general, cierto.

Ejercicio 8.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe, al menos, una terna pitagórica ordenada tal que su inradio es igual a $6n$ y su proporción radial mediana no es un número natural.

Ejercicio 8.5. Si $p, q \in \mathbb{N}$ son números primos tales que $p < q < 2p$, existe, al menos, una terna pitagórica ordenada tal que su inradio es igual a pq y su proporción radial mediana no es un número natural.

Ejercicio 8.6.

1. Construir una sucesión $((a_n, b_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \gamma_{(a_n, b_n, c_n)}^{(2)} = 2n + 1.$$

2. Construir una sucesión $((a_n, b_n, c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas tales que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \gamma_{(a_n, b_n, c_n)}^{(2)} = 2n.$$

3. Construir una sucesión $((a_m, b_m, c_m))_{m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}}$ de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas tales que

$$\forall m \in \mathbb{N} - \{1, 2\} : \gamma_{(a_m, b_m, c_m)}^{(2)} = m.$$

4. Si $(\Delta_m)_{m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}}$ es la sucesión de áreas de la sucesión de ternas pitagóricas primitivas y ordenadas construida en el apartado anterior, probar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{m+2}}{\Delta_m} = 1.$$

