命题与解题

2021 年全国中学生数学奥林匹克(决赛)试题与答卷情况分析

主试委员会*

中图分类号:O141.2 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2022)03-0007-08

2021 年全国中学生数学奥林匹克(决赛)于 2021 年 12 月在福建省福州市福建师范大学附属中学举办. 本文就此次竞赛的试题、不同解法与答卷情况作一些简单介绍. 命题组准备的参考答案参见文[1].

值得一提的是受疫情影响,本次竞赛在乌鲁木齐、昆明、杭州、宁波镇海、哈尔滨和西安设置了分考场,共有 71 名考生在分考场参加考试.

1 第一题

本题是一道很古典的几何题,从 1879 年法国国家(数学)竞赛(Concours Général)的初等数学组试题略加修改(原题考虑的是与四边所在直线相切的圆,当 $a\neq b$ 时就有两个,且不要求四边形的凸性)而成.

一般来说,若四边形的对边之和相等,则此四边形一定有内切圆. 固定四边长度及其中一条边的位置,允许另两个顶点在平面上移动,则内心的轨迹也还是两段圆弧.(原题和推广参见文[2]的习题.)

本题的得分情况如表 1.

表 1

得分	21	18	15	12	9	6	3	0
人数	307	133	95	5	0	6	1	8

本题平均分是 18.6 分,在获得银牌以上的同学中的平均分超过 19 分(但进入国家集训队的 60 人本题平均分也未达到 20 分).

本题作为第一题,大多数同学的确都能够顺利上手,评分标准也较为宽松. 证明点 I 的轨迹是一个圆的一部分(写明圆心的位置和圆的半径)可以得 15 分. 但集训队中有 9 名同学本题只得了 15 分,问题均出现在得到"点 I 在一个圆上"后完全没有就取值范围做任何有意义的讨论. 从轨迹问题的通常作法来看,其实关于取值范围的讨论应占到 12 分,如果采用此评分方式,平均分将会降低 1 分左右.

收稿日期:2022-01-13

* 主试委员会来自(排名不分先后):清华大学(艾颖华、郑志伟)、北京大学(肖梁、杨诗武、许地生)、中国科学院数学与系统科学研究院(王彬)、北京交通大学(李晓龙)、南开大学(李明)、山东大学(刘守民)、南京师范大学(纪春岗)、中国科学技术大学(王新茂)、上海财经大学(何斯迈)、复旦大学(姚一隽、王国祯、冀诸超)、上海理工大学(张思汇)、上海纽约大学(白天衣、顾陈琳)、华东师范大学(熊斌、瞿振华、何忆捷、吴尉迟)、上海交通大学(张镭)、四川大学(李挺)、武汉大学(薛江维)、浙江大学(田昉暘)、福建师范大学(杨标桂)、厦门大学(佘世霖)、南方科技大学(付云皓),以及北京大学和华东师范大学的几位研究生. 何忆捷、许地生、王新茂、王彬、瞿振华、张思汇、付云皓、肖梁等提供了很多素材,由姚一隽、熊斌负责数据统计分析及统稿.

2 第二题

这是一道代数题，涉及知识点全部在高中联赛一试的考查范围内.

除了文[1]中列出的方法外，大部分考生采用了如下方法来证明$\lambda=\sqrt{3}$满足要求.

设$z=a+b\mathrm{i}$.

将方程$pz^3+2qz^2+2rz+s=0$改写为

$$p(a^3-3ab^2+3a^2b\mathrm{i}-b^3\mathrm{i})+2q(a^2-b^2+2ab\mathrm{i})+2r(a+b\mathrm{i})+s=0,$$

分离实部和虚部得

$$\begin{cases}p(a^3-3ab^2)+2q(a^2-b^2)+2ra+s=0, & ①\\ p(3a^2b-b^3)+4qab+2rb=0.\end{cases}$$

当$b\neq0$时，有

$$p(3a^2-b^2)+4qa+2r=0. \quad ②$$

要证明当p、q、r、s满足某种条件时，必有一个虚根$z=a+b\mathrm{i}$满足$b^2\geqslant3a^2$.

这相当于将式②代入方程①后证明a的三次多项式

$$f(a)=8pa^3+16qa^2+\left(4r+\frac{8q^2}{p}\right)a+\frac{4qr}{p}-s$$

有零点a满足$4qa+2r\geqslant0$，即$a\geqslant-\frac{r}{2q}$.

因为$f(a)$的首项系数是正实数，所以，上述结论成立的一个充分条件为$f\left(-\frac{r}{2q}\right)\leqslant0$，即

$$pr^3-2q^2r^2+q^3s\geqslant0. \quad ③$$

对方程$qz^3+2pz^2+2sz+r=0$作同样讨论，知一个使得该方程有满足$b^2\geqslant3a^2$的根$z=a+b\mathrm{i}$的充分条件为

$$qs^3-2p^2s^2+p^3r\geqslant0. \quad ④$$

于是，若式③、④均不成立，即

$$pr^3-2q^2r^2+q^3s<0,$$
$$qs^3-2p^2s^2+p^3r<0,$$

则可以分别由这两个不等式得到

$$pr^3+q^3s<2q^2r^2\Rightarrow\sqrt{ps}<\sqrt{qr},$$
$$qs^3+p^3r<2p^2s^2\Rightarrow\sqrt{qr}<\sqrt{ps},$$

显然矛盾.

因此，式③、④中至少有一个成立，不妨设式③成立. 此时，

$$b=\pm\sqrt{3a^2+\frac{4q}{p}a+\frac{2r}{p}}$$

满足$b\neq0$，$|b|\geqslant\sqrt{3}|a|$，且$z=a+b\mathrm{i}$满足

$$pz^3+2qz^2+2rz+s=0.$$

从而，命题成立.（由此顺便证明了题目中的六次方程的根不可能都是实数.）

本题的得分情况如表2.

表 2

得分	21	18	15	12	9	6	3	0
人数	172	22	38	17	33	22	155	96

本题平均分是10.2分，是本次比赛所有考题中唯一一道在“（几乎）全对”和“（几乎）全错”的得分区间都有大量考生的试题. 对于获得金牌的考生，本题的平均分在18分以上，但对于银牌的考生，本题的平均分就不到8分.

从阅卷过程中可以看出，复数虽然在现代数学中起到了无可替代的作用，但包括部分优秀考生在内的相当一部分考生，对复数的认识仍然非常有限. 遇到复数问题的下意识反应还是将实、虚部分离，将问题转化为实数的代数问题来解决，这种操作给本次阅卷工作带来了很多意想不到的波折，好在本题用纯实数的方法也能解决. 希望选手们在今后的学习与训练中能将数学中这重要的一课补上.

3 第三题

本题的两个主要切入思路是母函数方法与幂和方法.

母函数方法是把集合对应为多项式，把集合的加法对应为多项式的乘法. 若集合中的数模n，则对应的多项式模x^n-1. 这是一种比较理想的处理手段，在本题也可以完全

地转化信息. 此外,“多项式$\frac{x^p-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^{p-1}$在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约”这一性质在解题中起了较大作用.

幂和方法也不错,本题与缩系有关,对模素数 p 的缩系有方幂和:

$$1^m+2^m+\cdots+(p-1)^m=\begin{cases}0(\bmod p), & m=1,2,\cdots,p-2;\\ p-1(\bmod p), & m=p-1.\end{cases}$$

事实上,(利用牛顿幂和公式容易证明)上式也是一组 $p-1$ 个数构成模 p 缩系的充分条件(此方法在置换多项式问题中也很有用. 一个模 p 的置换多项式是指一个把模 p 的完全剩余系映成模 p 的完全剩余系的多项式 $f(x)$. 由于

$$\sum_{x=1}^{p}(f(x))^m\equiv 0(\bmod p)(m=1,2,\cdots,p-2),$$

于是,若其次数满足 $p-1\leqslant m\deg f<2p-2$,则 $(f(x))^m$ 的展开式中的 x^{p-1}项的系数为 p 的倍数. 这一置换多项式的必要条件在刻画低次数的置换多项式时很常用).

本题使用幂和方法可以走到底,记 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 的初等对称多项式依次为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_6$,记 $S_k=\sum_{i=1}^{6}x_i^k(S_0=6)$.

则 $h(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_6)$
$=x^6-\sigma_1x^5+\sigma_2x^4-\sigma_3x^3+\sigma_4x^2-\sigma_5x+\sigma_6$,

及 $T_m=\sum_{x\in X}\sum_{y\in X}(ax+y)^m=\sum_{k=0}^{m}\mathrm{C}_m^k a^k S_k S_{m-k}$.

以下同余式均在模 p 意义下.

由 $T_1\equiv T_2\equiv\cdots\equiv T_6\equiv 0$,可知 $a+1,a^2+1,\cdots,a^6+1$ 中必须有 p 的倍数. 若不然,$S_1\equiv S_2\equiv\cdots\equiv S_6\equiv 0$ 推出 $x_1,x_2,\cdots,x_6\equiv 0$ 的矛盾. 这样大幅缩小了 a 的范围,快速排除掉 $a+1\equiv 0$ 的情况后,对“漏网之鱼”也可继续做幂和分析:

(1)若 $p\mid(a^6+1)$ 且 $p\nmid(a^2+1)$,则由 $T_1\equiv\cdots\equiv T_5\equiv 0$,知

$S_1\equiv\cdots\equiv S_5\equiv 0$,

$T_{12}\equiv(1+a^{12})S_0S_{12}+\mathrm{C}_{12}^6a^6S_6^2\equiv 0$.

故 $S_{12}\equiv\frac{\mathrm{C}_{12}^6}{12}S_6^2=77S_6^2$. ①

由牛顿幂和公式得

$S_6\equiv -6\sigma_6, S_{12}\equiv -S_6\sigma_6\equiv 6\sigma_6^2$,

与式①矛盾.

(2)若 $p\mid(a^3+1)$,则由 $T_1\equiv T_2\equiv T_4\equiv T_5\equiv 0$,知

$S_1\equiv S_2\equiv S_4\equiv S_5\equiv 0$.

分析 T_3、T_9 没有有效信息,下面分析 T_6. 注意到,

$T_6=(1+a^6)S_0S_6+\mathrm{C}_6^3a^3S_3^2\equiv 0$

$\Rightarrow S_6\equiv\frac{20}{12}S_3^2\Rightarrow\sigma_6\equiv -2\sigma_3^2$,

此时,$h(x)\equiv x^6-\sigma_3x^3+\sigma_6\equiv x^6-\sigma_3x^3-2\sigma_3^2$
$\equiv(x^3+\sigma_3)(x^3-2\sigma_3)$.

由于 -2 不为模 $p=37$ 的立方剩余,于是,$h(x)$ 的六个根不都在 F_p 中. 从而,X 不存在(也可用牛顿幂和公式求 S_6、S_9、S_{12},再代入 T_{12}得出其不被 p 整除,矛盾).

(3)若 $p\mid(a^2+1)$,则由 $T_1\equiv T_3\equiv T_5\equiv 0$,知 $S_1\equiv S_3\equiv S_5\equiv 0$.

故 $T_4\equiv(1+a^4)S_0S_4+\mathrm{C}_4^2a^2S_2^2\equiv 0$

$\Rightarrow S_4\equiv 2\sigma_2^4\Rightarrow\sigma_4\equiv 0$.

由牛顿幂和公式得

$S_6\equiv -2\sigma_2^3-6\sigma_6, S_8\equiv 2\sigma_2^4+8\sigma_6\sigma_2$.

故 T_8
$=(1+a^8)S_0S_8+\mathrm{C}_8^2(a^2+a^6)S_2S_6+\mathrm{C}_8^4a^4S_4^2$
$\equiv 0$
$\Rightarrow 36\sigma_6\equiv 5\sigma_2^3$.

记 $\sigma_2\equiv 2a$.

则 $\sigma_6\equiv -5\times 8a^3\equiv -3a^3$.

故 $h(x)\equiv x^6+\sigma_2x^4+\sigma_4x^2+\sigma_6$
$\equiv x^6+2ax^4-3a^3$
$\equiv(x^2-a)(x^2-9a)(x^2-25a)$.

从而,$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$ 六个数与 $\{\pm 1,\pm 3,\pm 5\}$ 成比例. 可验证,X 满足条件.

幂和方法可能计算量稍大,但计算过程中目标很明确.每种情况均是先按照逐步展开 T_m 的思路算出多项式 $h(x)$,再判断是否有解,计算过程中是比较有信心的.万一没有找到 $a\equiv\pm6$ 时的构造,幂和方法也可以具体地算出这组解,并证明其在乘法平移意义下是唯一的,这也是一个优点.

幂和方法是考虑数组的统计信息,类似于概率论中的随机变量的矩,幂和也是对数组分布信息的一种提炼.事实上,幂和方法与母函数方法也是有联系的,例如,母函数 $F(t)=\sum\limits_{x\in X}t^x$ 在 $t=1$ 处的导数即为 X 的元素和 $\sum\limits_{x\in X}x=S_1$,二阶导数即为 $\sum\limits_{x\in X}\frac{x^2-x}{2}=\frac{S_2-S_1}{2}$,高阶导数也都可用幂和表示.

本题的背景是某种因式分解问题.可以考虑更一般的问题:求两个整数集:

$$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\},Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_6\}$$

满足 $X+Y=\{x_i+y_j\mid i、j=1,2,\cdots,6\}$ 中的36个数构成模37的缩系.

新问题在模37意义下(据命题人编程搜索的结果)共有1 998个有序集合对 (X,Y) 满足要求.若进一步标准化,即要求 $x_1+x_2+\cdots+x_6\equiv0$(相应的 $y_1+y_2+\cdots+y_6\equiv0$),则标准化的 (X,Y) 共有 $\frac{1\,998}{37}=54$ 个,它们均与下列三个集合有关:

$$X_0=\{\pm1,\pm3,\pm5\},$$
$$X_1=\{\pm2,\pm3,\pm4\},$$
$$X_2=\{\pm1,\pm4,\pm16\}.$$

其中包括:$(X,Y)\equiv(kX_0,6kX_0)$(即原问题中的满足 X 与 Y 成比例的解)共18个;$(X,Y)\equiv(kX_1,8kX_2)$ 共18个;$(X,Y)\equiv(8kX_2,kX_1)$ 共18个.这表明,在标准化之后,X 与 Y 不成比例的解(即原问题之外的解)本质上只有一组,即:

$$(X_1,8X_2)$$
$$\equiv(\{\pm2,\pm3,\pm4\},\{\pm5,\pm8,\pm17\}),$$

其余的均为这组解乘以某个常数,或交换 X、Y 得到.

本题的得分情况如表3.

表 3

得分	21	18	15	12	9	6	3	0
人数	32	21	9	28	36	16	79	334

本题平均分是3.9分,是一道可做的难题.对于最终进入国家集训队的考生,这道题的平均分达到16分以上,而没有进入国家集训队但获得金牌的考生这道题的平均分不到5分.

若把问题中的37换成17或101,则对于文[1]中的解法本质上不改变题目的难度,只有一些计算量上(不大)的差异.但是对于很多考生在考场上采用的讨论手段,计算量可能会有较大的差异,由此影响到本题的得分率.

4 第四题

本题与马尔可夫链有一定联系,从一个初始状态出发,最终会趋向于一个周期的状态.解法均需考虑某个半不变量在稳定以后的取等条件,用到了组合与图论的一些基本技巧.大部分考生的解答如同文[1]中的解法或一些变形,考虑"赞成度"的最大值.也有一些解答使用了下面的半不变量.

方法 设 $G=(V,E)$ 是一个连通的非二部图,$f_i:V\rightarrow\mathbf{N}$ 是第 i 天每位科学家的赞成度.

考虑 $S_i=\sum\limits_{x\in V}\deg(x)f_i(x)^2$.

则 $S_{i+1}=\sum\limits_{x\in V}\deg(x)f_{i+1}(x)^2$

$$=\sum_{x\in V}\deg(x)\left[\frac{1}{\deg(x)}\sum_{xy\in E}f_i(y)\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{x\in V}\frac{1}{\deg(x)}\left(\sum_{xy\in E}f_i(y)\right)^2$$(取整符号性质)

$$\leqslant \sum_{x\in V}\sum_{xy\in E} f_i(y)^2 \text{（柯西不等式）}$$
$$= \sum_{y\in V} \deg(y) f_i(y)^2 = S_i,$$

其中，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

于是，$S_1, S_2, \cdots$ 是一列单调不增的非负整数，最终常值. 从而，存在正整数 m，使得 $S_m = S_{m+1}$.

下面证明此时的 f_m 为常值函数.

由上面的推导，知等号成立时，对于每个 $x \in V$，f_m 在与 x 相邻的顶点全体构成的集合 $N(\{x\})$ 上为常数. 于是，对于任意的 y、$z \in V$，若 y、z 之间有长度为 2 的路径（即有一个顶点与它们均相邻），则 $f_m(y)=f_m(z)$. 进而，若 y、z 之间有长度为偶数的路径，则 $f_m(y)=f_m(z)$.

由于 G 是连通的非二部图，G 中存在奇圈，任意两点之间均有长度为偶数的迹，因此，f_m 在 V 上取值为常值.

本题的得分情况如表 4.

表　4

得分	21	18	15	12	9	6	3	0
人数	335	31	15	12	12	19	50	81

本题平均分是 15.0 分，是一道简单题，平均分完全符合预期. 考场上考生给出的解法很多，除文[1]中的两种及此方法外，还可以考虑 $\sum_{e\in E} g_m(e)$（$g_m(e)$ 是边 e 的两个端点属于 $V\backslash M_m$ 的个数）这样的半不变量，也有用线性代数的方法.

获得银牌的考生平均分超过 17 分，比获得金牌的考生平均分低差不多 3 分，但比获得铜牌的考生平均分（4.0 分）要高出不少.

5　第五题

本题是一道并不困难的几何题，考查考生在义务教育阶段对于课本中描述的尺规作图基本规则的掌握和对基本几何图形的想象与理解. 和第一、二题一样，本题所涉及的所有知识点均在中学教材里.

阅卷中并没有出现五花八门的作图方法. 作图方法 1、2 见文[1]，另有一部分同学的作图方法类似下面两种.

一种是按一维几何对象的出现次序编号：

（1）记所给的两点为 O_1、A_1，以 O_1 为圆心、$O_1A_1=1$ 为半径作圆；

（2）作直线 O_1A_1，与圆的第二个交点为 B_1；

（3）以 B_1 为圆心、O_1B_1 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_2'，与（1）中的圆交于两点 C_1'、C_2'；

（4）以 B_2' 为圆心、$A_1B_2'(=3)$ 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_3'；

（5）以 B_3' 为圆心、$A_1B_3'(=6)$ 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_4'；

（6）以 B_4' 为圆心、$A_1B_4'(=12)$ 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_5'；

（7）作直线 $C_1'C_2'$，这是线段 O_1B_1 的中垂线，过 O_1B_1 的中点 M'；

（8）以 M' 为圆心、$M'B_5'(=22.5)$ 为半径作圆，与（2）中的直线的第二个交点为 A'；

（9）以 A' 为圆心、$A_1B_1'(=2)$ 为半径作圆，与（8）中的圆交于两点 X_1、X_2；

（10）联结 X_1B_5'，其长度为

$$\sqrt{(2\times 22.5)^2-2^2}=\sqrt{2\,021}.$$

只要作出半径为 22.5 的圆，再加两步（以直径的一端为圆心作半径为 2 的圆，再联结两圆交点和对径点），就可以得到满足要求的直线和点.

另一种是按一维几何对象的出现次序编号：

（1）~（2）同上；

（3）以 B_1 为圆心、$A_1B_1(=2)$ 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_2；

（4）以 B_2 为圆心、$A_1B_2(=4)$ 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_3''；

（5）以 B_3'' 为圆心、$A_1B_3''(=8)$ 为半径作圆，与直线的第二个交点为 B_4''；

（6）以 B_4'' 为圆心、$A_1B_4''(=16)$ 为半径作

圆,与直线的第二个交点为 B_5'';

(7)以 B_5'' 为圆心、$B_1B_4''(=14)$ 为半径作圆,与直线的第二个交点为 B_6''(与 O_1 在 B_5' 异侧);

(8)以 B_2 为圆心、$B_2B_1(=2)$ 为半径作圆,与(3)中的圆交于两点 D_1、D_2;

(9)作直线 D_1D_2,这是线段 B_1B_2 的中垂线,过 B_1B_2 的中点 M;

(10)以 O_1 为圆心、$O_1B_6''(=45)$ 为半径作圆,与(9)中的直线的第二个交点为 G_1、G_2,则

$$G_1M=\sqrt{G_1O_1^2-O_1M^2}=\sqrt{45^2-2^2}=\sqrt{2\,021}.$$

除以上几种作法外,也有很多考生利用

$$2\,021=2\,048-27=(32\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2$$

给出如下作图方法.

按一维几何对象的出现次序编号:

(1)~(3)同上;

(4)以 B_2 为圆心、$O_1B_2(=3)$ 为半径作圆,与直线的第二个交点为 F_3;

(5)以 O_1 为圆心、$O_1B_2(=3)$ 为半径作圆,与(4)中的圆交于两点 F_1、F_2,与直线的第二个交点为 A_2'';

(6)作直线 F_1F_2,这是线段 O_1B_2 的中垂线,过 O_1B_2 的中点 M'';

(7)以 F_3 为圆心、$A_1F_3(=7)$ 为半径作圆,与直线的第二个交点为 F_4;

(8)以 M'' 为圆心、$A_2''F_4(=16)$ 为半径作圆,记与(2)中直线的一个交点为 K_1,与(6)中直线的一个交点为 K_2;

(9)以 F_1 为圆心、$K_1K_2(=16\sqrt{2})$ 为半径作圆,与(2)中直线交于两点 N_1、N_2,则

$$N_1N_2=2M''N_2=2\sqrt{F_1N_2^2-F_1M''^2}=2\sqrt{(16\sqrt{2})^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2\,021}.$$

值得一提的是,考试结束后,互联网上出现了只用到 8 个一维几何对象就能作出 $\sqrt{2\,021}$ 的作图方法,基本的想法是利用 $2\,021=46^2-(12^2-7^2)$.

又可证明用 6 个一维几何对象最多只能得到长度为 32 的线段,于是,作出 $\sqrt{2\,021}$ 至少要用 7 个一维几何对象.

由于本题的考查内容在近年的数学竞赛中并不常见,于是评分标准订得较为宽松.对于考生因为各种原因漏数的步骤,主试委员会都逐一补齐,按最后实际出现的一维几何对象总数给分:总数 11 个的作法,得 9 分;总数 12 个的作法,给 6 分;总数 13—15 个的作法,给 3 分.

本题的得分情况如表 5.

表 5

得分	21	18	15	12	9	6	3	0
人数	376	2	1	0	62	33	34	47

本题平均分是 15.8 分,但在获得金、银牌的考生中,平均分都比第四题略低,而获得铜牌的考生此题的平均分接近 1,0 分.

整体上讲,本题的答题情况要好于预期,反映了大多数考生对于平面几何中尺规作图的基本操作掌握得还是不错的.但从答题的卷面来看,还是有一部分考生对于如何使用圆规这样写在教材里的基本操作并不理解.

在历史上,法国的 Émile Lemoine(1840—1912,工程师、(业余)数学家(几何学家)、(业余)音乐家,平面几何中的 Lemoine 点与 Lemoine 圆是以他的名字命名的)于 1893 年出版了一本书《几何作图的艺术》,其中列举了把一些几何作图方法分解成若干种基本操作后,每种操作需要进行的次数.

几何作图问题在数学中的历史地位是不言而喻的.1941 年,法国的 Henri Lebesgue(1875—1941,法国数学家,现代积分理论的创始人.在 1941 年的课程教学中,他从几何作图讲到相应的代数问题(某些实数的无理

性、超越性)，最后讲到代数曲线上的有理点)主讲的最后一门课的主题就是“几何构造”.

若在题面中增加寻找 9 步完成的作图方法，则最后的结果有很大可能会是大多数考生少得几分. 在假设其他题得分不变的情况下(理论上说，做这样的改动，会影响到一部分考生第六题的得分)，对于各分数线基本上会是一个简单的平移，对于考生排名的影响也会非常小.

6 第六题

本题是 F_3 上的二项式问题，主要思路是使用 $(x+y)^3 \equiv x^3+y^3 \pmod 3$ 将每个多项式化简. 在该过程中，若 a、$n-a$ 在三进制下的同一位数码分别是 1、2，式子就会影响其他的数位，而其他的情况则不会互相影响.

于是，第一问要选择 n 使得这种情况不出现；而第二问要选择合适的 a，使得即便出现了这种较为混乱的情况也不影响处理. 加强归纳的方法(第二问的文[1]证法 1)便是出自这个思路.

另外，第一问中的 n 可以用如下方法猜测：结合第二问的结论，知 $F(n)=\frac{n-1}{3}$，故展开式中应最多有 $\frac{2n+4}{3}$ 项的系数不是 3 的倍数. 于是，$\frac{2n+4}{3}$(在三进制表达下)必是一个比较有规律的数. 由此，结合 n 模 3 余 1，就能猜出 n 应当是某个有规律的数减去 2，即类似 3^k-2、$2\times 3^k-2$.

在考场上，做出第一问的考生达到了 100 多人，其中大部分考生的作法基本上是文[1]证法 1，少数考生的解答接近文[1]证法 2；做出第二问的考生不多，且都使用的是文[1]证法 1，没有使用文[1]证法 2 且完成证明的考生.

本题的得分情况如表 6.

表 6

得分	21	18	15	12	9	6	3	0
人数	14	2	1	38	69	14	34	383

本题平均分是 2.9 分，比第三题难一些. 进入集训队的考生本题的平均得分接近 11 分，而没有进入集训队但获得金牌的考生这道题的平均分不到 5 分.

在本题的阅卷过程中，注意到回答第一问时，有不少考生发现了 $3n+4$ 的情况可以化归到 n 的情况，但是却没有考虑到 n 必模 3 余 1，不等式才能成立，从而，错误地认为所有模 3 余 1 的数 n 均满足题目结论. 事实上，只需要验证到 $n=10$，就可以发现并非如此. 无独有偶，在第二问中也有部分考生试图先取定 a，并使用数学归纳法来证明，但在归纳时都没有去验证归纳基础，出现了严重的失误. 例如，认为 $f(4,2)\leqslant\frac{4-1}{3}=1$，事实上 $f(4,2)=2$.

从第四、五题的得分情况可以推断出，能在第六题上做出实质性内容的考生应该不会花费太多时间在第四、五题上. 换句话说，考生是有足够的时间来完成第六题的，但出现失误表明部分考生对于数学归纳法学得并不扎实，用得也不规范.

7 成绩结果分析

7.1 得分分布

今年参加决赛的考生人数比去年有大幅增加，总数为 556 人，整张考卷(满分 126 分)的平均分 $m=66.5$，标准差 $\sigma=25.0$.

在区间 $[m-\sigma, m+\sigma]$ 范围内的考生 384 人(正态分布值 379 人)；在区间 $[m-2\sigma, m+2\sigma]$ 范围内的考生 532 人(正态分布值 530 人)，图 1 为本届试题得分分布情况.

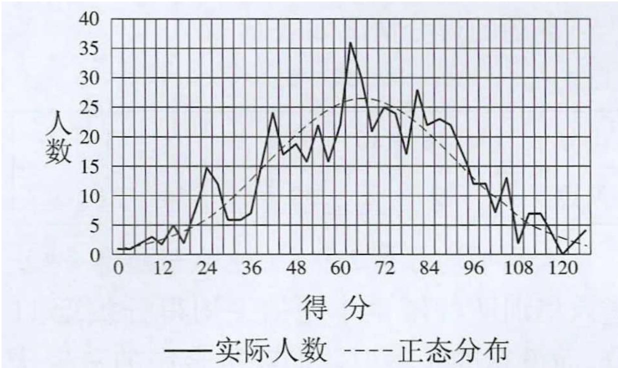

图1

本次试题在一定程度上兼顾了选拔性与普及性.再加上考试推迟了四周,考生准备时间有所增加,平均得分较最近几届有所提高,最终的得分分布主试委员会认为是比较合理的.

7.2　分数线

7.2.1　银牌

银牌的获奖人数理论上是全体考生的40%,实发229人,占比41.2%,银牌线为51分(银牌线理论值(全体考生得分的第30百分位值)按正态分布应在区间[$m-0.53\sigma$,$m-0.52\sigma$]=[53.2,53.5]中).

在银牌线±21分(即[30,72]分)的范围内,考生总分与各题得分的统计相关系数如表7.

表 7

题号	一	二	三	四	五	六
与总分的相关系数	0.22	0.38	0.17	0.61	0.25	0.19

7.2.2　金牌

金牌的获奖人数理论上是全体考生的30%,实发183人,占比32.9%,金牌线为81分(金牌线理论值(全体考生得分的第70百分位值)按正态分布应在区间[$m+0.52\sigma$,$m+0.53\sigma$]=[79.5,79.8]中).

在金牌线±21分(即[60,102]分)的范围内,考生总分与各题得分的统计相关系数如表8.

表 8

题号	一	二	三	四	五	六
与总分的相关系数	0.09	0.55	0.45	0.24	0.27	0.42

7.2.3　中国国家集训队

由于中国国家集训队的人数是固定的60人,因此参赛考生越多,竞争就越激烈.2022年中国国家集训队线的理论值(全体考生得分的第89百分位值)按正态分布应在区间[$m+1.23\sigma$,$m+1.24\sigma$]=[97.27,97.52]中,与实际情况基本相符:进入集训队的最低分是96分.(对于总分为96分的同学(共12人),根据赛前领队会议上公布的排序规则:"若总分相同,则先对成绩加权计分(加权总分=第一题得分+第四题得分+(第二题得分+第五题得分)×1.1+(第三题得分+第六题得分)×1.2),再以加权总分高的排在前面.若加权后分数仍然相同,则再依次比较第六题、第三题、第五题、第二题、第四题、第一题的分数,分数高的排在前面."本次比赛实际只用到了"加权总分"排序和"第六题得分"排序.)

两天考试,每一天的第60名均为51分(第一天第48~65名均为51分,第二天第42~97名均为51分).进入国家集训队的60名考生两天得分的分布如表9.

表 9

得分	63	60	57	54	51	48	45	42	39
第一天	20	9	3	8	4	6	9	1	0
第二天	10	3	0	13	20	1	2	9	2

在集训队线±21分(即[75,117]分)的范围内,考生总分与各题得分的统计相关系数如表10.

表 10

题号	一	二	三	四	五	六
与总分的相关系数	0.05	0.39	0.67	0.18	0.12	0.45

参考文献:

[1]　2021年全国中学生数学奥林匹克(决赛)[J].中等数学,2022(2):18.

[2]　J.阿达玛　著,G.Darboux主编.初等数学教程:几何(平面部分)[M].上海:上海科学技术出版社,1964,7.