Triangolo di Tartaglia

Riccardo Perego, Emmanuele Villa

12 marzo 2012

Indice

1 Descrizione del problema

I sottoinsiemi di un insieme possono essere ripartiti a seconda del numero di elementi che contengono. Nel caso dell'insieme $\{a, b, c\}$ ciò equivale a considerare separatamente il sottoinsieme vuoto, i tre sottoinsiemi $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ che contengono un solo elemento , i tre sottoinsiemi di ordine 2 (che sono $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$) e infine $\{a, b, c\}$ stesso.
La risposta alla domanda di quanti siano i sottoinsiemi (di un insime) che contengono un dato numero di elementi è fornita dai *coefficienti binomiali*.
Il *Triangolo di Tartaglia* è quella tabella che serve a calcolare lo sviluppo della potenza di un binomio.

```
                          1
                       1     1
                    1     2     1
                 1     3     3     1
              1     4     6     4     1
           1     5     10    10    5     1
        1     6     15    20    15    6     1
     1     7     21    35    35    21    7     1
  1     8     28    56    70    56    28    8     1
1    9     36    84    126   126   84    36    9     1
```

Figura 1: Triangolo di Tartaglia

Per curiosità abbiamo visto che la distribuzione della parità (il resto della divisione per due) crea un effetto molto interessante sul *Triangolo di Tartaglia*.
Abbiamo messo in evidenza i numeri dispari della tabella con un puntino bianco.

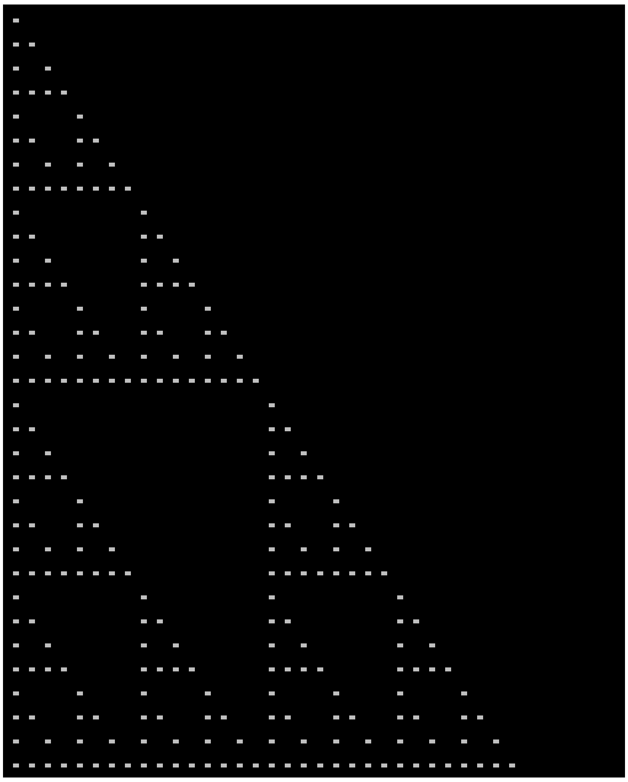

Figura 2: Distribuzione della parità

Con che regola crescono i triangoli che si formano dalla distribuzione di parità del *Triangolo di Tartaglia*?

2 Calcolo Computazionale

Per determinare in modo veloce e l'aumentare del numero di triangoli che si formano abbiamo scritto un programma in linguaggio C++.
Qui di seguito riportiamo il programma in questione, specificando che la costruzione del triangolo avviene tenendo solo conto della parità degli elementi senza calcolarli, in modo da riuscire ad arrivare alla cinquantesima riga mantenendo il programma leggero.

```
int main(int argc, char *argv[]) {

        //dichiaro la matrice
        int tartaglia[50][50];

        int i, j;

        //la riempio di zeri
        for(i=0; i<=50; i++)
                for(j=0; j<50; j++)
                        tartaglia[i][j]=0;

        //riempio le posizioni che contengono sicuramente 1
        for(i=1; i<50; i++)
        {
                tartaglia[i][1]=1;
                tartaglia[i][i]=1;
        }

        //genero il triangolo in base alla relazione di ricorrenza
        for(i=3; i<50; i++)
                for(j=2; j<i; j++)
                {
                        if(tartaglia[i-1][j] == tartaglia[i-1][j-1])
                                tartaglia[i][j]=0;
                        else
                                tartaglia[i][j]=1;
                }

        system("PAUSE");
}
```

A questo punto possiamo scrivere la funzione che conta i triangoli in modo meccanico, ovvero per ogni punto dispari del triangolo, scende in verticale di un valore incrementale, va a destra dello stesso valore e torna in alto, verificando che tutti i punti toccati durante lo spostamento siano dispari.

```
int contaTriangoli(int i, int j, long long int triangolo[50][50], int limite)
{
    int count = 1;
    int riga = i;
    int colonna = j;
    int numTriangoli=0;
    bool skip=0;

   //parto dal punto e aumento il count dello spostamento ogni volta che torno qui
    while((i + count)<=limite || (j+count)<=limite) {
                skip=0;

                //scendo dal punto in verticale
                for(riga=i+1; riga<=(i+count); riga++) {
                        if(triangolo[riga][j]==0 || (i+count)>limite) {
                                return numTriangoli;
                        }
                }
        riga--;
                //vado verso destra dello stesso valore
                for(colonna=j+1; colonna<=j+count; colonna++) {
                        if(triangolo[riga][colonna]==0 || (j+count)>limite) {
                                skip=1;
                                break;
                        }
                }

                if(!skip) {
                        colonna--;

                        //torno su in diagonale fino al punto iniziale
                        for(; riga!=i; riga--, colonna--) {
                                if(triangolo[riga][colonna]==0) {
                                        break;
                                }
                        }

                        if(!(riga!=i)) {

                                //triangolo trovato!
                                numTriangoli+=1;
                        }
                }
                count++;
    }
    return numTriangoli;
}
```

A questo punto il calcolo della successione si limita alla chiamata di procedura con limite incrementato di 1 ad ogni chiamata:

```
int successione;
for(successione=1;successione <100; successione++) {
          num=0;

          for(i=1; i<=50; i++)
                    for(j=1; j<=i; j++)
                              if( tartaglia[i][j]!=0 )
                                        num += contaTriangoli(i,j,tartaglia, successione);

          printf(" %d ", num);
}
```

Riportiamo i nostri risultati nella pagina successiva.

3 Osservazioni

3.1 Sull'analisi computazionale

Successione del numero di triangoli calcolata computazionalmente fino alla cinquantesima riga:

0 1 1 4 4 6 6 13 13 15 15 21 21 25 25 40 40 42 42 48 48 52 52 66 66 70 70 82 82 90 90 121 121 123 123 129 129 133 133 147 147 151 151 163 163 171 171 201 201

Notiamo subito che i numeri sono a due a due uguali, quindi possiamo iniziare a definire una "legge" valida per questa successione:

$$ai = (ai - 1)\ sse\ (ai - 1)! = (ai - 2)$$

Per far valere questa legge è necessario porre $a1 = 0$ e $a2 = 1$ definendo come ai come il numero di triangoli rettangoli aventi vertici e lati che toccano solo numeri dispari, ricavati unendo i puntini del triangolo di tartaglia fino alla riga i.

3.2 Sulle impressioni visive

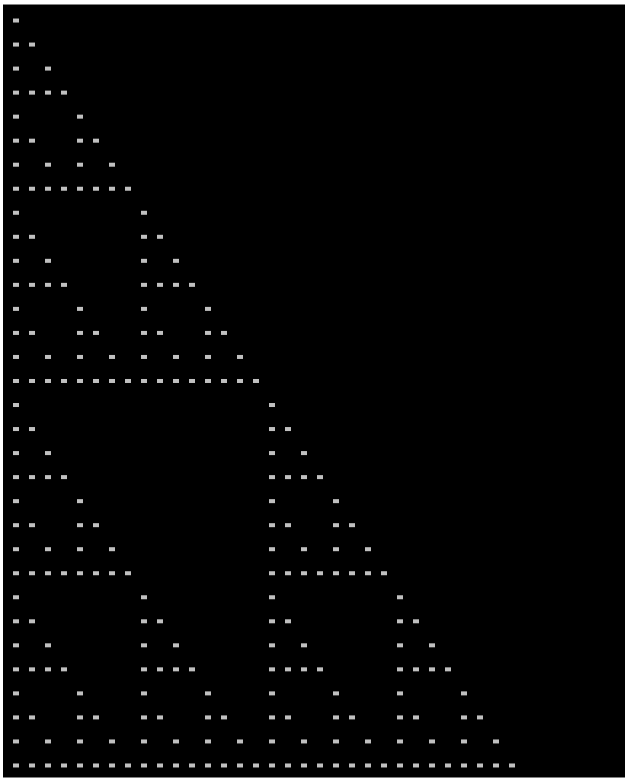

Figura 3: Distribuzione della parità

Si può facilmente notare un'altra proprietà legata al numero dei triangoli presenti.
Ogni volta che ci troviamo di fronte a una linea di numeri tutti dispari, il numero di triangoli che possiamo contare aumenta di 1 (il triangolo avente come vertice il primo valore del triangolo di tartaglia) più il numero di numeri dispari della riga precedente (che vanno a formare dei triangoli con la riga stessa). Visivamente, vediamo quali triangoli si aggiungono in questo modo:

Notiamo anche che una riga di numeri tutti dispari viene logicamente subito dopo una riga dove si alternano strettamente elementi pari ed elementi dispari.
A questo punto, possiamo iniziare ad abbozzare una relazione di ricorrenza per calcolare il numero $i - esimo$ della successione in base a queste proprietà che abbiamo visto:

$$a(i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i = 1 \\ 1, & \text{se } i = 2 \\ a(i-1), & \text{se } a(i-1) \mathrel{!=} a(i-2) \end{cases}$$

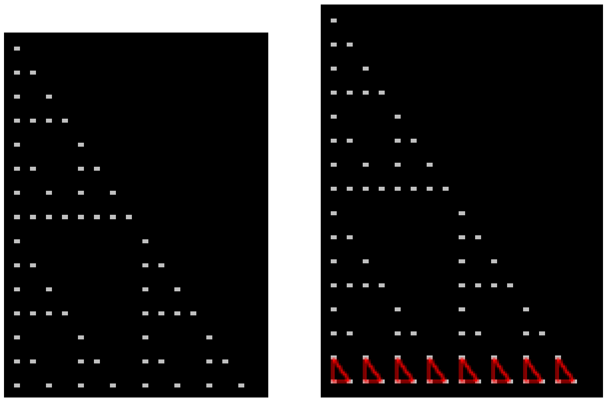

Figura 4: Riga precedente a una riga tutta dispari

AGGIUNGERE LA FORMULA AI CASI ALLA VOCE ALTRIMENTI
$a(i-1) + A + ...$ Dove A è pari a 1 più il numero di elementi dispari della riga $(i-1)$esima se la riga $i$esima ha solo elementi dispari.

3.3 Sui grafici dell'aumento del numero dei triangoli

Prima di continuare le nostre considerazioni, osserviamo il seguente grafico, che riporta il crescere della successione al crescere delle righe considerate. fino alla 50sima (Si noti che il grafico dovrebbe essere puntiforme, ma i punti sono stati uniti con una linea per renderlo visivamente più intuibile).

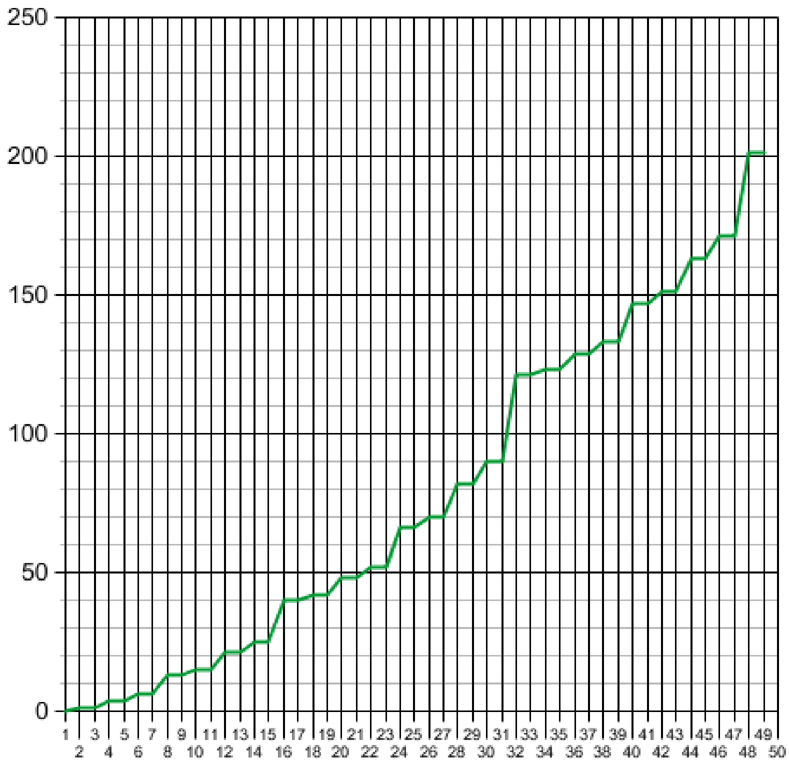

Figura 5: Grafico della crescita di righe e triangoli generati

Da questo grafico riusciamo poi a ricavarne un altro, che riporta la differenza tra i triangoli ricavabili dalla i-esima riga e dalla i-1esima.

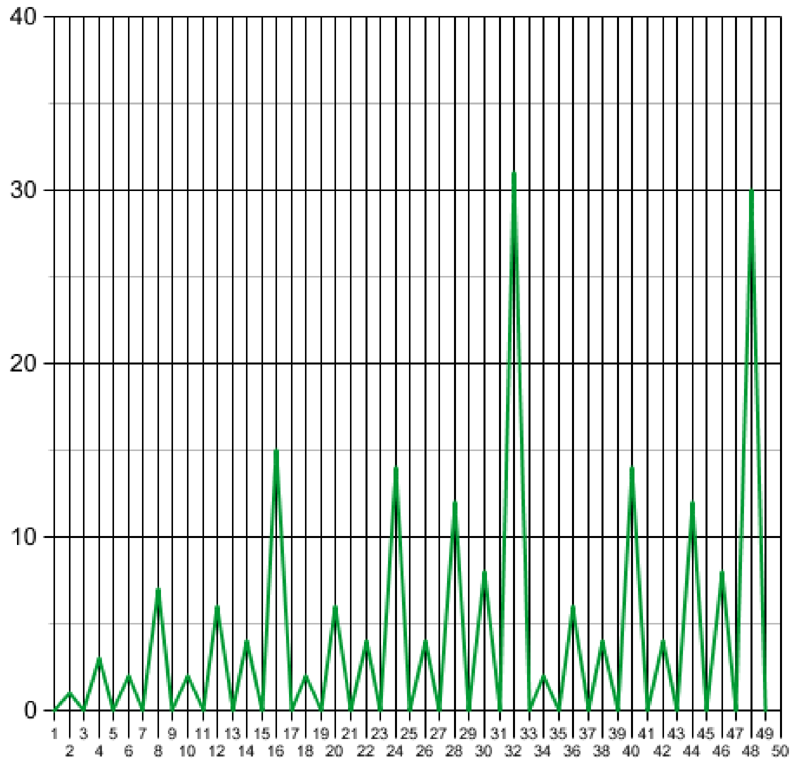

Figura 6: Grafico della crescita di righe e triangoli generati

Si notano immediatamente dei picchi alle righe $8, 16, 24, 32$ (casualmente multipli di 8?), che portano ad un grande aumento del numero dei triangoli rispetto alla riga precedente. Andando a guardare il disegno, vediamo che gli aumenti più repentini corrispondono alle righe con tutti numeri dispari, mentre gli altri corrispondono alle righe con dei "segmenti" di tutti numeri dispari:

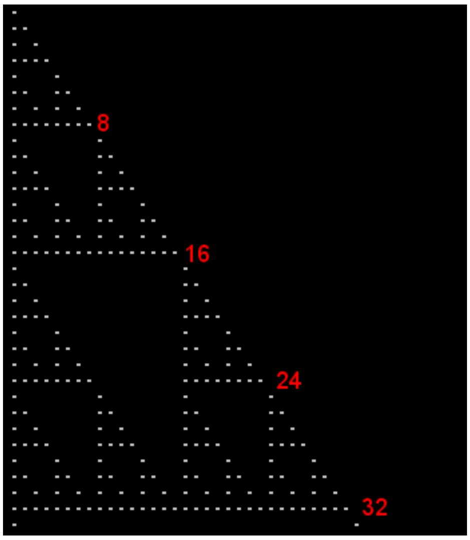

Figura 7: Picchi corrispondenti alle righe tutte di numeri dispari

4 Sviluppo della relazione

4.1 Un primo abbozzo

Da qui possiamo "enunciare" una regola che generalizza la definizione del coefficiente A definita prima, che diceva "A è pari a 1 più il numero di elementi dispari della riga $i-1$ esima se la riga i-esima ha solo elementi dispari".
Generalizziamola -in italiano- quindi in questo modo: "A è pari al numero di elementi dispari della riga i-1 più 1 se nella riga i ci sono solo elementi dispari"

Vediamo ora se questo coefficiente A è l'unico aumento che abbiamo nel numero di triangoli, prendendo come esempio la "transizione" riga 23 - riga 24.

I triangoli che soddisfano il requisito del coefficiente A sono 8, tuttavia alla riga 24 i triangoli aumentano di 14. Infatti si può notare facilmente quali altri triangoli sfuggono al nostro conteggio:

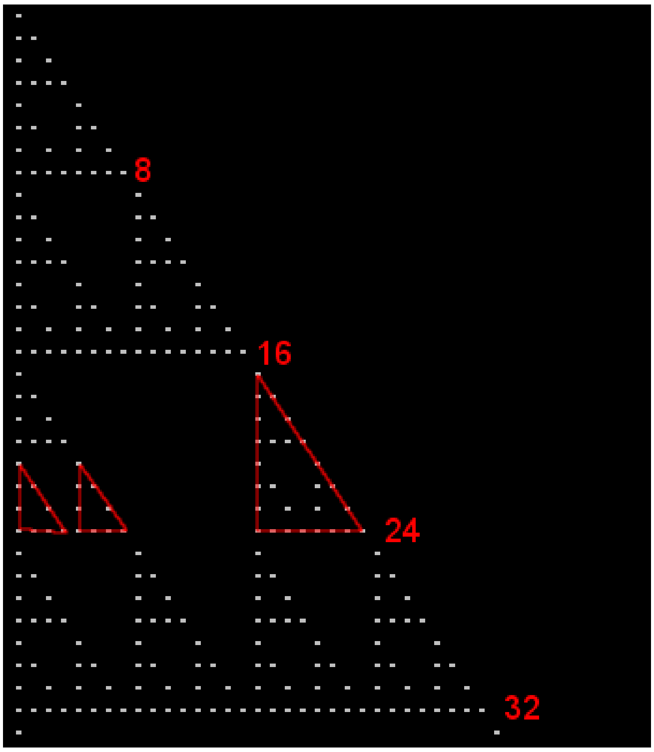

Figura 8: Picchi corrispondenti alle righe tutte di numeri dispari

Sono in effetti in numero di 6 e almeno con questo abbiamo verificato che il coefficiente A che conta i triangoli formati con la riga precedente, risulta di valore corretto.
Dal disegno si può notare che questi particolari triangoli che non abbiamo ancora conteggiato si trovano a gruppi di tre e il loro numero raddoppia ad ogni multiplo di 8. Notiamo anche che un aumento nel numero dei triangoli "più piccoli" c'è anche ad ogni riga multipla di 4.
Che questa proprietà perduri fino anche a numeri molto più grandi? Non ci resta che scoprirlo con questa immagine che esplicita solo gli aumenti di questi due triangoli, ignorando il triangolo più grande formato dall'intero triangolo di tartaglia, che aumenta col coefficiente A.

4.2 Studio degli altri coefficienti

Scriviamo in rosso l'aumento del numero dei triangoli suddividendoli in base alla loro grandezza, dal più piccolo al più grande (tralasciando come detto quello più grande e quelli più piccoli, già compresi in A).

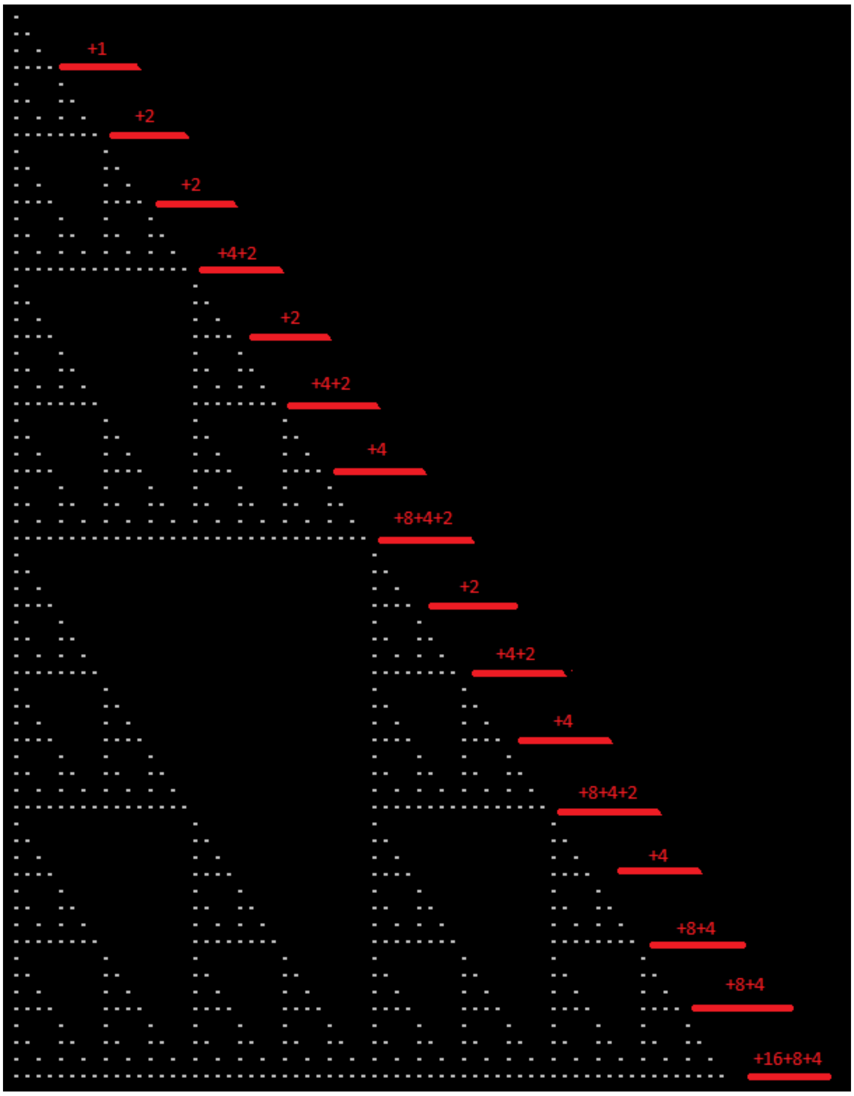

Figura 9: Primo coefficiente triangoli altezza 4, secondo triangoli altezza 8, terzo triangoli altezza 16

Da questa immagine possiamo trarre numerose conclusioni, che riportiamo insieme a quelle che avevamo già considerato:

- Non vi è alcuna modifica nel numero dei triangoli nelle righe del triangolo dispari;
- CONTIAMO I TRIANGOLI DI ALTEZZA 2 (coefficiente A)
  In tutte le righe pari, il numero di triangoli generati di altezza 2 che si possono contare sono uguali al numero di numeri dispari nella riga precedente;
- CONTIAMO I TRIANGOLI DI ALTEZZA 4 (coefficiente B)
  In tutte le righe divisibili per 4, il numero di triangoli di altezza 4 che si possono contare sono i seguenti (andiamo a capo quando incontriamo una riga di tutti elementi dispari e mettiamo — per separare una parte di successione uguale alla precedente:
  1
  2
  2, 4
  2, 4—4, 8
  2, 4, 4, 8 — 4, 8, 8, 16

Ora proviamo ad azzardare come sarà l'aumento del numero di triangoli fino alla prossima riga costituita da tutti numeri dispari:

2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16 — 4, 8, 8, 16, 8, 16, 16, 32

E verifichiamo con il continuo della figura che la nostra successione di aumento dei triangoli sia giusta.

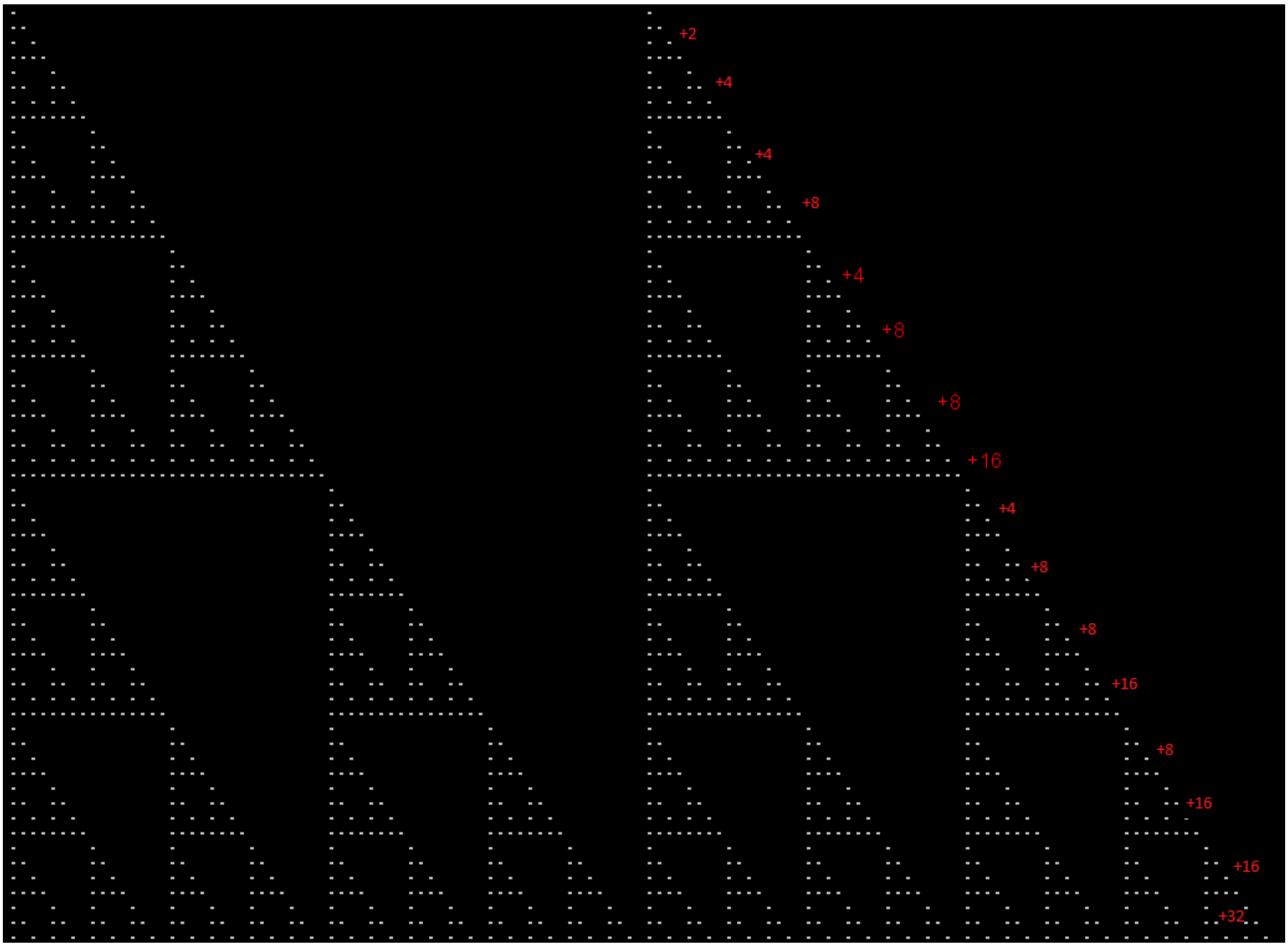

Figura 10: Triangolo a partire dalla riga 65

La nostra intuizione era quindi corretta, per esplicitare questa successione in una formula matematica, dobbiamo però scoprire che relazione c'è tra questi numeri e le proprietà delle righe. Iniziamo quindi con l'osservare quali sono le prime righe con numeri tutti dispari:

1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 ...

Come si può notare facilmente, questi valori sono potenze di due. Osserviamo ora di quanto aumenta il numero di triangoli in corrispondenza di queste righe:

0 - 1 - 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 ...

Tralasciamo i primi due valori che sembrano in qualche modo sfalsare il legame tra le due successioni e scriviamo il numero delle righe sotto forma di potenza di due, otteniamo quindi:

Riga	Numero
2^2	2^0
2^3	2^1
2^4	2^2
2^5	2^3
2^6	2^4
2^7	2^5

Da ciò possiamo dedurre che alla riga numero 2^i vengono aggiunti al numero dei triangoli generati 2^{i-2} triangoli di altezza 4.
Alla riga 2^{i+4}, inoltre, sono solo 2^1 i triangoli che aumentano al conteggio, mentre sono 2^{i-3} nel caso della riga 2^{i-4}.
Si nota allora una ridondanza nell'aumento del numero dei triangoli, una successione che riprende dall'inizio ogni volta che si incontra una riga di elementi tutti dispari.

4.3 Altre osservazioni sulla figura

Notiamo ora che il numero di triangoli di altezza 4 generato nella riga n divisibile per 4 è pari al doppio del numero di segmenti di numeri dispari della riga precedente. In generale, ogni coppia di triangoli adiacenti genera un altro triangolo più grande. 4 triangoli adiacenti generano invece 3 triangoli più grandi 8 triangoli adiacenti generano 7 triangoli più grandi Osserviamo che 16 triangoli adiacenti generano 15 triangoli più grandi.
Queste righe corrispondono alle righe di numeri tutti dispari, e comprendono quindi il grande triangolo con il primo elemento come vertice.

4.4 Conclusione delle osservazioni

Possiamo quindi esplicitare in modo più definito la relazione di ricorrenza abbozzata all'inizio della nostra ricerca:

> *Il numero di triangoli che si generano alla riga n del triangolo di tartaglia è pari al numeri dei triangoli generati fino alla riga n-1, più i coefficienti A, B e C.*

Indichiamo con n il numero della riga presa in considerazione.
Coefficiente A: $A = 0$ se n è dispari. Altrimenti è uguale al numero di numeri dispari contenuti alla riga $n-1$.
Coefficiente B: $B = 0$ se n non è divisibile per 4, altrimenti è uguale al doppio del numero di segmenti divisi di numeri dispari nella riga attuale meno 4, ovvero il numero dei numeri dispari nella riga $n - 3$.
Coefficiente C: $C = 0$ se n non è divisibile per 8, altrimenti è uguale $(B-1) - D$ dove D è il numero di "spazi" tra i triangoli alti 4.

5 Esplicitazione della formula

Cerchiamo di esplicitare in modo matematico questi coefficienti.
Innanzitutto definiamo questo insieme:

$$R(n) = \{\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n}\}$$

con n,k $\in \mathbb{N}$ che rappresenta i numeri della n-esima riga del triangolo di tartaglia
Prima di proseguire è necessario anche definire una relazione d'ordine su questo insieme. Generalizzando gli elementi dell'insieme $R(n)$ si può affermare che sono tutti della forma $\binom{n}{k}$.

Chiamiamo quindi a, b due generici elementi di $R(n)$, la relazione d'ordine tra gli elementi di $R(n)$ è così definita in base al numero k con cui sono stati calcolati, scritti come a(k) e b(k) per distinguerli:

$$aRb \Leftrightarrow a(k) < b(k)$$

Definiamo ora un sottoinsieme non ordinato di R:
$E(n) = \{x : x \in R(n), a \in \mathbb{N}$ e x=2a+1$\}$
e un altro sottoinsieme:
$S(n) = \{x : x \in R(n), a \in R(n)$ e $\binom{n}{x} = 2a$ e $\binom{n}{x-1} = 2a + 1\}$
che ci serviranno per definire successivamente la relazione di ricorrenza trovata. Ora siamo pronti per affermare che:

Il numero di triangoli generati alla riga n è pari a: $G(n) = G(n - 1) + A + B + C - D$

E questi coefficienti valgono:

$$A = \begin{cases} 0, & \text{se } n = \text{(2a+1)} \\ |E(n-1)|, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} 0, & \text{se } n/4 \neq 0 \\ |E(n-3)|, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 0, & \text{se } n/8 \neq 0 \\ (B-1), & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$D = |S(n)|$$

5.1 Implementazione

Scriviamo quindi una funzione da aggiungere al programma precedente che conta il numero dei triangoli secondo la relazione di ricorrenza appena ricavata:

```
int contaInRicorrenza(int riga, long long int triangolo[100][100]) {

        //le prime due righe hanno valori dati
        if(riga==1) return 0;
        if(riga==2) return 1;

        //inizializzo i coefficienti
        int a,b,c,d,i;
        a=0;
        b=0;
        c=0;
        d=0;
        i=0;

        if( (riga%2)!=0 )          //se il numero e' dispari
        {
                a=0;
                b=0;
                c=0;
        }
        else
        {

                //calcolo il coefficiente A
                for(i=1; i<=(riga-1); i++)
                        if(triangolo[riga-1][i]!=0)
                                a++;

                if( (riga%4) !=0 )
                {
                        b=0;
                        c=0;
                }

                else
                {

                        //calcolo il coefficiente B
                        for(i=1; i<=(riga-3); i++)
                        {
                                if(triangolo[riga-3][i]!=0)
                                        b++;
                        }

                        for(i=1; i<=(riga-4); i++)
                                if(triangolo[riga-4][i]==0)
                                        break;

                        if( (riga%8) !=0 )
                                c=0;

                        else
                        {

                                //calcolo il coefficiente D
                                for(i=2; i<=riga; i++)
                                {
```

```
                                        if(triangolo[riga][i]<triangolo[riga][i-1])
                                                d++;
                                }

                                c=b-1-d;
                        }
                }

        }

        return contaInRicorrenza(riga-1, triangolo) + a + b + c;
}
```

E' facile capire, osservando l'output, che la relazione di ricorrenza e' valida.

6 Un altro approccio

6.1 La relazione delle differenze

Nonostante la relazione sia corretta, essa si basa su osservazioni e non su calcoli prettamente matematici basati sul numero della riga, quindi tentiamo ora un approccio differente: proviamo a calcolare il numero di triangoli alla data riga tentando di trovare la legge che forma la successione dei numeri rappresentanti il numeri di triangoli che si formano ad ogni riga.
Successione delle differenze del numero di triangoli (tralasciando tutti gli zeri delle righe dispari):

1 3 2 7 2 6 4 15 2 6 4 14 4 12 8 31 2 6 4 14 4 12 8 30 4 12 8 28 8 24...

Possiamo notare un presentarsi in successione delle potenze di 2 sottratte di una unita':
1
3 2
7 2 6 4
15 2 6 4 14 4 12 8
31 2 6 4 14 4 12 8 30 4 12 8 28 8 24 16
63 2 6 4 14 4 12 8 30 4 12 8 28 8 24 16 62 4 12 8 28 8 24 16 60 8 24 16 56 16 48 32
127 2 6 4 14 4 12 8 30 4 12 8 28 8 24 16 62 4 12 8 28 8 24 16 60 8 24 16 56 16 48 32 4 12 8 28 8 124 16 60 8 24-
-16 56 16 48 32 124 8 24 16 56 16 48 32 120 16 48 32 112 32 96 64

Queste sottosequenze iniziano col numero $2^n - 1$ e contengono 2^{n-1} elementi.

Iniziamo con lo studio di questa successione utilizzando queste stringhe, cerchiamo di calcolare il valore della somma dei numeri contenuti in queste stringhe.
Definiamo come S_n la somma degli elementi della striscia che parte da $2^n - 1$ e partiamo definendo il valore della catena S_0 e scrivendo il generico successivo osservando che alcuni numeri si ripetono sempre, ovvero il primo numero della catena e' $2^n - 1$, il valore centrale e' $2^n - 2$ e le due parti di numeri cosi' suddivise sono una il doppio dell'altra:

$S_0 = 1$, $n \geq 1$
$S_n = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} - 2 + 3(S_{n-1} - 2^n + 1) =$
$= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 3 + 3 * S_{n-1} - 3 * 2^n + 3 =$
$= 2^{n+2} + 3 * S_{n-1} - 3 * 2^n =$
$= 4 * 2^n - 3 * 2^n + 3 * S_{n-1} =$
$= 2^n + 3 * S_{n-1}$

Ora che conosciamo la ricorrenza a cui rispondo i termini della successione, possiamo esplicitarne alcuni in modo da ottenere la legge che genera i numeri.

$S_n = 3 * S_{n-1} + 2^n$
$S_{n-1} = 3 * S_{n-2} + 2^{n-1}$
$S_{n-2} = 3 * S_{n-3} + 2^{n-2}$

Sostituiamo S_{n-2} nella formula di S_{n-1}:
$S_{n-1} = 2^{n-1} + 3 * (3 * S_{n-3} + 2^{n-2}) =$
$= 2^{n-1} + 9 * S_{n-3} + 3 * 2^{n-2}$

Ed ora sostituiamo questa formula in S_n:
$S_n = 2^n + 3 * (2^{n-1} + 9 * S_{n-3} + 3 * 2^{n-2}) =$
$= 2^n + 3 * 2^{n-1} + 27 * S_{n-3} + 9 * 2^{n-2} =$
$= 27 * S_{n-3} + 9 * 2^{n-2} + 3 * 2^{n-1} + 1 * 2^n$
Generalizziamola:
$S_n = 3^n + \sum_{k=0}^{n-1} 3^k * 2^{n-k} =$
$= 3^n + 2^n * \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{2^k} =$
$= 3^n + 2^n * \frac{(\frac{3}{2})^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} =$
$= 3^n - 2^n$

Questa successione è già nota in matematica:

0, 1, 5, 19, 65, 211, 665, 2059, 6305, 19171, 58025, 175099, 527345, 1586131, 4766585, 14316139, 42981185, 129009091, 387158345, 1161737179, 3485735825, 10458256051, 31376865305, 94134790219, 282412759265, 847255055011 ...

Abbiamo così ottenuto la somma delle sequenze fino alla sequenza n. Ora non ci resta che trovare in base a quale legge rispondono le ripetizioni dei numeri interni.
Essi sono:

2 6 4 14 4 12 8 30 4 12 8 28 8 24 16 ...

Cerchiamo quindi di capire come questa successione viene generata. Usiamo a questo scopo *OEIS*, un'enciclopedia di successioni di numeri interi, che ci dà un indizio su come vengono generati alcuni di questi numeri. Otteniamo dal sito questa successione che ha evidentemente molti numeri in comune con la nostra:

2 6 4 14 12 8 30 28 24 16 ...

Si tratta della successione delle differenze ordinate dei numeri 2^k con $k \geq 1$. Tuttavia, troppi sono i numeri che diversificano le due successioni.

6.2 Sub-successioni

Tentiamo di scrivere la successione delle differenze sotto forma della somma A+B+C-D, chiamando quindi convenzionalmente in questi paragrafi $a(n)$ la successione delle differenze alla riga n, $A(n), B(n), C(n), D(n)$ la successione dei coefficienti A,B,C e D e $T(n)$ il numero dei triangoli totali alla riga n.

Utilizzando quindi il programma scritto precedentemente, otteniamo la successione A(n):

$$1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 4,\ 8,\ 8,\ 16,\ 2,\ 4,\ 4,\ ...$$

Utilizzando l'enciclopedia online delle successioni, scopriamo che questa successione è anche pari al numero di numeri dispari nella n-esima riga pari del triangolo di tartaglia, è già stata studiata in precedenza ed è la Sequenza di Gould (chiamata anche sequenza di Dress), così definita:

$$a(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mod 2$$

Numerose sono le formule che possono generare questa successione, ma le valuteremo più avanti. Intanto, facciamo lo stesso per il coefficiente B, confrontando i suoi valori con quelli delle altre successioni.
Teniamo presente che $a(n)$ è definita su tutte le righe, $A(n)$ sulle righe pari e $B(n)$ sulle righe divisibili per 4. Inoltre, per la definizione formulare di a(n) è necessario numerare con 0 la prima riga del triangolo di tartaglia.

riga	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$a(n)$	1	2	2	4	2	4	4	8	2	4	4	8	4	8	8	16	2	4	4	8	4	8	8
$A(n)$		1		2		2		4		2		4		4		8		2		4		4	
$B(n)$				1				2				2				4				2			

Si nota che la successione B viene generata con la stessa legge della successione A. Guardandole dalla tabella si vede che sono gli stessi numeri:

A: 1 2 2 4 2 4 4 8 2 4 4 8 4 8 8 16 2 4 4 8 ...
B: 1 2 2 4 2 4 4 8 2 4 4 8 4 8 8 16 2 4 4 8 ...

Inoltre notiamo chiaramente che:

$$A(n) = a(n-1)$$

$$B(n) = a(n-3)$$

Proprietà che rispondono a quelle definite nella relazione calcolata al computer.
Seguendone la stessa logica:

$$C(n) = B(n) - 1$$

Sempre computazionalmente, valutiamo ora la successione $D(n)$ (con n multiplo di 8):
0, 0, 1, 0, 1, 1, 3, 0, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 7, 0, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 7, 1, 3, 3, 7, 3, 7, 7, 15...
Le occorrenze di $D(n)$ pari a 0 corrispondono a righe di numeri tutti dispari, cosa peraltro ovvia dalla definizione di D stesso.
Scriviamo quindi la successione partendo da questo tipo di righe fino alla successiva:
0
0, 1
0, 1, 1, 3
0, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 7
0, 1, 3, 1, 3, 3, 7, 1, 3, 3, 7, 3, 7, 7, 15
0, 1, 1, 3, 1, 3, 3, 7, 1, 3, 3, 7, 3, 7, 7, 15, 1, 3, 3, 7, 3, 7, 7, 15, 3, 7, 7, 15, 7, 15, 15, 31

Notiamo che ad ogni occorrenza di riga di tutti numeri pari, la successione $D(n)$ "ricomincia" valendo $a(n) - 1$.
Quindi potremmo dire che $D(n)$ è uguale a $a(m) - 1$, dove m è n meno la più alta potenza di 2 minore di n.

7 La formula finale

7.1 Una prima formula per T(n)

Valutando tutte le osservazioni e i calcoli fatti precedentemente, possiamo affermare che il numero di triangoli che si possono contare alle riga n e':

$$T(n) = T(n-1) + (n - 2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)\, a(n-1) + (n - 4\lfloor\frac{n}{4}\rfloor)\, a(n-3) + (n - 8\lfloor\frac{n}{8}\rfloor)\, (a(n-3) - a(m) - 2)$$

7.2 Una formula per a(n)

Riportiamo qui, dall'enciclopedia delle sequenze numeriche, tutte le formule che possono generare la successione $a(n)$:

1. $a(n)$ è la più alta potenza di 2 che divide $C(2n, n) \rightarrow a(n) = gcd[2^{\frac{2n!}{n!n!}}, \frac{2n!}{n!n!}]$
2. $a(n)$ è pari a 2 elevato al numero di uni nelle espansioni binarie di n (Successione A120)
3. $a(n) = \frac{2a(n-1)}{gcd[2^n, n]}$
4. $a(n) = (n/2) + (1/2) + (sum(-(-1)^binomial(n, k), k = 0..n)/2)$ (non si capisce HELP!)

7.3 Conclusione

In conclusione, la formula per $T(n)$ e' quella scritta all'inizio del paragrafo, calcolando $a(n)$ in uno dei modi descritti sopra.