Remplissage d'une pyramide soustractive
Solutions minimales

Recherche exhaustive sans solutions symétriques
(Résultats de Rec.pas et de Rec_Dec.pas)

****

```
H = 2                                      2   3
                                             1

                                           1   3
                                             2
```

Au total, 2 solutions en 800 µs pour le maximum N = 3 / 3 termes.

****

```
H = 3                                    5   2   6
                                           3   4
                                             1

                                         4   1   6
                                           3   5
                                             2

                                         5   6   2
                                           1   4
                                             3

                                         4   6   1
                                           2   5
                                             3
```

Au total, 4 solutions en 1.8 ms pour le maximum N = 6 / 6 termes.

****

```
H = 4                                  8   1  10   6
                                         7   9   4
                                           2   5
                                             3

                                       6   1  10   8
                                         5   9   2
                                           4   7
                                             3

                                       9   3  10   8
                                         6   7   2
                                           1   5
                                             4

                                       8   3  10   9
                                         5   7   1
                                           2   6
                                             4
```

Au total, 4 solutions en 4.2 ms pour le maximum N = 10 / 10 termes.

****

****

H = 5

```
         6  14  15   3  13
           8   1  12  10
             7  11   2
               4   9
                 5
```

Au total, 1 solution en 11.2 ms pour le maximum N = 15 / 15 termes.

****

H = 6

```
      13  21   3  22  20   6
         8  18  19   2  14
          10   1  17  12
             9  16   5
               7  11
                 4
```

Au total, 1 solution en 32 ms pour le maximum N = 22 / pas de solution en 0.020 s pour le maximum N = 21 / 21 termes.

****

H = 7

```
    19  32   3  33  31   6  17
      13  29  30   2  25  11
        16   1  28  23  14
          15  27   5   9
            12  22   4
              10  18
                 8
```

```
    14  31   5  33  32   8  19
      17  26  28   1  24  11
         9   2  27  23  13
           7  25   4  10
            18  21   6
               3  15
                12
```

Au total, 2 solutions en 98 ms pour le maximum N = 33 / pas de solution en 30 ms pour le maximum N = 32 / 28 termes.

****

H = 8

```
  29   6  43  44   3  42  33   7
    23  37   1  41  39   9  26
      14  36  40   2  30  17
        22   4  38  28  13
          18  34  10  15
            16  24   5
               8  19
                11
```

Au total, 1 solution en 1.079 s pour le maximum N = 44 / pas de solution en 0.589 s pour le maximum N = 43 / 36 termes.

****

H = 9

```
17  49  58   1  55  59  13  53  43
  32   9  57  54   4  46  40  10
    23  48   3  50  42   6  30
      25  45  47   8  36  24
        20   2  39  28  12
          18  37  11  16
            19  26   5
               7  21
                14
```

Au total, 1 solution en 40.54 s ($1.3\ 10^{11}$ opérations) pour le maximum N = 59 / pas de solution en 27.42 s pour le maximum N = 58 / 45 termes / $4.6\ 10^{15}$ arrangements possibles sur la dernière ligne.

****

****

```
H = 10                     45  69  12  76  73  15  75  66  16  52          10
                             24  57  64   3  58  60   9  50  36             9
                               33   7  61  55   2  51  41  14               8
                                 26  54   6  53  49  10  27                 7
                                   28  48  47   4  39  17                   6
                                     20   1  43  35  22                     5
                                       19  42   8  13                       4
                                         23  34   5                         3
                                           11  29                           2
                                             18                             1

                                     Solution minimale          Numéro de la ligne
```

Au total, 1 solution en 1251 s (4.1 10^{12} opérations) pour le maximum N = 76 / pas de solution en 1.454 s pour le maximum N = 75 / 55 termes / 3.5 10^{18} arrangements possibles sur la dernière ligne.

Nombre de tentatives sur chaque ligne

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1204	69866	4624615	189354752	3236467522	13721003558	9370916499	600869199	1380435	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.7	11.9	50.6	34.5	2.2	0.0	%

Durée moyenne d'une tentative : 53.6 ns   S = 27124687651 ≈ 2.7e10

****

```
H = 11                   32  73  91  11  99 101   6 100  96  22  75
                           41  18  80  88   2  95  94   4  74  53
                             23  62   8  86  93   1  90  70  21
                               39  54  78   7  92  89  20  49
                                 15  24  71  85   3  69  29
                                    9  47  14  82  66  40
                                     38  33  68  16  26
                                        5  35  52  10
                                         30  17  42
                                           13  25
                                             12


                         64  16  97 101  11  93  99  19  92  79  21
                           48  81   4  90  82   6  80  73  13  58
                             33  77  86   8  76  74   7  60  45
                               44   9  78  68   2  67  53  15
                                 35  69  10  66  65  14  38
                                   34  59  56   1  51  24
                                     25   3  55  50  27
                                       22  52   5  23
                                         30  47  18
                                           17  29
                                             12


                         67  14 101  91   9  94 100  16  96  81  22
                           53  87  10  82  85   6  84  80  15  59
                             34  77  72   3  79  78   4  65  44
                               43   5  69  76   1  74  61  21
                                 38  64   7  75  73  13  40
                                   26  57  68   2  60  27
                                     31  11  66  58  33
                                       20  55   8  25
                                         35  47  17
                                           12  30
                                             18
```

Au total, 3 solutions en 158441 s (5.2 10^{14} opérations) pour le maximum N = 101 / pas de solution en 795 s pour le maximum N = 100 / 66 termes / 6.3 10^{21} arrangements possibles sur la dernière ligne.

****

****

```
H = 12                   62  90  13 115 124   8 122 125   5 118 101  20
                           28  77 102   9 116 114   3 120 113  17  81
                             49  25  93 107   2 111 117   7  96  64
                               24  68  14 105 109   6 110  89  32
                                 44  54  91   4 103 104  21  57
                                   10  37  87  99   1  83  36
                                     27  50  12  98  82  47
                                       23  38  86  16  35
                                         15  48  70  19
                                           33  22  51
                                             11  29
                                               18
```

Au total, 1 solution en 7140416 s (2.4 10^{16} opérations) pour le maximum N = 125 / pas de solution en 9404 s pour le maximum N = 124 / 78 termes / 8.4 10^{24} arrangements possibles sur la dernière ligne.

****

```
H = 13                103  32 131 138   8 157 147   2 153 158  25 143 108
                          71  99   7 130 149  10 145 151   5 133 118  35
                            28  92 123  19 139 135   6 146 128  15  83
                              64  31 104 120   4 129 140  18 113  68
                                33  73  16 116 125  11 122  95  45
                                  40  57 100   9 114 111  27  50
                                    17  43  91 105   3  84  23
                                      26  48  14 102  81  61
                                        22  34  88  21  20
                                          12  54  67   1
                                            42  13  66
                                              29  53
                                                24


                      116 139  22 158 151   4 157 154  21 156 143  25 115
                          23 117 136   7 147 153   3 133 135  13 118  90
                            94  19 129 140   6 150 130   2 122 105  28
                              75 110  11 134 144  20 128 120  17  77
                                35  99 123  10 124 108   8 103  60
                                  64  24 113 114  16 100  95  43
                                    40  89   1  98  84   5  52
                                      49  88  97  14  79  47
                                        39   9  83  65  32
                                          30  74  18  33
                                            44  56  15
                                              12  41
                                                29
```

Au total, 2 solutions en 8985 jours (environ 2.7 10^{18} opérations) pour le maximum N = 158 / pas de solution en 156095 + 458443 = 614538 s ≈ 7 jours pour le maximum N = 157 / 91 termes / 2.3 10^{28} arrangements possibles sur la dernière ligne.

****

****

Remarques

****

Algorithme

Les paramètres utilisés sont la hauteur de la pyramide H, la ligne L et la colonne C d'un élément. Le nombre d'éléments de la ligne L est égal à L, qui varie de 1 à H.

```
X   Y            L
  Z            L - 1
```

Dans la pyramide $Z = |X - Y|$, donc $Z = X - Y$ ou bien $Z = Y - X$. Soit $Y = X - Z$ ou bien $Y = X + Z$.

L'exploration est réalisée pour des valeurs inférieures ou égale au maximum N envisagé. Le numéro de ligne L est incrémenté lorsque la ligne est complétée. Le numéro de colonne C est incrémenté pour compléter une ligne.

Le programme choisit le premier élément de la ligne L à remplir parmi les éléments disponibles, puis calcule tout les éléments suivant en effectuant des soustractions ou des additions. Tous les premiers éléments disponibles sont testés, toutes les additions et soustractions possibles sont réalisées. Le parcours complet est réalisé par backtracking. Le programme recule dès qu'il se produit un échec (valeur de Y non disponible ou trop grande).

À partir de X et Z, on insère la valeur de Y disponible (une valeur qui n'a pas encore été insérée, et qui n'est pas trop grande – voir ci-dessous).

De même $X = Y + Z$ ou bien $Y = X + Z$, ainsi X ou bien Y est supérieur à Z. Pour les éléments qui pourront être placés sur les lignes suivantes, la valeur de Y insérée (après le choix de X) ne doit pas être trop grande. Une somme minimale S (calculée avec les éléments encore disponibles) peut être ajoutée à Y. Cette somme minimale à placer sur les lignes suivantes majore la valeur maximale $(N - S)$ du Y à insérer.

Pour toute hauteur H de pyramide soustractive, il existe des solutions, et donc une solution de maximum N minimal.

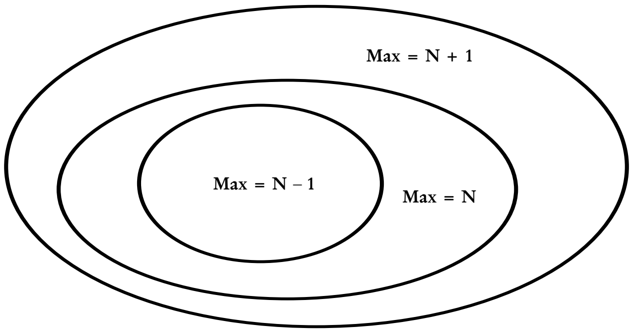
Par exemple, une solution possible pour $H = 5$, avec un maximum $N = 103$:

a) le premier terme de chaque ligne est supérieur au maximum de la ligne précédente,

b) sur chaque ligne, on ne réalise que des additions.

```
30    40    54    74   103
   10    14    20    29
      4     6     9
         2     3
            1
```

Soit N le terme le plus grand d'une pyramide solution de hauteur H. Soit $\mathscr{E}_{H,N}$ l'ensemble des solutions de maximum inférieur ou égal à N. Les ensembles de solutions $\mathscr{E}_{H,N}$ sont emboîtés, un élément de $\mathscr{E}_{H,N}$ est aussi un élément de $\mathscr{E}_{H,N+1}$. De même, l'absence de solution de rang N ($\mathscr{E}_{H,N}$ vide) induit l'absence de solution de rang $N - 1$ ($\mathscr{E}_{H,N-1}$ est vide lui aussi).



****

Calculs / Recherches

Les solutions symétriques ne sont pas prises en compte (symétrie gauche - droite).

À partir de H = 10, vérification de l'absence de solutions avec Rec_Dec.pas (récursif découpé). L'élément de la première ligne est fixé, le premier élément de la deuxième ligne est dans l'intervalle spécifié (si l'option intervalle est active).

Pour H = 12, le cas première ligne égale à 1 représente environ 2 % du temps de calcul.

Les temps d'exécution sont normalisés pour un Xeon W3670 3.20-3.46 GHz (processeurs Laurent & Pierre). L'incertitude sur les mesures de durée totale est de l'ordre de ± 0.5 %. L'incertitude sur la mesure de durée d'une tâche est de l'ordre de ± 3 %. J'ai utilisé Turbo Pascal 7 pour effectuer ces calculs sous Windows XP sp3 32 bits (le programme est environ 5 fois plus rapide qu'un programme Ocaml utilisant le même algorithme sous Windows 7 (ou 10) 64 bits). La collecte des résultats sur les différents processeurs a été réalisée avec le logiciel Anydesk 4.3.0 (gratuit pour un particulier, et compatible avec Windows XP).

****

Le calcul effectué pour H = 13 devrait durer 9500 jours environ (27 ans / 260 jours fractionné / Environ 260 jours avec 36 processeurs [estimation du 18/10/2021 après 60 jours de calcul]).

Le calcul effectué pour H = 13 a duré 8985 jours environ (25 ans / Environ 242 jours avec 37.2 processeurs normalisés / Après 340 jours de calcul effectif avec 39 processeurs / En comptabilisant les pertes de données, les redémarrages intempestifs, les défauts réseau, les erreurs dans l'algorithme, les différences d'efficacité des processeurs, les temps morts, le multi-tâches Windows, les réparations ...).

Le calcul effectué pour H = 14 devrait durer 10^7 jours environ (27000 ans / 700 ans fractionné avec 39 processeurs / 3 ans avec 10000 processeurs).

****