

Numeri Armonici e Numeri Perfetti

Umberto Cerruti
Università di Torino

1 Quattro antiche medie

Nel suo libro *Introduzione all'aritmetica*, Nicomaco di Gerasa, intorno al 100 d.C., trattava anche di medie ([8]).

Le medie venivano definite mediante proporzioni. Dati due numeri positivi $a > b > 0$, si cerca un numero m intermedio

$$a > m > b > 0$$

che abbia certe proprietà. Questo numero viene detto *media* (di un certo tipo) tra a e b .

Ne ricordiamo quattro.

\mathcal{H}

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{a}{b}$$

\mathcal{G}

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

\mathcal{A}

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = 1$$

\mathcal{C}

$$\frac{a - m}{m - b} = \frac{b}{a}$$

Se ricaviamo la m da queste proporzioni, otteniamo, rispettivamente

La media *armonica* \mathcal{H}

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a + b}$$

La media *geometrica*

$$\mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab}$$

La media *aritmetica* \mathcal{A}

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a + b}{2}$$

La media *controarmonica* \mathcal{C}

$$\mathcal{C}(a, b) = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$$

Osserviamo che queste medie erano già state studiate nell'antichità. In particolare fu Archita di Taranto (428-360 a.C.) a denominare *armonica* la $\mathcal{H}(a, b)$. Archita utilizzò questa media nella sua teoria musicale e per costruire un algoritmo di duplicazione del cubo.

La media aritmetica dà il centro di $[a, b]$. La media armonica è il reciproco della media aritmetica dei reciproci:

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a + b} = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right)^{-1}$$

Le medie armonica e contrarmonica stanno sempre, rispettivamente, a sinistra e a destra della media aritmetica, e sono da essa equidistanti.

$$\mathcal{A}(a, b) - \mathcal{H}(a, b) = \mathcal{C}(a, b) - \mathcal{A}(a, b)$$

In altri termini

$$\mathcal{A}(a, b) = \mathcal{A}(\mathcal{H}(a, b), \mathcal{C}(a, b)) \quad (1)$$

La media geometrica è sempre compresa tra quella armonica e quella aritmetica. Inoltre un calcolo diretto prova che

$$\mathcal{G}(a, b) = \mathcal{G}(\mathcal{H}(a, b), \mathcal{A}(a, b)) \quad (2)$$

Annotiamoci queste proprietà.

Teorema 1.

(1) *La media aritmetica delle medie armonica e contrarmonica dei numeri a, b è uguale alla media aritmetica di a, b .*

(2) *La media geometrica delle medie armonica e aritmetica dei numeri a, b è uguale alla media geometrica di a, b .*

Le quattro medie si estendono subito a un numero qualsiasi (finito) di argomenti.

Definizione 2. Se a_1, a_2, \dots, a_n sono n numeri reali positivi, allora definiamo:

$$\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \right)^{-1}$$

$$\mathcal{G}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

Dati n numeri reali positivi si ha sempre

$$\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathcal{G}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathcal{A}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (3)$$

dove, se i numeri non sono tutti uguali, le disuguaglianze sono strette.

Si noti che le formule così eleganti e belle (1, 2), e le conseguenti proprietà (1) non si estendono a più di due argomenti.

Per esempio

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}(3, 5), \mathcal{C}(3, 5)) = 4 = \mathcal{A}(3, 5)$$

come previsto. Ma

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}(3, 5, 7), \mathcal{C}(3, 5, 7)) = \frac{5309}{1065}$$

mentre

$$\mathcal{A}(3, 5, 7) = 5$$

2 Alcune applicazioni delle medie

Le medie basate sulle proporzioni sono utilizzate in architettura. Riporto, per esempio, una frase tratta da ([21]), dove l'autore parla di una costruzione del Palladio:

.. La proporzione delle Stanze principali si avvicina a due larghezze, cioè quasi a una dupla. Gli Stanzini hanno quasi la medesima proporzione ; e le mediocri si avvicinano ad una larghezza e cinque sestì . L' altezza delle prime è ricavata colla media proporzionale Armonica. Gli Stanzini hanno un'altezza media proporzionale Aritmetica , abbenchè abbiano i Soffitti piani, e le Stanze mediocri crescono alcun poco della media proporzionale contr' Armonica: un Salotto che si accosta al quadrato ha un' altezza quasi maggiore d' un terzo della sua larghezza , proporzione che si avvicina ad una quarta.

Sovente la media aritmetica viene utilizzata in modo errato.

Facciamo un esempio. Supponiamo che un'auto percorra 200 Km. Nei primi 100 procede a 100 km/h. Nei secondi 100 chilometri procede a 50 Km/h.

Qual è la velocità media? La media aritmetica è 75,5 Km/h. Però il risultato è errato. Infatti la macchina ha percorso complessivamente 200 Km in 3 ore: pertanto la velocità media è esattamente $\frac{200}{3}$ Km/h, cioè 66,66... Km/h.

Formalizziamo il calcolo in generale. Supponiamo che un tratto X venga percorso prima a velocità a e poi a velocità b . La prima volta il mezzo impiega un tempo $\frac{X}{a}$, e la seconda un tempo $\frac{X}{b}$.

Complessivamente lo spazio $2X$ è stato percorso in un tempo

$$\frac{X}{a} + \frac{X}{b} = X \frac{a+b}{ab}$$

La velocità media è

$$\frac{2X}{X \frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} = \mathcal{H}(a, b)$$

Quindi la velocità media è la media armonica delle velocità.

Le medie sono molto usate in economia. Utilizzandole si spera di potere fare previsioni sul futuro ([18]).

In questi casi quasi mai la scelta più spontanea, la media aritmetica, è quella giusta.

Supponiamo che ci siano due produttori, A e B, che promettono rispettivamente un ritorno di 2 volte e di 2,5 volte il capitale investito. C investe e diversifica l'investimento metà su A e metà su B. In questo modo C si aspetta un ritorno pari alla media: $\frac{(2+2,5)}{2}$. Cioè 2,25.

Ma le cose non stanno così. Se C vuole ottenere 200 investendo su A, compera da A 100. Se vuole ottenere 200 da B, compera da B 80. In totale spende 180 per ottenere 400. Il ritorno è di 2,22... volte, ovvero esattamente la media armonica di 2 e 2,5.

Il motivo dovrebbe essere chiaro, si tratta di un problema isomorfo a quello delle velocità.

Pensiamo di possedere 50 unità di un certo bene, e queste, attraverso un dato processo P non direttamente controllabile, diventino 90 dopo un anno, 135 dopo due anni, e 216 dopo tre anni. Il primo anno si è ottenuto un incremento dell'80%, il secondo del 50% e il terzo del 60%. Che cosa ci aspettiamo al termine del quarto anno? Si tratta di trovare il tasso medio dell'interesse composto.

Se facciamo la media aritmetica degli incrementi, troviamo 63,33...%. Questo non è corretto perché partendo da 50 con questo interesse composto dopo tre anni saremmo arrivati a 217,867. Se invece utilizziamo la media geometrica, calcoliamo $\sqrt[3]{1,8 \times 1,5 \times 1,6} = 1,62865$. Ora 62,865% è esattamente l'interesse composto che porta in tre anni a 216, partendo da 50. Pertanto la nostra previsione per il quarto anno sarà

$$216 + 216 \times \frac{62,865}{100} = 216 \times (1 + 0,62865) = 216 \times 1,62865 = 351,789$$

Le medie si applicano in moltissimi campi diversi. Uno di questi è il trattamento delle immagini.

Le immagini che riceviamo possono essere disturbate in molti modi. Per esempio da puntini bianchi o neri (detti sale e pepe). Si tenta allora di migliorare l'immagine mediante filtri. I filtri basati sulle medie sostituiscono un pixel con un certo tipo di media dei pixel che ci sono intorno. In ([22]) si osserva che la media controarmonica è particolarmente efficace per ripulire una foto dai disturbi sale e pepe.

Noi però, al di là della architettura, della velocità, dei beni, degli interessi e delle belle fotografie, amiamo sopra ogni cosa (materiale) i numeri interi.

Le medie si comportano male con gli interi, distruggono quasi sempre la loro integrità.

E se, invece di fare la media di interi qualsiasi, facessimo la media dei divisori di un intero?

3 I numeri armonici e numeri perfetti

Abbiamo visto molte cose sui divisori e i loro grafi in ([4]), ([5]).

Per comodità riportiamo qui alcune definizioni, e dimostriamo piccole proprietà utili nel seguito.

Sia $D(n)$ l'insieme dei divisori di n .

Denotiamo con $\sigma_k(n)$ la funzione

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \in D(n)} d^k \quad (4)$$

Le σ_k sono moltiplicative, ovvero se a, b sono coprimi, allora $\sigma_k(ab) = \sigma_k(a)\sigma_k(b)$.

Pertanto è sufficiente calcolarle sulle potenze dei numeri primi.

Ovviamente, se p è primo, $\sigma_k(p^e) = 1 + p^k + p^{2k} + \dots + p^{ek}$

Quindi se $n = \prod_{h=1}^{h=s} p_h^{e_h}$ si ha

$$\sigma_k(n) = \prod_{h=1}^{h=s} \sum_{j=0}^{j=e_h} p_h^{jk} \quad (5)$$

Il numero dei divisori di n è $\sigma_0(n)$. Dalla (5) si trova subito che

$$\sigma_0(n) = \prod_{h=1}^{h=s} (e_h + 1) \quad (6)$$

La somma dei divisori di n è $\sigma_1(n)$.

Ricordiamo che un numero n si dice *perfetto* se $\sigma_1(n) = 2n$.

Teorema 3. *Il numero dei divisori di n , $\sigma_0(n)$, è dispari se e solo se n è un quadrato.*

Dimostrazione. Dalla (6) si ha che $\sigma_0(n)$ è dispari se e solo se tutti gli $e_h + 1$ sono dispari. Questo accade se e solo se tutti gli e_h sono pari. \square

Teorema 4. *La somma dei divisori di un quadrato è dispari.*

Dimostrazione. Se n è una potenza di 2, $n = 2^s$, allora $\sigma_1(2^s) = 2^{s+1} - 1$, che è dispari.

Se $n = 2^s p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, allora $n^2 = 2^{2s} p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} \cdots p_k^{2e_k}$.

La somma dei divisori pari di n^2 è pari. Dobbiamo quindi provare che la somma dei divisori dispari di n^2 è dispari. I divisori dispari di n^2 sono i divisori di $p_1^{2e_1} p_2^{2e_2} \cdots p_k^{2e_k}$, che è un quadrato, e quindi il loro numero è dispari per (3). Segue la tesi. \square

Teorema 5. *Un numero perfetto non è un quadrato.*

Dimostrazione. Se n è perfetto $\sigma_1(n) = 2n$.

Pertanto se n è perfetto, n non può essere un quadrato per la proprietà precedente(4). \square

Teorema 6. *Se n è perfetto, allora il numero dei divisori di n è pari.*

Dimostrazione. Infatti per (5), n non è un quadrato. E per la (3) il numero dei divisori di n deve essere pari. \square

Nel 1948 Oystein Ore, ([19], [20]), introdusse il concetto di *numero armonico* e ne discusse le prime proprietà.

Per seguire il lavoro di Ore, introduciamo alcune notazioni. Dato un intero n saremo interessati ad alcune *medie* dei divisori di n .

Definizione 7. Poniamo:

$$(1) H(n) = \mathcal{H}(D(n))$$

$$(2) G(n) = \mathcal{G}(D(n))$$

$$(3) A(n) = \mathcal{A}(D(n))$$

$$(4) C(n) = \mathcal{C}(D(n))$$

Facciamo un esempio (si vedano le definizioni (2)).

Esempio 8.

Sia $n = 45$.

L'insieme dei divisori $D(45)$ è $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$.

Pertanto:

$$H(45) = \mathcal{H}(1, 3, 5, 9, 15, 45) = \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6} \times \frac{26}{15}\right)^{-1} = \frac{45}{13}$$

$$G(45) = \mathcal{G}(1, 3, 5, 9, 15, 45) = \sqrt[6]{1 \times 3 \times 5 \times 9 \times 15 \times 45} = \sqrt[6]{91125} = \sqrt{45}$$

$$A(45) = \mathcal{A}(1, 3, 5, 9, 15, 45) = \frac{\sigma_1(n)}{\sigma_0(n)} = \frac{1+3+5+9+15+45}{6} = \frac{78}{6} = 13$$

$$C(45) = \mathcal{C}(1, 3, 5, 9, 15, 45) = \frac{\sigma_2(n)}{\sigma_1(n)} = \frac{1^2+3^2+5^2+9^2+15^2+45^2}{1+3+5+9+15+45} = \frac{2366}{78} = \frac{91}{3}$$

Le nostre quattro medie possono essere espresse in forma esplicita.

Teorema 9.

- (1) $H(n) = \frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)}$
- (2) $G(n) = \sqrt{n}$
- (3) $A(n) = \frac{\sigma_1(n)}{\sigma_0(n)}$
- (4) $C(n) = \frac{\sigma_2(n)}{\sigma_1(n)}$

Dimostrazione. (1) Per definizione

$$H(n) = \left(\frac{1}{t} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_t} \right) \right)^{-1}$$

dove i divisori di n sono d_1, d_2, \dots, d_t .

Se consideriamo la somma $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_t}$, scopriamo subito che il denominatore comune è n , e a numeratore si trova esattamente la somma dei divisori di n . Ricordando che t è il numero dei divisori di n , ovvero $t = \sigma_0(n)$, otteniamo la tesi.

(2) Per definizione

$$G(n) = \sqrt[\sigma_0(n)]{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_t} = \sqrt[\sigma_0(n)]{\prod_{d|n} d}$$

Distinguiamo due casi: n quadrato e n non quadrato.

Se n non è un quadrato, n ha un numero pari di divisori (3). Nel prodotto dei divisori possiamo allora accoppiare d con $\frac{n}{d}$, ottenendo il prodotto di n con se stesso $\frac{\sigma_0(n)}{2}$ volte.

Pertanto

$$G(n) = \sqrt[\sigma_0(n)]{\prod_{d|n} d} = \sqrt[\sigma_0(n)]{n^{\frac{\sigma_0(n)}{2}}} = \sqrt{n}$$

Se invece n è un quadrato $n = m^2$, allora $\sigma_0(n)$ è dispari. Come prima, nel prodotto dei divisori accoppiamo d con $\frac{n}{d}$ per ogni divisore $d \neq m$, e lasciamo m da solo. Troviamo allora che

$$\prod_{d|n} d = n^{\frac{\sigma_0(n)-1}{2}} m = (m^2)^{\frac{\sigma_0(n)-1}{2}} m = m^{\sigma_0(n)}$$

Pertanto

$$G(n) = \sqrt[\sigma_0(n)]{\prod_{d|n} d} = \sqrt[\sigma_0(n)]{m^{\sigma_0(n)}} = m = \sqrt{n}$$

(3) e (4) esprimono direttamente le definizioni. □

E' naturale chiedersi quando le medie dei divisori siano esse stesse un intero.

Il caso di $G(n)$ non è interessante: per quanto abbiamo visto, $G(n)$ è intero se e solo se n è un quadrato. Gli interi n tali che $A(n)$ è intero formano la sequenza [A003601](#):

$$1, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, \dots \quad (7)$$

Questi interi vengono detti *aritmecici*.

Gli interi n tali che $C(n)$ è intero formano la sequenza [A020487](#):

$$1, 4, 9, 16, 20, 25, 36, 49, 50, 64, 81, 100, 117, 121, 144, 169, 180, 196, 200, 225, \dots$$

Il caso più interessante è quello di $H(n)$. Ore diede la seguente definizione

Definizione 10.

Un intero positivo n si dice armonico se $H(n)$ è un numero intero.

Se calcoliamo $H(n)$ per $n = 1, 2, \dots$ troviamo i numeri armonici

$$1, 6, 28, 140, 270, 496, 672, 1638, 2970, 6200, 8128, 8190, 18600, 18620, 27846, 30240, \dots$$

Essi costituiscono la sequenza [A001599](#).

$H(n)$ è intero se e solo se n appare nella [A001599](#). I valori che la H assume, ovvero gli interi $H(1), H(6), H(28), \dots$ formano la sequenza [A001600](#):

$$1, 2, 3, 5, 6, 5, 8, 9, 11, 10, 7, 15, 15, 14, 17, 24, \dots$$

Ore dimostrò che

Teorema 11.

I numeri perfetti sono armonici.

Dimostrazione. Se n è perfetto, $\sigma_1(n) = 2n$ e pertanto

$$H(n) = \frac{\sigma_0(n)}{2}$$

Per la proposizione (6), se n è perfetto allora $\sigma_0(n)$ è pari.

Segue la tesi. □

Si noti bene che la (11) vale per *tutti* i numeri perfetti. Vale anche per i numeri perfetti dispari, se esistono.

Se n è un perfetto pari, si vede subito che $H(n)$ è intero. Infatti sappiamo (vedi ([2])) che n deve essere della forma

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

con $2^p - 1 = M_p$, primo di Mersenne. Il numero dei divisori di $2^p - 1$ è 2. Il numero dei divisori di 2^{p-1} è p . Pertanto, se n è un perfetto pari, allora $\sigma_0(n) = 2p$ e $H(n) = p$.

In ([17]) si prova questo interessante risultato:

Teorema 12.

Un intero n è un perfetto pari se e solo se

$$n = 2^{H(n)-1} (2^{H(n)} - 1)$$

Si noti che questo implica che, se $n = 2^{H(n)-1} (2^{H(n)} - 1)$, allora $2^{H(n)} - 1$ deve essere primo!

4 Proprietà e congetture sui numeri armonici

E' stato dimostrato ([19], [9] e [6]) che *non* sono armonici:

- I numeri primi e le potenze di un numero primo.
- I numeri diversi da 6 privi di quadrati (prodotto di primi distinti).
- I numeri dispari nella cui decomposizione appare una potenza p^e con $p - 1$ divisibile per 4 ed e dispari.
- I numeri dispari la cui decomposizione è del tipo

$$\prod_{k=1}^t p_i^{2^{e_i}-1}$$

- I numeri non perfetti della forma $p^a q^b$ (p e q primi).

Se denotiamo con $\omega(n)$ il numero dei fattori primi distinti di n si ha ([6])

Teorema 13.

Per ogni n

$$H(n) > \frac{2^{\omega(n)+1}}{\omega(n) + 1}$$

con le seguenti eccezioni (p denota un numero primo):

$$n = p$$

$$n = 2p$$

$$n = 6p \quad (p \neq 3)$$

$$n = 30p \quad (7 \leq p \leq 23)$$

$$n = 1, 15, 21, 70$$

Esistono quindi numeri interi con media armonica grande quanto si vuole.

I numeri armonici sono rari. Ce ne sono 130 minori di 2×10^9 . Il più piccolo che segue è 2008725600 con fattorizzazione $2^5 3 5^2 7^2 19 29 31$ ([6]).

Sempre in ([6]) Cohen fa notare che Ore era interessato specialmente ai numeri armonici che non sono né perfetti né aritmetici (si ricordi 7).

Osserviamo che, dalle (9) si ha

$$H(n)A(n) = n$$

Da questo segue che ([11])

Teorema 14.

L'intero n è al tempo stesso armonico e aritmetico se e solo se $H(n)$ divide n .

In particolare i numeri perfetti non sono aritmetici.

Tra i 130 numeri armonici minori di 2×10^9 ce ne sono soltanto 13 tali che $H(n)$ non divide n . Essi sono ([A046999](#))

28, 496, 8128, 950976, 2178540, 33550336, 142990848, 301953024

459818240, 675347400, 714954240, 995248800, 1379454720

Di questi 13, 4 sono perfetti: 28, 496, 8128, 33550336.

Pertanto, al di sotto di 2×10^9 , ci sono solamente 9 numeri armonici non perfetti e non aritmetici.

In un famoso articolo ([16]) Kanold dimostrò che

Teorema 15.

Per ogni intero m esiste soltanto un numero finito di interi tali che $H(n) = m$.

Il Teorema (15) pone immediatamente diversi problemi. Tra questi:

- Quali interi m non sono valori assunti dalla funzione H ?
- Dato un intero x quanti sono gli n armonici tali che $H(n) \leq x$?

Sono state fatte ricerche assai estese da Goto e altri, per acquisire dati intorno a queste questioni. Si vedano ([10], [11], [12], [13]).

Per esempio, ci sono esattamente 13 interi armonici tali che $H(n) \leq 13$, elencati nella Tabella (1). Dalla (1) si evince che per nessun n la funzione $H(n)$ assume i valori 4 e 12. Ci sono due interi (140 e 496) per i quali $H(n) = 5$ e due (105664, 33550336) per i quali $H(n) = 13$.

Ci sono esattamente 280 interi n tali che $H(n) \leq 300$. Essi sono elencati in ([11]).

Ci sono esattamente 937 interi armonici n minori di 10^{14} . Essi sono elencati in ([13]).

Un concetto fondamentale, introdotto da Cohen e Sorli in ([7]) e quello di *seme*.

Definizione 16. Un divisore d di n si dice *unitario* se $(d, n/d) = 1$ (ricordiamo che (a, b) denota il MCD(a, b)). In questo caso si dice anche che n è *multiplo unitario* di d .

Un divisore unitario d si dice *proprio* se $d \neq 1$.

Un numero armonico si dice *seme* se non possiede divisori unitari armonici.

Dalla definizione (16) segue subito che

Teorema 17.

Ogni numero armonico è multiplo unitario di un seme.

Facciamo un esempio.

Esempio 18.

$6200 = 2^3 5^2 31$ è un seme. Da lui derivano:

$$18600 = 2^3 3 5^2 31$$

$$117800 = 2^3 5^2 19 31$$

$$167400 = 2^3 3^3 5^2 31$$

...

Fino a poco tempo fa si riteneva che un numero armonico derivasse da un unico seme. Recentemente ([13]) si è visto che non è vero. Un controesempio è dato da questi numeri:

$$n = 29495815011600 = 2^4 3 5^2 7^2 19 31^2 83 331, \quad H(n) = 525$$

$$s_1 = 1179832600464 = 2^4 3 7^2 19 31^2 83 331, \quad H(s_1) = 217$$

$$s_2 = 9831938337200 = 2^4 5^2 7^2 19 31^2 83 331, \quad H(s_2) = 350$$

Infatti s_1 ed s_2 sono entrambi seme di n .

Ci potrebbero essere molte altre sorprese.

Citiamo un paio di problemi irrisolti.

Ricordiamo che un numero potente è un intero n tale che se p primo divide n anche p^2 divide n (vedi ([3])). Non si conosce al momento nessun intero armonico potente.

Problema 19.

Esistono numeri armonici potenti?

Un numero abbondante è un intero n tale che $\sigma_1(n) > 2n$ (vedi ([1])). Viceversa n si dice deficiente se $\sigma_1(n) < 2n$. Tutti i numeri armonici noti sono perfetti o abbondanti.

Problema 20.

Esistono numeri armonici deficienti?

Le congetture più importanti sui numeri armonici sono probabilmente queste due

Congettura 21. *Esistono infiniti numeri armonici*

Congettura 22. (Ore, 1948)

L'unico numero armonico dispari è 1

La verità di (22) implicherebbe, vista la (11), che

Non esistono numeri perfetti dispari

Dimostrare che non esistono numeri armonici dispari diversi da 1 è quindi non meno difficile che provare la non esistenza di numeri perfetti dispari. E il problema della esistenza di numeri perfetti dispari è considerato da Guy ([14] e [15]) una fortezza impenetrabile!

Introduciamo ora una nuova classe di interi, che chiamiamo *biarmonici*.

5 I numeri biarmonici

In ([19]) Ore osservò che, per ogni n ,

$$G(n) = \mathcal{G}(H(n), A(n)) \quad (8)$$

Infatti (vedi (9))

$$\mathcal{G}(H(n), A(n)) = \sqrt{H(n)A(n)} = \sqrt{\frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)} \frac{\sigma_1(n)}{\sigma_0(n)}} = \sqrt{n} = G(n)$$

Si noti che la (8) ha la stessa forma della (2), ma non segue da questa, perché, come abbiamo notato, le (1, 2) non valgono in generale se si utilizzano più di due argomenti.

E' bene precisare ancora le notazioni, che sono veramente importanti.

Le quattro funzioni \mathcal{H} , \mathcal{G} , \mathcal{A} , \mathcal{C} sono definite su *liste di numeri reali positivi*, mentre le funzioni H , G , A , C prendono come argomento *un singolo numero intero*.

La (2) dice che, se a, b sono reali positivi allora $\mathcal{G}(a, b) = \mathcal{G}(\mathcal{H}(a, b), \mathcal{A}(a, b))$. Questo deriva dalla semplice identità

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{2ab}{a+b} \frac{a+b}{2}}$$

Proviamo a prendere tre numeri reali positivi a, b, c .

Quando la

$$\mathcal{G}(a, b, c) = \sqrt[3]{abc} = \mathcal{G}(\mathcal{H}(a, b, c), \mathcal{A}(a, b, c)) = \sqrt{\frac{a+b+c}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}} = \sqrt{\frac{abc(a+b+c)}{ab+ac+bc}} \quad (9)$$

è vera?

Prendiamo quattro numeri a, b, c, d .

Quando la

$$\mathcal{G}(a, b, c, d) = \sqrt[4]{abcd} = \dots = \sqrt{\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}} = \sqrt{\frac{abcd(a+b+c+d)}{abc+abd+acd+bcd}} \quad (10)$$

è vera?

Non sappiamo quando, in generale, valgono le (9) e (10).

Sappiamo però, dalla (8), che esse valgono quando le liste $\{a, b, c\}$ o $\{a, b, c, d\}$ sono costituite dai divisori di un intero n .

Poiché $n = p^2$, con p primo, ha tre divisori, $\{1, p, p^2\}$, la (9) è vera se $\{a, b, c\}$ viene sostituita da $\{1, p, p^2\}$.

Allo stesso modo, se $n = pq$ allora n ha quattro divisori $\{1, p, q, pq\}$. La (10) è vera se $\{a, b, c, d\}$ viene sostituita da $\{1, p, q, pq\}$.

Si noti che partiamo dai divisori di n per ottenere liste che soddisfino la (2), infatti la (8) equivale alla

$$\mathcal{G}(d_1, d_2, \dots, d_t) = \mathcal{G}(\mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_t), \mathcal{A}(d_1, d_2, \dots, d_t)) \quad (11)$$

dove (d_1, d_2, \dots, d_t) è la lista completa dei divisori di n .

La identità (11) però è puramente formale. Se sostituiamo ai fattori primi di n numeri reali positivi qualsiasi la (11) continua a valere!

Prendiamo, per esempio, $n = p^2 q$. La lista dei divisori è $\{1, p, q, pq, p^2, p^2 q\}$. Se sostituiamo p con $\sqrt{2}$ e q con π otteniamo la identità:

$$\mathcal{G}(1, \sqrt{2}, \pi, \sqrt{2}\pi, 2, 2\pi) = \mathcal{G}(\mathcal{H}(1, \sqrt{2}, \pi, \sqrt{2}\pi, 2, 2\pi), \mathcal{A}(1, \sqrt{2}, \pi, \sqrt{2}\pi, 2, 2\pi))$$

Si noti che inserendo liste casuali di numeri è praticamente impossibile che la uguaglianza valga!

Introduciamo ora la *media biarmonica*.

Definizione 23. Dati t numeri reali positivi a_i , diciamo media biarmonica di a_1, a_2, \dots, a_t il numero

$$\mathcal{B}(a_1, a_2, \dots, a_t) = \mathcal{A}(\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_t), \mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_t)) = \frac{\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_t) + \mathcal{C}(a_1, a_2, \dots, a_t)}{2}$$

uguale alla media aritmetica delle medie armonica e controarmonica degli a_i .

Dalla (1) sappiamo che, nel caso di due argomenti, la media biarmonica è semplicemente la media aritmetica. E sappiamo che questo non vale più aumentando il numero degli argomenti.

Seguendo l'idea di Ore definiamo l'analogo della funzione $H(n)$.

Definizione 24. Dato un intero n siano d_1, d_2, \dots, d_t i divisori di n .

Denotiamo con $B(n)$ la media biarmonica dei divisori di n , ovvero:

$$B(n) = \mathcal{B}(d_1, d_2, \dots, d_t)$$

Diciamo infine che un intero n è *biarmonico* se $B(n)$ è un numero intero.

Dalle definizioni si ottiene immediatamente che

$$B(n) = \mathcal{B}(d_1, d_2, \dots, d_t) = \frac{\mathcal{H}(d_1, d_2, \dots, d_t) + \mathcal{C}(d_1, d_2, \dots, d_t)}{2} = \frac{H(n) + C(n)}{2}$$

Utilizzando la (9) possiamo scrivere $B(n)$ in forma chiusa:

$$B(n) = \frac{H(n) + C(n)}{2} = \frac{\frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)} + \frac{\sigma_2(n)}{\sigma_1(n)}}{2} = \frac{n\sigma_0(n) + \sigma_2(n)}{2\sigma_1(n)} \quad (12)$$

Questa è la lista dei primi 25 numeri biarmonici:

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89

A parte 1 e 35 sembra la lista dei numeri primi! Infatti

Teorema 25.

Se p è un numero dispari primo, allora p è biarmonico.

Dimostrazione. Calcoliamo $B(p)$:

$$B(p) = \frac{2p + 1 + p^2}{2(1 + p)} = \frac{(1 + p)^2}{2(1 + p)} = \frac{p + 1}{2}$$

Poiché p è dispari, $\frac{p+1}{2}$ è intero. □

E' una situazione complementare a quella dei numeri armonici, dove i primi non sono mai armonici.

Evidentemente siamo interessati ai numeri biarmonici *non* primi.

Questi sono i 48 interi biarmonici non primi minori di 10^6

1, 35, 119, 527, 775, 819, 923, 2159, 2759, 3335, 5543, 6815, 6887, 12319, 13175, 13919, 21449, 23939, 24779, 37883, 47959, 64235, 83435, 111887, 124775, 127535, 128375, 128615, 167195, 189143, 206735, 221135, 240239, 254939, 278963, 343655, 351995, 357599, 373319, 465215, 504899, 578159, 708623, 744095, 818015, 838355, 851927, 905975

Seguono i valori che la funzione B assume su di essi

1, 15, 52, 244, 318, 269, 427, 1017, 1325, 1346, 2652, 2803, 3364, 6052, 5090, 6736, 10565, 11647, 12187, 18502, 23764, 26882, 31810, 55449, 43575, 53018, 49431, 53882, 61095, 93277, 88707, 93775, 118600, 120546, 137802, 131410, 133527, 149870, 186052, 186682, 249951, 287772, 351177, 292730, 322318, 307191, 425044, 327525

I numeri *meno composti* dopo i primi sono i semiprimi, ovvero i prodotti di due primi. La teoria dei semiprimi biarmonici è specialmente interessante. Diciamo *gemma* un intero biarmonico prodotto di due primi distinti dispari. Per quanto detto in (4), le gemme non sono mai armoniche.

Un intero n è dunque una gemma se

1. $n = pq$, dove p e q sono primi dispari distinti.
2. $B(n)$ è intero.

Esplicitiamo $B(pq)$.

$$B(n) = B(pq) = \frac{H(pq) + C(pq)}{2} = \frac{4pq + 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2}{2(1 + p + q + pq)} = \frac{(p + q)^2 + (pq + 1)^2}{2(p + 1)(q + 1)}$$

Riassumendo, n è una gemma se

1. $n = pq$, dove p e q sono primi dispari distinti.
2. $\frac{(p+q)^2 + (pq+1)^2}{2(p+1)(q+1)}$ è intero.

Ci sono 24 gemme minori di 10^6 :

35, 119, 527, 923, 2159, 2759, 5543, 6887, 12319, 13919, 21449, 23939, 24779, 37883, 47959, 111887, 189143, 240239, 278963, 373319, 504899, 578159, 708623, 851927

E questi sono i rispettivi valori di B

15, 52, 244, 427, 1017, 1325, 2652, 3364, 6052, 6736, 10565, 11647, 12187, 18502, 23764, 55449, 93277, 118600, 137802, 186052, 249951, 287772, 351177, 425044

Stiamo conducendo una ricerca sulle gemme. Con tecniche particolari abbiamo trovato gemme piuttosto grandi.

Per il momento il nostro campione è

33782643187143304905999319524376597726850292701745147308384725012200968583669
06568944097664212301671745150896618740718704509310010456623658068802981271471
37470045898530829951174505316459641063728199418374122779963755831489579245653
44890848715509402226211370280758523149648246296190731218192043356871480989683
20505372826026493112650530676889921007790113214327525366882731895973138510015
95080628757090552734244789819560122343235801773275544241463012387798181546982
36642375688200964803394682982690880543082902353152736045348964657987749508415
00149293388714113959757697123980569387955450710405056299794237578206695295631
15017952483141269922998549963431741220675198941829533423985400630987105777112
92675199734732139181355846471394687341040686011979910783661662285136647758984
03924479352649463662935477400035019218706891082451748608468689110371178778366
90409285115125438185612638600165370215509928134037241487039918237469201876536
25471533834243236043676834485802341836690500866588207272508891927544116376599

Chiamiamo n questo numero. Questa gemma ha 1001 cifre, che sono sopra espresse in 13 righe che contengono ognuna 77 cifre.

L'intero n è prodotto di due primi p, q , dove p ha 601 cifre e q ha 401 cifre.

Chi sa trovare p e q ?

Tabella 1: $H(n) \leq 13$

H(n)	n
1	1
2	6
3	28
5	140
	496
6	270
7	8128
8	672
9	1638
10	6200
11	2970
13	105664
	33550336

Riferimenti bibliografici

- [1] Umberto Cerruti - C'è un limite all'abbondanza? -
Blog Matematico - 17 Luglio 2004
- [2] Umberto Cerruti - Somme di Interi Consecutivi, Numeri di Mersenne e Numeri di Fermat
Blog Matematico - 18 Dicembre 2008
- [3] Umberto Cerruti - Equazioni diofantine, numeri potenti e la congettura ABC -
Blog Matematico - 12 Maggio 2010
- [4] Umberto Cerruti - Grafi di divisori, cicli Hamiltoniani, Codici di Gray e le Torri di Hanoi -
Blog Matematico - 09 Agosto 2011
- [5] Umberto Cerruti - Percorsi tra i numeri -
Blog Matematico - 31 Dicembre 2011
- [6] G. L. Cohen, Numbers Whose Positive Divisors Have Small Integral Harmonic Mean -
Mathematics of Computation, Vol. 66, No. 218, pp. 883-891, 1997
- [7] G.L. Cohen, R.M. Sorli - Harmonic seeds -
Fibonacci Quarterly, Vol. 36, pp. 386-390, 1998
- [8] Mabrouck K. Faradj, Which mean do you mean? An exposition on means.
Master Thesis, Louisiana State University, 2004

- [9] Mariano Garcia, On Numbers with Integral Harmonic Mean -
The American Mathematical Monthly, Vol. 61, No. 2, pp. 89-96, 1954
- [10] Takeshi Goto, Katsuyuki Okeya - An algorithm to compute harmonic numbers -
Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, JANT8, at Tokyo Metropolitan Univ., Sep. 5, 2002
- [11] T. Goto, S. Shibata - All numbers whose positive divisors have integral harmonic mean up to 300 -
Mathematics of Computation, Vol. 73, No. 245, pp. 475-491, 2003
- [12] Takeshi Goto - On Ore's Armonic Numbers -
Seminar Series at University of Technology, Sydney, Sep. 20, 2004
- [13] Takeshi Goto, Katsuyuki Okeya - All Harmonic Numbers Less than 10^{14} -
Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 24, pp. 275-288, 2007
- [14] Richard Guy, The New Book of Prime Number Records -
Springer, 1989
- [15] Richard Guy, Unsolved problems in Number Theory -
Springer, 1994
- [16] H. J. Kanold, Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl
Math. Ann. Vol. 133, pp. 371-374, 1957
- [17] Pedro Laborde - A Note on the Even Perfect Numbers -
The American Mathematical Monthly, Vol. 62, No. 5, pp. 348-349, 1955
- [18] Spyros Missiakoulis, Dimitrios Vasiliou and Nikolaos Eriotis,
Forecasting performance with the harmonic mean: long-term investment horizons in Shanghai Stock Exchange
Review of Applied Economics, Vol. 8, No. 1, (January-June 2012)
- [19] Oystein Ore, On the Averages of the Divisors of a Number,
The American Mathematical Monthly, Vol. 55, pp. 615-619, 1948
- [20] Oystein Ore, Number Theory and its History,
McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948
- [21] Le fabbriche e i disegni di Andrea Palladio raccolti ed illustrati da Ottavio Bertotti Scamozzi
in Vicenza, 1796

- [22] K. Somasundaram, A. Nancy Pritha, Performance Evaluation of Arithmetic, Geometric and Contra Harmonic Mean Filters for Image Denoising
UGC Sponsored National Conference on Emerging Computing Paradigms, 2007