A seed and a jumping bean

Consider S:

```
S=0,1,1,1,2,3,1,3,6,3,1,5,10,7,1,3,14,7,1,13,18,7,1,3,22,11,1,21,26,15,1,3,30,7,1,29,34,15,1,3,38,27,1,37,42,15,1,3,46,7,
...
n=1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1, 2, 2,2,2,2, 2, 2,2, 2, 2, 3,3,3, 3,3,3, 3, 3, 3,3,4, 4, 4,4, 4, 4,
4,4,4, 4,5, ...
                  0 1 2  3 4 5 6  7 8 9  0  1 2 3 4  5  6 7  8  9  0 1 2  3 4 5  6  7  8 9 0  1  2 3  4  5  6 7
8  9 0
```

Read "n" vertically; thus S(10)=3, S(25)=22 and S(47)=1, for instance.

S works like this:
- take any S(n), the "seed" [for instance if n=10, take S(10)=3 (this 3 is "the seed")];
- jump from S(n) to the right, over S(n) integers [from S(10)=3 over 1,5,10 (3 integers)];
- land on S[n+1+S(n)], "the bean" [land on 7, "the bean"];

S has been build in order to always have S(n)+S[n+1+S(n)]=n [or "seed"+"bean"=n thus 3+7=10].

This sequence is infinite and well defined.
Here is how S was build, step by step;

```
S = . . . . . . . . .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

If we put "1" at the beginning of S, we will have a "0" in third position:

```
S = 1 . 0 . . . . . .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

This is because the seed "1" asks us to jump over one integer (to the right) and land on the bean – with "bean" + "seed" = 1.

If "0" can be an integer of S, we'd better try to start S with "0" and see if the result works – because we always prefer our S's to be the lexicographic first ones.

We thus begin S with "0":

```
S = 0 . . . . . . . .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

This "0" asks us to jump over 0 integer and land on a "bean" such that "bean" + "seed" = 1; we have then:

```
S = 0 1 . . . . . . .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

This "1" is now the seed for another bean (such that "bean" + "seed" = n):

```
S = 0 1 . 1 . . . . .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

And this "1" is the seed for a new bean (which has to obey the same "bean+seed=n" law):

```
S = 0 1 . 1 . 3 . . .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

This "3" is itself a new seed:

```
S = 0 1 . 1 . 3 . . .  3
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

And this "3" is itself, etc.

```
S = 0 1 . 1 . 3 . . .  3  .  .  .  7
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
```

The "7" asks us to jump over 7 integers and to write "7" on the landing space:

```
S = 0 1 . 1 . 3 . . .  3  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  .
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

And this "7" forces a "15" (which comes from 22-7) above n = 30:

```
S = 0 1 . 1 . 3 . . .  3  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

Etc.
This goes to infinity, of course – but what about the "holes" we have left behind in S?
As we want S to be the lexicographic first sequence with the property "seed+bean=n", we try to fill the leftmost hole --S(3)-- with a zero:

```
S = 0 1 0 1 . 3 . . .  3  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

But this doesn't work, as 0 + 1 (the "1" to the right of 0) is not 3 (the number under 0) as it should be.
We then try to fill the hole with "1":

```
S = 0 1 1 1 . 3 . . .  3  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... and this produces a “2” (in yellow) in the next hole – because of the law “bean+seed=n”:

```
S = 0 1 1 1 2 3 . . .  3  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

But this “2” starts a brand new infinite series of integers to the right, of course (new integer in yellow):

```
S = 0 1 1 1 2 3 . 3 .  3  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... then:

```
S = 0 1 1 1 2 3 . 3 .  3  .  5  .  7  .  .  .  .  .  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... and:

```
S = 0 1 1 1 2 3 . 3 .  3  .  5  .  7  .  .  .  .  7  .  .  .  7  .  .  .  .  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... further:

```
S = 0 1 1 1 2 3 . 3 .  3  .  5  .  7  .  .  .  .  7  .  .  .  7  .  .  . 11  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... etc.

We have a doubt, here: will the two series “collide” at some point?
More: we notice immediately that we’ll have to start another series of “seeds and beans”, because we have a new leftmost hole to fill! Let’s start with that one – which is in position S(7) – and try to fill it with a “1” (as the “0” is obviously leading to a contradiction):

```
S = 0 1 1 1 2 3 1 3 .  3  .  5  .  7  .  .  .  .  7  .  .  .  7  .  .  . 11  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... producing (in yellow):

```
S = 0 1 1 1 2 3 1 3 6  3  .  5  .  7  .  .  .  .  7  .  .  .  7  .  .  . 11  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... and:

```
S = 0 1 1 1 2 3 1 3 6  3  .  5  .  7  .  3  .  7  .  .  .  .  7  .  .  . 11  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

... further:

```
S = 0 1 1 1 2 3 1 3 6  3  .  5  .  7  .  3  .  7  . 13  .  7  .  .  . 11  .  .  .  . 15
n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
```

Etc.

At my great surprise, I’ve noticed that no “collisions” will ever occur if we always fill the leftmost hole with a “1”!

I’ve tried yesterday to understand the patterns arising in S. All I could find was this:

(a) S(4n-1)=1
(b) S(8n)=3
(c) S(8n+1)= 6+8(n-1)
(d) S(8n+4)= 5+8(n-1)
(e) S(8n+5)=10+8(n-1)
(f) S(16n+2)=7

I’m stuck in defining S(4n+2) which would complete the description of all terms of S after S(6)...

I hope I’ve made no mistakes – and that this might be of interest for the Seqfans!
Best,
É.

____

Jean-Paul Davalan:

(...)
En partant à la fois de S(n)+S[n+1+S(n)]=n et de S(4n-1)=1 (le premier "pattern") et en opérant comme tu l’as fait avec le début de la suite, on obtient TOUT le reste.

S(n)+S[n+1+S(n)]=n peut se décliner sous la forme : S(n) = A <=> S(n+1+A) = n - A

S(4n-1) = 1 entraîne S(4n-1+1+1)=4n-1--1 c’est-à-dire
S(4n+1) = 4n-2 (correspond aux 3^e et 5^e patterns)

et on recommence S(4n+1+4n-2+1) = 4n+1-(4n-2) c’est-à-dire

S(8n) = 3 le second "pattern"

S(8n+4) = 8n -3 soit la 4^e formule, puis S(8n+4 + 8n-3 + 1) = 8n+4 -(8n -3)

S(16n+2) = 7 soit la formule (f)

S(16n+10) = 16n -5 qui correspond à S(4(4p+2)+2) = 4(4p+2)-3, c'est-à-dire à S(4n+2) = 4n-3 lorsque n=4p+2

S(32n+6) = 15 qui correspond à S(4(8p+1)+2) = 15 et donc S(4n+2)=15 lorsque n est de la forme n=8p+1

Ces deux derniers exemples, (et il y en a d'autres), te montrent que ce n'est pas évident pour 4n+2 et qu'il n'y a pas de formule unique simple pour S(4n+2)

Je pourrais reprendre la liste des formules, mais je préfère généraliser, tu as remarqué 4, 8, 16, 32... les puissances de 2 et 3, 7, 15 ... les puissances de 2 moins un...

DÉMO :

Soient S(n)+S[n+1+S(n)]=n et les deux formules (k=2,3,4...)

S(2^k * n+ 2^(k-2) -2)= 2^(k-1) - 1
S(2^k * n + 3* 2^(k-2) -2) = 2^k * n   -2^(k-2) -1

En débutant à k = 2 on a la formule S(4n-1) = 1. La démonstration est une récurrence.

Ensuite c'est un jeu d'enfant de montrer qu'il n'y a aucune collision entre ces formules (en nombre infini) et que ces formules suffisent à remplir tout l'espace (définir la suite S(n) pour tout entier n>0)

____

[**Éric** to **SeqFans**, later] :

For an increasing sequence with the same property ("seed+bean=n"):

S = 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 31, 31, 31, 31, 31, ...

Best,
É.

____

[**Jean-Paul Davalan**]:

(...)
Je viens de rédiger un petit programme, j'ai fait cette fois quelques essais.

Il y a d'autres suites qui se définissent comme l'autre (c.-à-d. S(4*n-1) = 1),
ce sont S(4*n-1) =5 ou S(4*n-1) =9 ... Ce qui suffit à les définir, quitte à commencer les suites avec n négatif pour la construction et en ne gardant ensuite que les termes pour n positif (n>=0) ou pour n>0, (au choix, selon ses préférences).

Il y a effectivement des suites croissantes, pas strictement croissantes mais pas constantes non plus. La démonstration devrait être simple (mais je n'en suis plus si sûr). Plus simple - sauf imprévu - que pour les précédentes qui étaient définies par S(4*n-1)=4*Constante+1.

En débutant à n=1 avec S(1)=0 :

```
0 1 1 1 2 3 3 3 3 3 4 5 6 7 7 7 7 7 7 7 7 7 8 9 10 11 12 13 14 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15
15 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31
31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53
54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63
63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63
63 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97
98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125
126 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127
127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127
127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127
127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127
127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 127 128 129 130 131 132
133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159
160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186
187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213
214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240
241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255 255
255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281
282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308
309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335
336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362
363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389
390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416
417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443
444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470
471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489
```

En voici une autre qui débute à n=3 en prenant S(3)=1 :

```
 _ _ 1 2 2 2 2 3 4 5 5 5 5 5 5 5 6 7 8 9 10 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32
33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47
47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56
57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92
93 94 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95 95
```

Ou encore en partant de S(6)=2 :

```
 _ _ _ _ _ 2 3 4 4 4 4 4 4 5 6 7 8 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 19 19 19 19 19 19 19
19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 39 39
```

Les propriétés de toutes ces suites de la famille doivent être intéressantes. Là aussi, il faudrait que je rédige les démonstrations. À partir de mercredi j'aurai peut-être le temps de le faire.

Une remarque en passant, à ces constructions sont associées des bijections de N vers N^2, comme je l'avais aussi remarqué pour ta suite sur les décimations.

[**Aai**]:

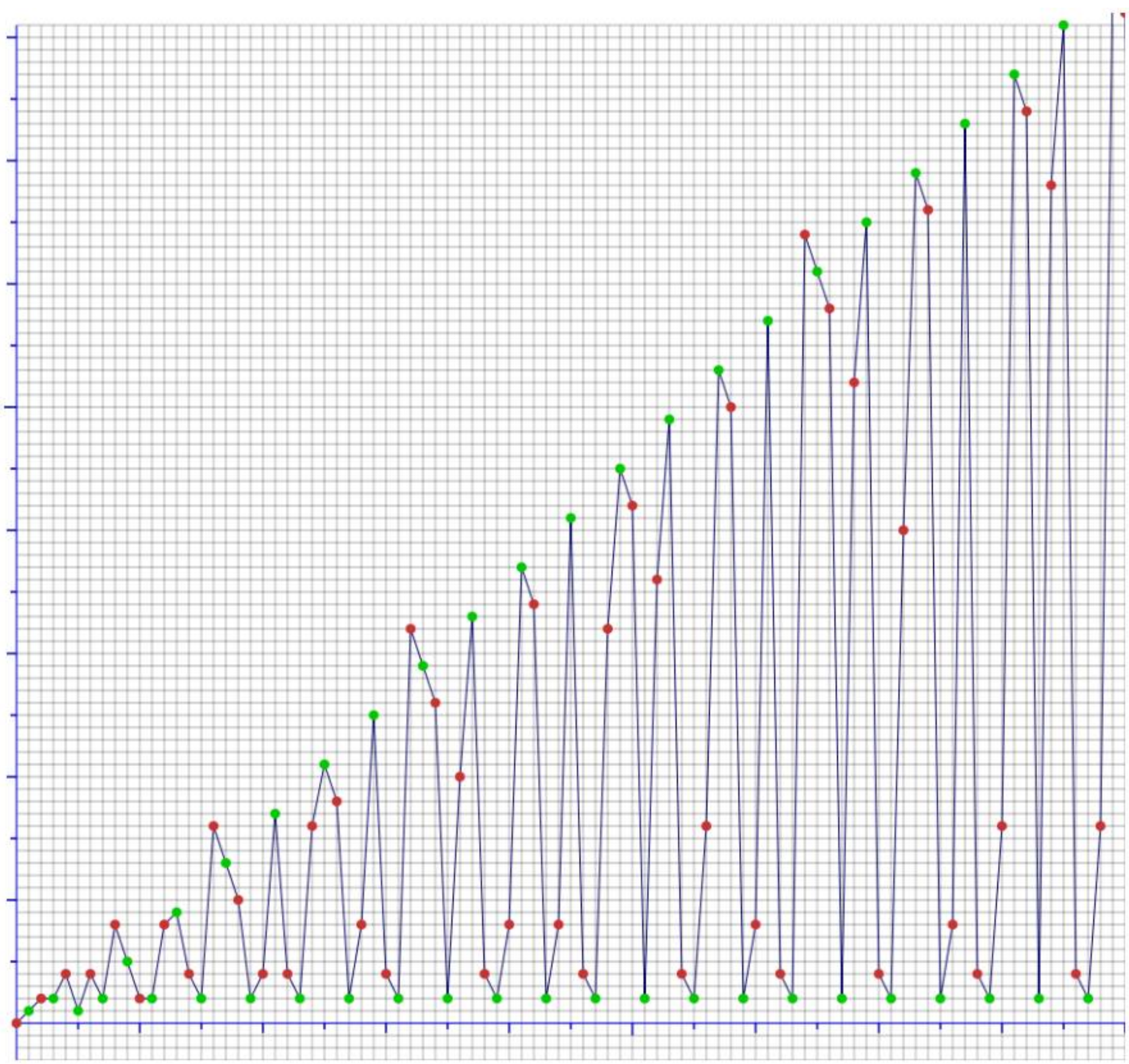
```
Illustrating another process of generating sequence S
=====================================================

Looking at S with 0-based indices we have:                 This color is for J language

S=0,1,1,1,2,3,1,3,6,3,1,5,10,7,1,3,14,7,1,13,18,7,1,3,22,11,1,21,26,15,1,3,30,7,
n=  1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,1, 1,1,1,1, 1,1,1, 1, 2,2,2,2, 2, 2,2, 2, 2, 2,3,3, 3,3,
                      0 1  2 3 4 5  6 7 8  9  0 1 2 3  4  5 6  7  8  9 0 1  2 3

Positions of basic 1's:                                    +/\1 1, 10$4

    1 2 6 10 14 18 22 ...

These indices are also elements of sequence S at positions:   2+ +/\1 1, 10$4

    3 4 8 12 16 20 24 28 32 36 40 44 ...

So we can build this sequence by:

    starting with a virgin sequence of 0's:                ]z=.0$~y=.58

        0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...

    indices of 1's:                                        k= . +/\1 1, 4$~<.4%~y-2

    assigning 1's:                                         ] z=. 1 k } z

        0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 ...

    assigning indices of the basic 1's:                    ] z=. (}:k) (}:2+k) }z

        0 1 1 1 2 0 1 0 6 0 1 0 10 0 1 0 14 0 1 0 18 0 1 0 22 0 1 0 26 0 1 0 30 0 1 0 34 0 1 ...

There's another set of numbers that can be found at regular positions, namely:

        3 7 15 31... or 2^2 - 1, 2^3 -1, etc.

Calculating principle to obtain the positions of these numbers:

    3: starting index 5 = 2 * 3 - 1
       and then: 7 9 15 23 31 39 ...
       diff:    2 2 6  8  8  8   8 ...

    7: starting index 13 = 2 * 7 - 1
       and then: 17 21  33  49  65 ...
       diff:    4  4  12  16  16  16 ...

    15: starting index 29 = 2 * 15 - 1
       and then:  37 45  69  101  133  165  197 ...
       diff:     8  8  24  32   32   32   32 ...

So for the numbers e = 3, 7, 15, ... with e = 2^(1+i) - 1 and i = 1,2,3,... we have diff sequences:

       2 2 6 8 8 8 8 ...  basic sequence

Doubling the values for every next 2^(1+i) - 1
... resulting in index-sequences:                          +/\(1-~2*1-~2^i+1), +~^:(i-1) 2 6 8 8 8 8 ...

Examples:

    3:                                                     +/\(1-~2*1-~2^i+1), +~^:(i-1) 2 2 6, 10$8 [
    i=.1
       5 7 9 15 23 31 39 47 55 63 71 79 87 95

    7:                                                     +/\(1-~2*1-~2^i+1), +~^:(i-1) 2 2 6, 10$8 [
    i=.2
       13 17 21 33 49 65 81 97 113 129 145 161 177 193
```

```
Etc.

After this procedure there are still some '0'-holes left, other than the first one.

0 1 1 1 2 3 1 3 6 3 1 0 10 7 1 3 14 7 1  0 18 7 1 3 22  0 1  0 26 15 1 3 30 7 1  0 34 15 1 3 38 0  1  0 42 15
1 3 46 7 1 0  50  0 1 3 54 0

Compare with the original sequence S:                            6 10 $ S

0 1 1 1 2 3 1 3 6 3 1 0 10 7 1 3 14 7 1  0 18 7 1 3 22  0 1  0 26 15 1 3 30 7 1  0 34 15 1 3 38 0  1  0 42 15
1 3 46 7 1 0  50  0 1 3 54  0
0 1 1 1 2 3 1 3 6 3 1 5 10 7 1 3 14 7 1 13 18 7 1 3 22 11 1 21 26 15 1 3 30 7 1 29 34 15 1 3 38 27 1 37 42 15
1 3 46 7 1 45 50 23 1 3 54 43

Remaining numbers to fill these holes are:

    5 11 13 21 23 27 29 37 43 45

Solution to calculate and fill the remaining 'holes':

    find first index i of a hole:     i
    find first index j where          i == 1 + j + [j]
    calculate and fill hole [i]      [i] = 1 + j - [j]
    repeat until done: all holes filled.

--
Met vriendelijke groet,
=@@i
```

Nice, **Aai**!

____

Voici le graphique de la suite qui ouvre cette page, généré par le programme de **Jean-Paul Davalan** (bouton EA1):



____

Merci **Jean-Paul** & **Aai**,

à+
É.

(dernière mise à jour : 14 décembre 2011)