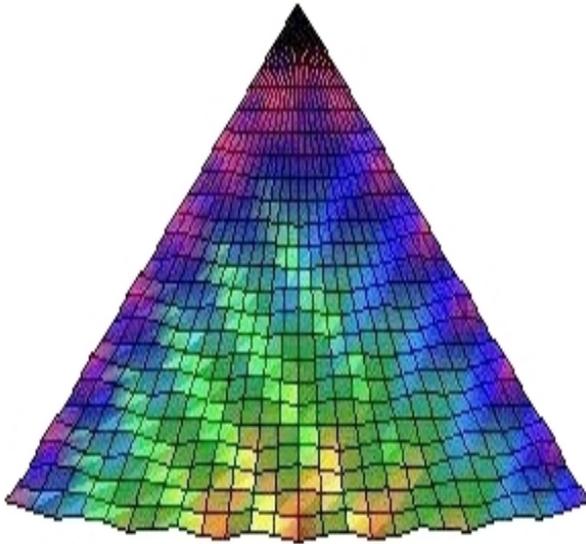


PETER H. N. LUSCHNY

DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT UND  
ORBITALSYSTEME



AUSFLÜGE IN DIE WELT DER  
KOMBINATORISCHEN ZAHLEN

PETER H. N. LUSCHNY

DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT UND  
ORBITALSYSTEME

Peter H. N. Luschny  
Le Hohwald, Chaume des Veaux  
Email: peter@luschny.de

ISBN 978-3-\*\*\*\*-\*\*\*-\*

Bibliographische Informationen:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

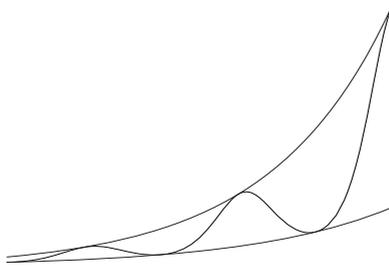
Satz und Umschlaggestaltung: Autor

Druck und Verlag: epubli GmbH, Berlin, [www.epubli.de](http://www.epubli.de)

© 2011 Peter Luschny

# DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT UND ORBITALSYSTEME

PETER H. N. LUSCHNY



Ausflüge in die Welt der  
kombinatorischen Zahlen



*It doesn't mean a thing if it ain't got that swing.*

— Louis Armstrong

*Numero deus impari gaudet!*

— Gottfried Wilhelm Leibniz

## STICHWORTE

---

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 05A10; Secondary 33C20.

*Keywords*. Factorial function, Swinging factorial, Gamma function, Eratosthenes' factorial, Binomial coefficient, Least common multiple, Catalan numbers, Louisa numbers, Combinatorial pyramids, Swinging orbitals, Bertrand's postulate, Alhacen-Lagrange theorem, Riemann hypotheses, Hypergeometric series, Reed-Dawson identity, Orbital lattice, Omega numbers, Chebychev  $\psi$  function.

## VORWORT

---

Unsere kleine Abhandlung kreist um drei Funktionen:

- die schwingende Fakultät,
- die Louisa-Zahlen,
- die Catalan-Funktion.

Die *schwingende Fakultät* ist die kleine Schwester der eulerschen Fakultät, eine leichtgewichtige und kurvenreiche Funktion  $n!$ , welche, im Gegensatz zur monotonen Fakultät, die angenehme Eigenschaft besitzt, auch auf der negativen Achse nur endliche Werte anzunehmen. Eng verwandt ist die schwingende Fakultät mit dem mittleren und dem zentralen Binomialkoeffizienten: doch während sich diese beiden noch miteinander streiten, wer denn nun wirklich in der Mitte des binomischen Dreiecks Platz nehmen darf, ist die schwingende Fakultät die lachende Dritte, welche die guten Eigenschaften der beiden Rivalinnen nicht nur vereint, sondern übertrifft, wie wir sehen werden.

Die zahlentheoretischen Eigenschaften der schwingenden Fakultät lassen sie in ein Verhältnis treten zu dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der ersten  $n$  natürlichen Zahlen,  $\text{lcm } n = \text{lcm}\{1, 2, \dots, n\}$ , und diesem Verhältnis entspringen die *Louisa-Zahlen*  $\mathcal{L}(n) = \text{lcm}(n)/n!$ . In ihnen spiegeln sich die Wachstumseigenschaften der Primzahlen wider, die Inklusion  $\lfloor n/3 \rfloor ! < \mathcal{L}(n) < \lfloor n/2 \rfloor !$ , gültig für  $n \geq 285$ , kann man etwa als eine zum Primzahlsatz in seiner elementaren Form äquivalente Aussage ansehen. Tatsächlich bilden die Wachstumseigenschaften der Louisa-Zahlen die der Primzahlen so gut nach, dass sich mit ihnen eine einfache, rein zahlentheoretische Version der riemannschen Hypothese formulieren läßt.

Die schwingende Fakultät besitzt aber noch einen Zwillingsbruder, die *Catalan-Funktion*  $E(x)$ . (Auf dem Titelblatt sieht man eine Zeichnung dieser anmutigen Funktion in ihrem Anfangsbereich für  $x \geq 0$ .) Damit steht die schwingende Fakultät auch im Mittelpunkt vieler kombinatorischer Überlegungen, denn die Sprechweise der einen Funktion läßt sich leicht in die der anderen überführen. Doch während die Catalan-Zahlen  $C_n$

die *Dycke-Pfade* zählen, sind die schwingenden Zahlen  $n\lambda$  begrifflich allgemeiner gehalten. Deswegen führen wir eine eigene kombinatorische Sprechweise ein, die der *Orbitale*, welche, eingeschränkt auf die elevierten Orbitale, im Fall eines *geraden*  $n$  den Dycke-Pfaden entsprechen.

An wen richtet sich das Buch? Jeder mathematisch Interessierte, der mit den mathematischen Begriffen, wie sie aus den Vorlesungen des Grundstudiums der Mathematik, der Informatik oder eines naturwissenschaftlichen oder technischen Studiums vertraut ist, kann diese Schrift mühelos lesen. Erreichen möchte ich in erster Linie Leser, die Freude an der konkreten Mathematik haben, und diesen Begriff verstehe ich im Sinne der Arbeiten von Leonhard Euler und Donald E. Knuth.

Ich gebe jetzt einen kurzen Überblick über den Inhalt der Arbeit. Entsprechend den drei Themenschwerpunkten ist die Arbeit gegliedert in drei Teile – Analytik, Zahlentheorie und Kombinatorik – wobei die beiden späteren Teile jeweils nur vom ersten Teil abhängen.

TEIL 1: Die schwingende Fakultät  $n\lambda = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!^2}$  ist, wie schon erwähnt, eine Cousine von  $\binom{2n}{n}$  und  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ . Wer von diesen drei Schönheiten aber auf den ersten Platz in der Konkurrenz kommt, stellt im ersten Kapitel Satz 1 von Anfang an klar. Die Einfachheit der zahlentheoretischen Darstellung gibt  $n\lambda$  den besonderen, systematischen Vorzug.

Danach suchen wir eine analytische Darstellung von  $n\lambda$ , welche gültig für beliebige reelle oder komplexe Werte ist. Das Problem ist hier die Interpretation der *floor*-Funktion. Wir lassen uns dabei von einer Formel von John Wallis leiten, die uns die geheimnisvolle Balance zwischen dem geradem und ungeradem Fall erschließt. So finden wir eine Fortsetzung im Komplexen, die ähnlich wie die eulersche Fakultät eine einfache Funktionalgleichung und Reflexionsgleichung besitzt. Integraldarstellungen, die auf Eulers zweitem Integral basieren, runden die analytischen Grundlagen ab.

Die logarithmische Ableitung der schwingenden Fakultät besitzt eine Verbindung zu den alternierenden harmonischen Zahlen, die eine ähnliche Gestalt annimmt, wie die Verbindung von monotoner Fakultät zu den harmonischen Zahlen. Besonders anschaulich werden die Sachverhalte nach Einführung einer schwingenden harmonischen Funktion: Die alternierenden harmonischen Zahlen sind genau die Schnittpunkte der logarithmischen Ableitung der schwingenden Fakultät mit der schwingenden harmonischen Funktion.

Als nächstes führen wir die *eratosthenische Fakultät* ein und zeigen die

aus der Identität von Legendre erwachsende Verbindung zur schwingenden Fakultät.

Das erste Kapitel schließen wir mit einem kurzen Hinweis auf die von A. A. Markoff eingeführte Methode der Konvergenzbeschleunigung mittels schwingender Reihen, besonders bei der Berechnung von Werten der riemannschen Zetafunktion.

In Kapitel 2 geben wir eine gerade und einhüllende asymptotische Entwicklung der schwingenden Fakultät an und leiten daraus einfache Schranken für den reellen Fall ab. Dabei greifen wir nicht auf die stirlingische Entwicklung zurück, sondern verwenden eine asymptotische Entwicklung, die von J. L. Fields angegeben wurde, und die zu wesentlich effizienteren Formeln führt. Am Beispiel einer ‚Taschenrechnerformel‘ für  $\binom{2n}{n}$  zeigen wir den Unterschied zu der konventionellen Form.

Eine zweite Demonstration der asymptotischen Formeln ist die Betrachtung der alternierenden Summe des binären Logarithmus. Sie führt uns auch zu einem Vorschlag, wie die *alternierende Fakultät* ins Komplexe fortgeführt werden kann. Eine Betrachtung des Verhältnis von Bernoulli-Funktion (beziehungsweise Zetafunktion) zur schwingenden Fakultät beschließt das zweite Kapitel.

Das 3. Kapitel widmet sich hypergeometrischen Darstellungen von  $x \setminus$ . Insgesamt 14 solcher Darstellungen werden angegeben, der Großteil von ihnen auch hergeleitet. Diese werden auf verschiedene Summen von binomischen Reihen angewendet, eine Variante der Legendre-Polynome wird betrachtet und zwei Verallgemeinerungen der Reed-Dawson-Identität besprochen. Das Kapitel schließt mit zwei Kettenbruchentwicklungen der schwingenden Fakultät, welche auf hypergeometrischen Darstellungen von Quotienten von Gammafunktionen und der gaußschen Kettenbruchentwicklung beruhen.

Im 4. Kapitel zeigen wir, dass die schwingende Fakultät die natürliche Basis einer einfachen Methode zur exakten Berechnungen des ganzzahligen  $n!$  ist. Wir untersuchen die Zeitkomplexität dieses Algorithmus und stellen sie einer ähnlichen Methode von Arnold Schönhage gegenüber. Vermutlich ist der vorgestellte Algorithmus unter den bekannten der effizienteste, was auch numerische Experimente nahelegen. Wieder ist es wohl die besondere zahlentheoretische Einfachheit der schwingenden Fakultät, die hier den Unterschied ausmacht.

TEIL 2: Der zweite Teil der Arbeit ist Fragen aus der elementaren Zahlentheorie gewidmet. Eine zahlentheoretische Ungleichung wird gezeigt, die das bertrandsche Postulat impliziert und einen einfachen Zugang zu einer elementaren Form des Primzahlsatzes eröffnet. Ein Primzahlenkriterium ähnlich dem Alhacen-Lagrange-Kriterium (vulgo: Satz von Wilson) wird gesucht, in welchem die schwingende Fakultät die Rolle der monotonen Fakultät übernimmt. Doch dabei stellt sich heraus, dass die Wieferich-Primzahlen hier zum Spielverderber werden, wie Ilan Vardi (leider) hat zeigen können.

Dann adaptieren wir den Satz von Lucas für die Berechnung von  $n \cdot \gamma \pmod p$ , und geben eine Liste bekannter Kongruenzen der schwingenden Fakultät an, deren früheste Einträge auf Babbage (1819) und Gauß (1828) zurückgehen.

Am Ende des 5. Kapitel unterhalten wir uns noch mit zwei Vermutungen, die hoffentlich auch den Leser herausfordern werden, und einer Notation für natürliche Zahlen, in welche eine Primzahlerkennung eingebaut ist.

Im 6. Kapitel werden die Louisa-Zahlen eingeführt als eine zur schwingenden Fakultät komplementäre Funktion bezogen auf das kleinste gemeinsame Vielfache der ersten  $n$  natürlichen Zahlen. Wir erhalten damit eine genauso einfache, wie fundamentale Dualität, die alle weiteren Überlegungen im zweiten Teil bestimmen werden, und die anscheinend noch nie systematisch untersucht wurde.

Als erste Konsequenz dieser Dualität fällt die Existenz von Zahlen auf, die in dem gleichen Verhältnis zu den Louisa-Zahlen stehen wie die monotone Fakultät zur schwingenden Fakultät. Ich habe diese Zahlen daher *Cofakultät* genannt, aber nicht weiter untersucht.

Das besondere Interesse gilt, wie schon oben einführend erwähnt, den Schranken der Louisa-Zahlen. Einfache Schranken der Louisa-Zahlen, die einer qualitativen Fassung des Primzahlsatzes entsprechen, werden hergeleitet. Dabei erweist sich die Teilbarkeitsbeziehung  $\mathcal{L}(n) \mid \text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor$  als grundlegend für einen *divide-and-conquer* Zugang zur Berechnung der oberen Schranken.

Ist die Fruchtbarkeit der Zerlegung von  $\text{lcm } n$  in das Paar  $n \cdot \gamma$  und  $\mathcal{L}(n)$  erst einmal erkannt, so liegt es nahe, diesen Zugang auszubauen. Dies wird in den letzten Abschnitten des 6. Kapitels angedeutet.

Im 7. Kapitel führt die Zerlegung der tschebyschewschen  $\psi$ -Funktion in  $\ln n \cdot \gamma$  und  $\ln \mathcal{L}(n)$  auf eine Reihe von interessanten Darstellungen, die

illustrieren, dass der *harte Kern* von  $\text{lcm}\{1, 2, \dots, n\}$ , in dem sich die Unregelmäßigkeit der Verteilung der Primzahlen unmittelbar widerspiegelt, in den Louisa-Zahlen liegt.

Ein besonders anschauliches Beispiel für diese Technik ist von Mangoldts explizite Formel: Bei der Summierung über die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion in von Mangoldts Formel genügt nach Herausziehen der schwingenden Fakultät die Kenntnis der Primzahlen  $p \leq \lfloor n/2 \rfloor$ , im Gegensatz zur ursprünglichen Darstellung, welche die Kenntnis der Primzahlen  $p \leq n$  erfordert.

Unter Anwendung dieser Methode formulieren wir dann eine zur riemannschen Vermutung äquivalente, rein zahlentheoretische Aussage, die sich allein auf die Louisa-Zahlen bezieht und eine Aussage über die Größenordnung der Abweichung der Louisa-Zahlen  $\mathcal{L}(n)$  von ihrem asymptotischen Wert  $e^n/2^n$  ist.

Um noch Aussagen über die Anzahl der Primzahlen, die einen gewissen Wert nicht überschreiten, zu erhalten, geben wir noch einen einfachen *Transfersatz* an, mit dem sich solche Aussagen aus entsprechenden Aussagen über die Louisa-Zahlen ergeben.

Den Schlußpunkt des 7. Kapitels und des zahlentheoretischen Teils der Arbeit bildet ein kurzer Bericht über eine numerische Exploration der vorgestellten Abschätzungen.

TEIL 3: Der dritte Teil der Betrachtung widmet sich Fragen der Kombinatorik. Im 8. Kapitel beginnen wir mit einer Erweiterung des Binomialkoeffizienten. Den begrifflichen Rahmen bildet die *rekursive Pyramide*, ein Begriff, der sich an den Begriff der rekursiven Matrix von Martin Aigner ([2] und [3]) anlehnt. Darüberhinaus assoziieren wir zu den Zahlenpyramiden Laurent-Polynome, die es uns erlauben werden, die *Catalan-Pyramide als die Ableitung der binomischen Pyramide* zu deuten.

Ein klassisches Ergebnis wie die Summendarstellung der Diagonalen im pascalschen Dreieck durch die Fibonacci-Zahlen wird ergänzt um eine analoge Identität mit den gefalteten Fibonacci-Zahlen.

Im 9. Kapitel wird eine kombinatorische Interpretation der schwingenden Fakultät als Abzählfunktion der *schwingenden Orbitale* gegeben. Sie ist grundlegend für die im Folgenden entwickelten Zusammenhänge zwischen der *binomischen Pyramide* und den Catalan-Zahlen. Bei dieser kombinatorischen Erkundung werden die *verlorenen Catalan-Zahlen* wiederentdeckt und die *Catalan-Zahlen* werden zur *catalanischen Pyramide* verallgemeinert. Für diese verallgemeinerten Catalan-Zahlen geben wir

eine asymptotische Entwicklung an, welche effizienter ist als die in der Literatur zu findenden gängigen für die klassischen Catalan-Zahlen. Daneben übertragen wir eine Reihe von Ergebnissen von der schwingenden Fakultät auf die verallgemeinerten Catalan-Zahlen, zum Beispiel die 14 hypergeometrischen Darstellungen der schwingenden Fakultät.

Im 10. Kapitel werfen wir einen kurzen Blick auf die *q-Verfeinerungen* der bisher behandelten Größen, insbesondere werden die schwingende komplexe *q*-Fakultät, die binomiale *q*-Pyramide und die *q*-Catalan-Pyramide eingeführt. Als kombinatorisches Ergebnis zeigen wir den Spezialfall eines Satzes von L. Carlitz, der die schwingenden *q*-Polynome als die erzeugenden Funktionen für die Inversions-Statistik über den schwingenden Worten identifiziert.

Das 11. Kapitel rundet die Untersuchung der Orbitale mit der Betrachtung spezieller Einzelfragen ab. Es wird auf die *Verbandstruktur* der Orbitale eingegangen und auf die *Erzeugung* der Orbitale. Der Begriff des *elevierten eratosthenischen Orbitalssystem* wird eingeführt als ein dekoriertes Orbitalssystem, in dem die elevierten Bahnen ausgezeichnet sind und gezeigt, dass die eratosthenische Fakultät die Abzählfunktion dieser Größen ist, eine überraschende Deutung.

Dann führen wir die *orbitale Fakultät*  $n^{\circ} = n \wr n!$  ein im Zusammenhang mit farbigen Orbitalssystemen (Orbitalssysteme, deren Sektoren *farbig* sind) und zeigen, dass es genauso viele farbige Orbitalssysteme gibt wie Möglichkeiten, auf eratosthenischen Bahnen *zweimal* um das Orbitalzentrum zu ‚fliegen‘. Der Begriff des *orientierten Orbitals* und dessen *Dual* schließt das Kapitel ab.

ANHANG: Der Anhang beginnt mit einem Abschnitt über Ballot-, Fine-, Motzkin- und Schröder-Zahlen, klassische Zahlen der Kombinatorik, die mit den Catalan-Zahlen zusammenhängen und wo man die Frage stellen kann, inwieweit die hier gegebene Verallgemeinerung der Catalan-Zahlen zu natürlichen Verallgemeinerungen dieser Zahlen führt. Weiter wird eine kleine Liste offener Fragen mit Forschungscharakter aufgeführt, und eine Reihe einfacher Übungsaufgaben, welche im Text angeschnittene Fragen weiter beleuchten. – Soweit der Überblick über den Inhalt.

Ein methodisches Thema der Untersuchung ist das Paradigma des *divide-and-conquer*, das sich dabei mehrfach als fruchtbar erwies. Dies gilt nicht nur bei der Konstruktion des Algorithmus zur Berechnung von  $n!$ , sondern zum Beispiel auch bei der Formulierung einer Ungleichung, die

der Ausgangspunkt unserer zahlentheoretischen Betrachtungen ist, und die direkt zum Beweis des bertrandschen Postulats führt.

Ein zweites methodisches Thema ist das Bemühen, diskrete Zahlenfolgen durch analytische Funktionen zu interpolieren. Die fast dreihundertjährige Erfolgsgeschichte der eulerschen Gammafunktion [18] ist ja die Erfolgsgeschichte einer geglückten Interpolation einer diskreten Zahlenfolge. Die unendliche Vielzahl der Möglichkeiten einer kontinuierlichen Fortsetzung darf die Mathematiker nicht davon abhalten, nach fruchtbaren Vorschlägen zu suchen. Beispiele in dieser Arbeit sind die schwingende Fakultät selber, die schwingende harmonische Funktion, die alternierende Fakultät und last not least die *Catalan-Funktion* (Abbildung 7), welche die Catalan-Zahlen als einen Mittelwert von Werten der monotonen und der schwingenden Fakultät deutet.

Auf diese Weise wird das begriffliche Netz spürbar enger geknüpft als dies durch jede rein formale oder kalkülmäßige Betrachtung der diskreten Größen allein möglich wäre.

Diejenigen Abschnitte und Sätze, bei denen wir glauben, die etwas andere Sichtweise unterstreichen zu müssen, wurden mit ausführlichen Beweisen behandelt. Natürlich gießen wir auch viel alten Wein in neue Schläuche, aber dann halten wir solche Abschnitte im Stil eines Compendiums, welche Ergebnisse nur referiert.

Ich bedanke mich bei Wolfram Koepf und Stefan Wehmeier für kritische Anmerkungen zu früheren Fassungen dieser Arbeit und bei André Miede für seinen  $\text{\TeX}$ Style *classicthesis*, der in modifizierter Form zum Setzen dieser Arbeit benutzt wurde. Für das Studium der speziellen Zahlen erwies sich die von N. J. A. Sloane aufgebaute Enzyklopädie der Zahlenfolgen [82] als unentbehrlicher und anregungsreicher Begleiter.

Die graphischen Darstellungen im Anhang gestatten einen erstaunlichen Blick hinter die Kulissen des binomischen und des catalanischen Zahlendreiecks und dienen ebenso für einen unterhaltsamen Einstieg in das Thema wie ein *Werkstattgespräch* (Anhang C) mit dem Autor, das seine Tochter mit ihm führte.

Berlin, im August 2011.

P. H. N. L.

## NOTATION

---

Die Eigenschaft einer ganzen Zahl durch 2 teilbar zu sein nennen wir *even*, und *odd* ist definiert als *non even*. Wir verwenden diese Bezeichnungen als *mathematische Namen* ähnlich wie *exp* oder *log*, die (in Formeln) keiner Übersetzung in eine natürliche Sprache bedürfen.

Insbesondere werden wir diese Bezeichnungen häufig im Zusammenhang mit der *Iverson Notation* [b] verwenden, die den Wert 1 bezeichnet, sofern b wahr ist und 0 sonst. So ist  $n \mapsto [n \text{ odd}]$  die *Indikatorfunktion* der ungeraden Zahlen.

Die Konvention  $0^0 = 1$  wird durchgängig verwendet, zum Beispiel in dem Ausdruck  $n^{[n \text{ odd}]}$ .

$n!$	(monotone) Fakultät
$n\wr$	schwingende Fakultät
$n!_q$	q-Fakultät
$n\wr_q$	schwingende q-Fakultät
$n!_{\langle q \rangle}$	symmetrische q-Fakultät
$n\wr_{\langle q \rangle}$	symmetrische schwingende Fakultät
$n'$	eratosthenische Fakultät
$n_j$	Cofakultät
$\mathcal{L}(n)$	Louisa-Zahlen
$\mathcal{L}_k(n)$	verallgemeinerte Louisa-Zahlen
$H_n$	harmonische Zahlen
$\tilde{H}_n$	alternierende harmonische Zahlen
$\tilde{H}(z)$	schwingende harmonische Funktion
$x^{\overline{n}}$	steigende Fakultät
$x^{\overline{\overline{n}}}$	doppelt steigende Fakultät
$1^{\overline{n}}$	ungerade Fakultät
$2^{\overline{n}}$	gerade Fakultät
$n!!$	$= \prod_{k=0}^n (k!)$ bellsche Fakultät

$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$	mittlerer Binomialkoeffizient
$\binom{2n}{n}$	zentraler Binomialkoeffizient
$\binom{x}{y}_2$	verallgemeinerter Binomialkoeffizient
$\binom{n}{k}_{2;q}$	verallgemeinerter q-Binomialkoeffizient
$E(z)$	Catalan-Funktion
$E_{n,k}$	verallgemeinerte Catalan-Zahlen
$E_{n,k}(q)$	verallgemeinerte q-Catalan-Zahlen
$F_n^{(r)}$	verallgemeinerte Fibonacci-Zahlen
$I_n(k)$	Inversionszahlen
$\tilde{I}_n(k)$	schwingende Inversionszahlen
$\Lambda(n)$	Von-Mangoldt-Funktion
$V(n)$	$= \exp(\Lambda(n))$
gcd	größter gemeinsamer Teiler
lcm	kleinstes gemeinsame Vielfache
$\text{lcm } x$	$= \text{lcm}(\{1, 2, 3, \dots, \lfloor x \rfloor\})$
$x \bmod m$	$= x - m \lfloor x/m \rfloor$ für $m \neq 0$ , $x$ sonst.
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^m$	$= 1 - [n - k \text{ odd}] [m - k \text{ odd}]$
$[x^n]F(x)$	Koeffizient von $x_n$ in der Taylorentwicklung von $F(x)$ an der Stelle $x = 0$ .

# ÜBERBLICK

---

i	DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT $N!$	1
1	EINE NEUE FAKULTÄTSFUNKTION	2
2	ASYMPTOTIK UND SCHRANKEN VON $N!$	20
3	HYPERGEOMETRISCHE DARSTELLUNGEN VON $N!$	30
4	BERECHNUNG DER FAKULTÄT $N!$	40
ii	ANWENDUNGEN VON $N!$ IN DER ZAHLENTHEORIE	47
5	ZERLEGBARE UND PRIME ZAHLEN	48
6	DIE LOUISA-ZAHLEN	59
7	LOUISA-ZAHLEN UND PRIMZAHLVERTEILUNG	70
iii	ANWENDUNGEN VON $N!$ IN DER KOMBINATORIK	79
8	KOMBINATORISCHE PYRAMIDEN	80
9	VERALLGEMEINERTE CATALAN-ZAHLEN.	90
10	Q-VERFEINERUNGEN VON $N!$ UND $E_n$ .	109
11	VERBÄNDE DER ORBITALEN	117
iv	ANHANG	129
A	VERALLGEMEINERTE KOMBINATORISCHE ZAHLEN.	130
B	ÜBUNGSAUFGABEN.	139
C	EIN WERKSTATTGESPRÄCH MIT DEM AUTOR	149
D	SCHWINGENDE ORBITALSYSYEME	157
E	FUNKTIONSGRAPHEN	160

# INHALTSVERZEICHNIS

---

i	DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT $n!$	1
1	EINE NEUE FAKULTÄTSFUNKTION	2
1.1	Eine Zerlegung der Fakultät.	2
1.2	Definition der schwingenden Fakultät.	3
1.3	Die Primfaktoren der schwingenden Fakultät.	3
1.4	Verallgemeinerung von $n!$ in die komplexe Ebene.	5
1.5	Nachbemerkung zur verallgemeinerten Definition.	7
1.6	Funktionalgleichung und Reflexion.	8
1.7	Anwendung der legendreschen Verdopplungsformel.	9
1.8	Integraldarstellungen von $n!$ .	10
1.9	Produktdarstellungen der schwingenden Fakultät.	12
1.10	Die logarithmische Ableitung von $x!$ .	12
1.11	$n!$ und alternierende harmonische Zahlen.	13
1.12	Die schwingende harmonische Funktion.	15
1.13	Die eratosthenische Fakultät.	16
1.14	Mehr zur eratosthenischen Fakultät.	17
1.15	Eine Darstellung mit Stirling-Zahlen.	18
1.16	Schwingende Reihen.	19
1.17	Verallgemeinerte Fakultät.	20
2	ASYMPTOTIK UND SCHRANKEN VON $n!$	22
2.1	Asymptotik der schwingenden Fakultät.	22
2.2	Die logarithmische Form.	24
2.3	Eine Taschenrechnerformel für $\binom{2n}{n}$ .	25
2.4	Faktorielle Schranken von $n!$ .	25
2.5	Schranken von $n!$ und $\log(n!)$ .	26
2.6	Die alternierende logarithmische Summe.	27
2.7	Bernoulli-Funktion und $x!$ .	29
3	HYPERGEOMETRISCHE DARSTELLUNGEN VON $n!$	31
3.1	Darstellungen mit klassischen Identitäten.	31
3.2	Eine hypergeometrische Identität.	32
3.3	Die schwingenden Legendre-Polynome.	33
3.4	Die doppelte und die ungerade Fakultät.	35
3.5	Eine alte und eine neue Summe.	35

3.6	Die verallgemeinerten Reed-Dawson-Polynome.	36
3.7	Die symmetrische Reed-Dawson-Identität.	38
3.8	Weitere Hypergeometrische Darstellungen von $n!$ .	39
3.9	Kettenbruchentwicklungen von $x!$ .	40
4	BERECHNUNG DER FAKULTÄT $n!$	43
4.1	Ein Algorithmus zur Berechnung von $n!$ .	43
4.2	Swing Time: Zeitkomplexität von $n!$ .	44
4.3	Factorial Time: Zeitkomplexität von $n!$ .	45
4.4	Zur Berechnung der erasthenischen Fakultät.	46
4.5	Implementierung von dsc-Factorial.	47
4.6	Rekursive Berechnung von $n!$ .	47
4.7	Additive Berechnung von $n!$ und $n!$ .	48
4.8	Sage Implementierungen.	49
ii	ANWENDUNGEN VON $n!$ IN DER ZAHLENTHEORIE	51
5	ZERLEGBARE UND PRIME ZAHLEN	52
5.1	Eine zahlentheoretische Ungleichung.	52
5.2	Rekursion der verschärften Ungleichung.	54
5.3	Bertrands Postulat.	55
5.4	Die Folge der Primzahlen.	55
5.5	Erkennen von Primzahlen.	56
5.6	Schwingende Primzahlen.	57
5.7	Das Alhacen-Lagrange Kriterium.	57
5.8	Die Berechnung von $n! \pmod p$ nach Lucas.	58
5.9	Kongruenzen der schwingenden Fakultät.	59
5.10	Weitere einfache Teilbarkeitsrelationen.	60
5.11	Zwei Vermutungen.	61
5.12	Pascals Dreieck als Primzahlenindikator.	62
5.13	Notion versus Notation.	63
6	DIE LOUISA-ZAHLEN	65
6.1	Das Komplement der schwingenden Fakultät.	65
6.2	Berechnung der Louisa-Zahlen.	66
6.3	Die Cofakultät.	67
6.4	Die Louisa-Zahlen als summatorische Funktion.	69
6.5	Eine obere Schranke für die Louisa-Zahlen.	71
6.6	Eine einfache Schranke für $\text{lcm } n$ .	73
6.7	Residuale Zerlegungen von $\text{lcm } n$ .	74
6.8	Verallgemeinerte Louisa-Zahlen.	76

7	LOUISA-ZAHLEN UND PRIMZAHLVERTEILUNG	77
7.1	Asymptotik der Louisa-Zahlen.	77
7.2	Von Mangoldts explizite Formel.	78
7.3	Riemanns Hypothese reduziert.	79
7.4	Schwingende Schranken der Louisa-Zahlen.	80
7.5	Darstellungen mit Psi und Zeta.	81
7.6	Ein Transfersatz.	82
7.7	Eine numerische Exploration.	82
iii	ANWENDUNGEN VON $n!$ IN DER KOMBINATORIK	85
8	KOMBINATORISCHE PYRAMIDEN	86
8.1	Eine Erweiterung des Binomialkoeffizienten.	86
8.2	Rekursive Pyramiden.	88
8.3	Die schwingende Pyramide.	89
8.4	Spezialfälle der binomischen Konvolution.	90
8.5	Die schwingenden Polynome.	91
8.6	Erzeugende Funktionen für $n!$ .	92
8.7	Spezielle Summen in der schwingenden Pyramide.	93
8.8	Verallgemeinerte Fibonacci-Zahlen.	94
8.9	Diagonalsummen in der schwingenden Pyramide.	96
9	VERALLGEMEINERTE CATALAN-ZAHLEN	97
9.1	Kombinatorische Interpretation von $n!$ .	97
9.2	Typen und Codierung von Orbitalen.	97
9.3	Pfade und Orbitale.	99
9.4	Die verlorenen Catalan-Zahlen.	100
9.5	Eine Integraldarstellung der Catalan-Zahlen.	101
9.6	Die rekursive Pyramide der Catalan-Zahlen.	102
9.7	Konvolutionsprodukte der Catalan-Zahlen.	104
9.8	Spezialfälle der Catalan-Konvolution.	105
9.9	Zeilensummen in der Catalan-Pyramide.	106
9.10	Die Catalan-Polynome.	107
9.11	Erzeugende Funktionen der Catalan-Zahlen.	108
9.12	Das Produkt $E_k(n - k)!$ .	108
9.13	Singularitäten der erzeugenden Funktion von $C_n$ .	110
9.14	Asymptotik der Catalan-Zahlen.	110
9.15	Die Catalan-Funktion.	112
9.16	Schranken der Catalan-Funktion.	114
9.17	Hypergeometrische Darstellungen von $E_n$ .	114
9.18	Allgemeine Binomial- und Catalan-Funktion.	115

10	Q-VERFEINERUNGEN VON $N!$ UND $E_n$	118
10.1	Die schwingende $q$ -Fakultät.	118
10.2	Die schwingenden $q$ -Polynome.	119
10.3	Schwingende Wörter und Inversionen.	120
10.4	Die schwingenden symmetrischen $q$ -Polynome.	122
10.5	Die Orbitalpolynome.	122
10.6	Die komplexe schwingende $q$ -Fakultät.	124
10.7	Die binomiale $q$ -Pyramide.	124
10.8	Die $q$ -Catalan-Pyramide.	125
10.9	Die $q$ -Catalan-Funktion.	125
11	VERBÄNDE DER ORBITALEN	127
11.1	Eine lineare Ordnung der Orbitale.	127
11.2	Orbitale und Kombinationen.	128
11.3	Der Orbitalverband.	128
11.4	Die Erzeugung von Orbitalen.	129
11.5	Eratosthenische Orbitale.	131
11.6	Wie versteckt man einen Schatz in einem Baum?	132
11.7	Farbige Orbitalsysteme und verkettete Orbitale.	133
11.8	Kollisionen und das Dual eines Orbitals.	135
iv	ANHANG	139
A	BALLOT-, FINE-, MOTZKIN-, SCHRÖDER-ZAHLEN	140
A.1	Die Catalanische Ballot-Rekursion.	140
A.2	Die verallgemeinerten Fine-Zahlen.	141
A.3	Verallgemeinerte Motzkin-Zahlen.	142
A.4	Verallgemeinerte Riordan-Zahlen.	143
A.5	Die klassischen Schröder-Zahlen.	144
A.6	Das Schröder-Tableau.	145
A.7	Das schwingende Tableau.	145
A.8	Stirling-Darstellung der Catalan-Zahlen.	146
A.9	Die orbitale Fakultät als Summe.	147
B	ÜBUNGSAUFGABEN.	149
B.1	Die Primfakultäts-Ungleichung.	149
B.2	Inklusion der Louisa-Zahlen.	149
B.3	Die Anzahl der Primfaktoren von $n!$ und $\text{lcm } n$ .	150
B.4	Ein schwingender Primzahltest.	150
B.5	Die Tschebyschew-Funktion $\psi$ .	150
B.6	Eine Inklusion von $2^n$ .	150
B.7	Konvolutorische Dreiecke.	150

B.8	Schwingende Darstellungen von Funktionen.	153
B.9	Inklusion der schwingenden Harmonischen.	154
B.10	Eine Summendarstellung der schwingenden Fakultät.	155
B.11	Asymptotik der schwingenden Harmonischen.	155
B.12	Asymptotik der logarithmischen Ableitung von $z!$ .	155
B.13	Verschiedene Primfaktoren von $n!$ .	155
B.14	Erzeugende Funktion der erathostenischen Fakultät.	156
B.15	Drei kombinatorische Folgen.	156
B.16	Spezielle Werte der schwingenden $q$ -Polynome.	157
B.17	Ein Primzahlenkriterium mit Catalan-Zahlen.	157
B.18	Interpretation einer binomischen Formel.	157
B.19	Spezielle Folgen verallgemeinerter Louisa Zahlen	158
B.20	Louisa-Zahlen und Teilerfunktionen	158
B.21	For hackers only.	159
B.22	Give peace a chance!	159
B.23	Schranken für $2^{n!}$ .	159
B.24	Orbitalketten	159
B.25	Teilbarkeitsrelationen.	160
B.26	Pell-Zahlen als Summe von Fibonacci-Zahlen.	160
B.27	Rekursion für ein schwingendes Produkt.	161
B.28	Eine Näherung an Gammaquotienten.	161
B.29	Eine Näherung an den zentralen Binomialkoeffizienten.	161
B.30	Eine binomische Summe.	162
B.31	Binomische Transformation.	162
B.32	Maximum der Zeilen der $q$ -Pyramide.	162
B.33	Multiswing( $n,k$ ).	162
B.34	Golden Series	164
B.35	Swinging Series.	164
B.36	Darstellung von $n!$ .	164
B.37	Eine Inklusion der Catalan-Zahlen.	164
B.38	Berechnung des mittleren Binomialkoeffizienten.	165
B.39	Zur Kombinatorik der Fine-Zahlen.	166
B.40	Die schwingenden Bernoulli-Zahlen.	166
B.41	Koeffizienten der $q$ -Polynome.	167
C	EIN WERKSTATTGESPRÄCH MIT DEM AUTOR	168
D	SCHWINGENDE ORBITALSYPTEME	177
E	FUNKTIONSGRAPHEN	180
F	Formelsammlung	185

G	VERZEICHNIS DER FOLGEN IN DER OEIS	191
G.1	Schwingende Fakultät und LCM	192
G.2	Catalanische Summen	193
G.3	Motzkin und Schröder Zahlen	194
G.4	The swinging family.	194

Teil I

DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT N<sub>2</sub>

## 1.1 EINE ZERLEGUNG DER FAKULTÄT.

„Unglücklicherweise können wir Fakultäten nicht effizient berechnen“ schreiben Graham, Knuth und Patashnik [31, S.133]. Wie effizient können wir aber sein? Arnold Schönhage etwa berichtet von einem Wettbewerb, die Fakultät schneller und schneller zu berechnen [77]. Hier wollen wir eine *divide-and-conquer*-Rekursion für  $n!$  angeben, die sich mittels Primfaktorzerlegung zu einer schnellen Methode zur Berechnung von  $n!$  ausbauen lässt.

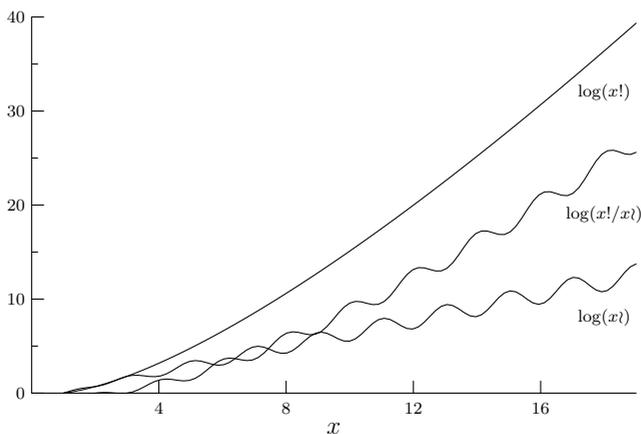


Abbildung 1 – Der Rachen des Drachen: eine Zerlegung der Fakultät

Ausgangspunkt unseres Vorgehens ist dabei die *Drachen*-Darstellung der Fakultät, eine Zerlegung der Fakultät in ein Produkt zweier oszillierender Funktionen, deren Name der graphischen Darstellung entlehnt ist (Abbildung 1). Die untere ‚Zahnreihe‘ dieses ‚Drachenrachsens‘, die *schwingende Fakultät*, wollen wir dabei genauer untersuchen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n!	1	1	2	6	6	30	20	140	70	630	252	2772

Tabelle 1 – Die schwingende Fakultät

### 1.2 DEFINITION DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.

Der Funktionsplot in Abbildung 1 greift der Entwicklung vor. Wir beginnen im ganzzahligen Bereich  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Unter der (*monotonen*) Fakultät verstehen wir das Produkt  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ . Unter der *schwingenden Fakultät* von  $n$  verstehen wir das Verhältnis von  $n!$  zu  $\lfloor n/2 \rfloor!$  und bezeichnen sie mit

$$n! = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!^2} \quad (n \geq 0). \quad (1.1)$$

$\lfloor x \rfloor$  ist dabei die *floor*-Funktion, welche die größte ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$  liefert. Die ersten Werte von  $n!$  führt Tabelle 1 auf.

Weiter schreiben wir  $\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!)$  für den Binomialkoeffizienten. Sei  $\mu_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  der *mittlere Binomialkoeffizient*. Dann ist  $n! = \mu_n$  falls  $n$  gerade ist und andernfalls  $n! = \mu_n((n+1)/2)$ . Damit ist  $n!$  stets eine ganze Zahl. Anschaulicher ist es, die schwingende Fakultät als einen *Trinomialkoeffizienten* aufzufassen:

$$n! = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor, [n \text{ odd}], \lfloor n/2 \rfloor} \quad (1.2)$$

Wir verwenden hier, wie im Folgenden häufig, die Iverson-Klammer  $[ \cdot ]$ , wobei  $[b] = 1$  falls die Aussage  $b$  wahr ist, 0 sonst.  $[n \text{ odd}]$  ist somit 1 falls  $n$  ungerade ist und 0, falls  $n$  gerade ist. In der Form (1.2) werden wir der schwingende Fakultät im kombinatorischen Teil dieser Arbeit begegnen (9.1).

### 1.3 DIE PRIMFAKTOREN DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Primfaktorzerlegung von  $n!$ . Dabei ist die mod-Operation definiert durch  $x \bmod m = x - m \lfloor x/m \rfloor$  für  $m \neq 0$ ,  $x$  sonst.

**Satz 1** Sei  $\ell_p(n!)$  der Exponent der Primzahl  $p$  in der Primfaktorzerlegung von  $n!$ . Dann gilt:

$$\ell_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \pmod{2}. \quad (1.3)$$

Damit ist  $\ell_p(n!) \leq \log_p(n)$  und  $p^{\ell_p(n!)} \leq n$ . Für ungerade Primzahlen gilt  $\ell_p p^{\alpha} = a$ . Spezialfälle von (1.3) und Folgerungen sind:

- (a)  $\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \Rightarrow \ell_p(n!) = 1$
- (b)  $\lfloor n/3 \rfloor < p \leq \lfloor n/2 \rfloor \Rightarrow \ell_p(n!) = 0$
- (c)  $\sqrt{n} < p \leq \lfloor n/3 \rfloor \Rightarrow \ell_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor \pmod{2}$
- (d)  $2 < p \leq \sqrt{n} \Rightarrow \ell_p(n!) < \log_2(n)$
- (e)  $p = 2 \Rightarrow \ell_p(n!) = \sigma_2(\lfloor n/2 \rfloor)$

Dabei bezeichnet  $\sigma_2(n)$  die Summe der Stellen von  $n$  in binärer Basis.

*Beweis:* Mit der Primfaktorzerlegung von  $n!$  nach Legendre (siehe [31, (4.4)]) erhalten wir

$$\begin{aligned} \ell_p(n!/\lfloor n/2 \rfloor!)^2 &= \ell_p(n!) - 2\ell_p(\lfloor n/2 \rfloor!) \\ &= \sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor - 2 \sum_{k \geq 1} \lfloor \lfloor n/2 \rfloor / p^k \rfloor \\ &= \sum_{k \geq 1} \left( \lfloor n/p^k \rfloor - 2 \lfloor \lfloor n/p^k \rfloor / 2 \rfloor \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

und da  $j - 2\lfloor j/2 \rfloor = j \pmod{2}$  per Definition gilt, folgt (1.3). In den Fällen (a), (b) und (c) ist der Summationsbereich auf  $k = 1$  beschränkt, im Fall (a) ist  $\lfloor n/p \rfloor = 1$ , im Fall (b)  $\lfloor n/p \rfloor = 2$  und damit folgen diese drei Fälle aus (1.3). Aussage (d) folgt aus  $\log_b(n) < \log_2(n)$  für  $2 < b$  und (e) folgt aus (1.4) und den Relationen  $\ell_2(n!) = n - \sigma_2(n)$  und  $\sigma_2(\lfloor n/2 \rfloor) = \sigma_2(n) - n \pmod{2}$ . Schließlich ist für eine ungerade Primzahl  $p$

$$\ell_p(p^{\alpha}) = \sum_{k \geq 1} \lfloor p^{\alpha}/p^k \rfloor \pmod{2} = \sum_{1 \leq k \leq \alpha} p^{\alpha-k} \pmod{2} = \sum_{1 \leq k \leq \alpha} 1 = \alpha.$$

Die in Satz 1 beschriebenen Eigenschaften weisen  $n!$  als einen Hybrid aus Fakultät und Binomialkoeffizienten aus und legt die schwingende Fakultät in den Kern eines *divide-and-conquer* Algorithmus zur Berechnung der ganzzahligen Fakultät, wie wir noch sehen werden.

Als Folgerung von Satz 1 lässt sich der Logarithmus der schwingenden Fakultät schreiben als

$$\log(n!) = \sum_{k \geq 1} \sum_{p \text{ prim}} \left[ \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \text{ odd} \right] \log p. \quad (1.5)$$

In dieser endlichen Summe ist  $k \leq \log_2 n$  und  $p \leq n$ . Die Einfachheit der Darstellung (1.5) kündigt interessante zahlentheoretische Eigenschaften von  $n!$  an, die wir im zweiten Teil dieser Arbeit genauer untersuchen werden.

Betrachten wir noch Folgen der Art  $n!/p$ , wobei  $p$  eine Primzahl ist. Eine Folgerung aus Satz 1 ist, dass  $[0 \leq n < p^2]$  in  $p$  Teilintervalle der Länge  $p$  zerfällt in denen  $p$  im Wechsel  $n!$  teilt und nicht teilt. Genauer gesagt, ist  $1 \leq k \leq p$  und  $(k-1)p \leq n < kp$  dann gilt  $p | n! \iff [k \text{ odd}]$ . Beispielsweise beginnt

$$\frac{n!}{3} = \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 2, 10, \frac{20}{3}, \frac{140}{3}, \frac{70}{3}, \dots$$

#### 1.4 VERALLGEMEINERUNG VON $n!$ IN DIE KOMPLEXE EBENE.

Um eine geeignete Verallgemeinerung des ganzzahligen  $n!$  zu finden, streben wir eine Darstellung von  $n!$  an, die ohne die floor-Funktion auskommt. Wir lassen uns dabei von der Formel von Wallis leiten.

$$\frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \quad (1.6)$$

Dabei bezeichnet  $\Gamma$  wie üblich die eulersche Gammafunktion. Betrachten wir zuerst den Fall  $n$  gerade. Dann lässt sich die schwingende Fakultät schreiben

$$n! = \frac{n!}{(n/2)!^2} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n/2+1/2)}{\Gamma(n/2+1)} \quad (n \text{ even}). \quad (1.7)$$

Für ungerades  $n$  gibt Wallis' Formel dagegen

$$n! = \frac{(n-1)!n}{(n/2-1/2)!^2} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2+1/2)} \quad (n \text{ odd}). \quad (1.8)$$

Aus der Rekursionsgleichung  $\Gamma(\frac{n}{2} + 1) = \frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})$  folgt

$$\frac{n}{2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2 + 1/2)} = \left( \frac{\Gamma(n/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2 + 1)} \right)^{-1},$$

so dass wir beide Fälle zusammenfassen können zu

$$n! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(n/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2 + 1)} \right)^{(-1)^n} \quad (n \geq 0). \quad (1.9)$$

Diese Darstellung führt uns unmittelbar zu der Fortsetzung

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \right)^{\cos z\pi}. \quad (1.10)$$

Wir lesen direkt ab  $(n + 1/2)! = 2^{n+1/2}/\sqrt{\pi}$  ( $n \geq -1$ ), insbesondere

$$0! = 1; \quad (-1/2)!(1/2)! = \frac{1}{\pi}; \quad (1/2)!(-1/2)! = 2.$$

Um (1.10) noch begrifflich zu vereinfachen, eliminieren wir darin mit Hilfe der *gaußschen Produktdarstellung* die Gammafunktion und erhalten die elementarere Darstellung für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^{-1/2} \frac{(z+2)(z+4) \cdots (z+2n+2)}{(z+1)(z+3) \cdots (z+2n+1)} \right)^{\cos z\pi}.$$

Wir bemerken, dass der komplexe Grenzwert an den negativen ganzen Zahlen verschwindet, und so ergänzen wir  $(-n)! = 0$  ( $n \geq 1$ ).

(1.10) ist unsere grundlegende Definition. Wegen  $z! = \Gamma(z + 1)$  und  $\Gamma(z/2 + 1/2)\Gamma(z/2 + 1) = 2^{-z}\Gamma(1/2)\Gamma(z + 1)$  lässt sie sich auch schreiben

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2^z} \frac{z!}{(z/2)!2} \right)^{\cos z\pi}. \quad (1.11)$$

Des weiteren interpretieren wir den Faktor  $2^z/\sqrt{\pi}$  durch die Gammafunktion

$$\frac{2^z}{\sqrt{\pi}} = \frac{\Gamma(z + 1)}{\Gamma(z/2 + 1/2)\Gamma(z/2 + 1)}. \quad (1.12)$$

und werden so auf die *Umrechnungsformel* zwischen den Fakultäten geführt

$$z! \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)^{\cos \pi z + 1} = z! \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\cos \pi z - 1}. \quad (1.13)$$

Ist die schwingende Fakultät erst einmal eingeführt, so lässt sich die Formel von Wallis als ein Spezialfall dieser Umrechnungsformel deuten.

### 1.5 NACHBEMERKUNG ZUR VERALLGEMEINERTEN DEFINITION.

Der entscheidende Schritt bei der Einführung der komplexen schwingenden Fakultät war der Übergang von (1.9) zu (1.10). Hier haben wir, außer einer Neuinterpretation des Gegenstandsbereiches, nur eine Veränderung vorgenommen:  $(-1)^n$  durch  $\cos \pi n$  ersetzt. Diese Ersetzung wird im allgemeinen als ‚natürlich‘ empfunden. Aber sie ist nicht zwingend. Und das bedeutet, dass es eine Vielzahl (tatsächlich unendlich viele) andere Möglichkeiten gibt das beschriebene Interpolationsproblem zu lösen.

Die Herausforderung bleibt weitere wünschenswerte Eigenschaften des hier gewählten Ansatzes zu finden, die seine Einzigartigkeit charakterisieren (etwa so, wie die topologisch-geometrischen Eigenschaften des Satzes von Bohr-Mollerup-Artin die Gammafunktion charakterisieren).

Es ist faszinierend an dieser Stelle einen Blick in die Geschichte der Mathematik zu werfen. Leonhard Euler stand nach vielen Jahren des Nachdenkens über das Verhältnis von unendlichen Summen zu unendlichen Produkten eines Tages vor einer Gleichung der Gestalt

$$\alpha(n) = C_n 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1).$$

Hier ist  $\alpha(n)$  das Verhältnis zweier Reihen und  $C_n = (-1)^{n/2}$ . André Weil erzählt in seinem wunderbaren *Gang durch die Geschichte der Zahlentheorie* [89, S.285] was nun geschah:

„Seit seinen ersten Jahren in Petersburg war Euler immer an der Interpolation von Funktionen und Formeln interessiert gewesen, welche zunächst nur für ganzzahlige Werte des Arguments gegeben sind: so hatte er damals die Theorie der Gammafunktion geschaffen. Es ist daher nicht überraschend, dass er nun dasselbe für die obige Beziehung zu leisten versuchte, indem er  $\cos \pi n/2$  für  $C_n$  und die Gammafunktion  $\Gamma(n)$  für  $(n-1)!$  substituierte. Das Ergebnis ist äquivalent zu dem, was wir heute die Funktionalgleichung der Zetafunktion nennen.“

## 1.6 FUNKTIONALGLEICHUNG UND REFLEXION.

Im ganzzahligen Fall erkennt man sofort die Darstellung von  $n!$  als folgendes endliches Produkt

$$n! = 2^n \prod_{0 \leq k < n} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{(-1)^k} \quad (n \geq 0). \quad (1.14)$$

Diese Identität stimmt uns auf die Funktionalgleichung der schwingenden Fakultät ein.

**Satz 2**  $z!$  ist eine analytische Funktion. Sie besitzt die Funktionalgleichung

$$(z+1)! = z! 2 \left( \frac{z+1}{2} \right)^{\cos \pi z} \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (1.15)$$

und die Reflexionsgleichung

$$z!(-z)! = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\tan(\pi z/2)}{z/2} \right)^{\cos \pi z} \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}). \quad (1.16)$$

Für  $z \in \mathbf{Z}$  gilt die Reflexionsgleichung in dem Sinn, dass beide Seiten den Grenzwert 0 besitzen, falls  $z = 0$  ist, und andernfalls den Grenzwert 1.

*Beweis.* Die Funktionalgleichung von  $z!$  folgt aus der Funktionalgleichung von  $\Gamma(z)$ .

$$\begin{aligned} (z+1)! &= \frac{2^{z+1}}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 3/2)} \right)^{\cos(z+1)\pi} \\ &= 2 \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \right)^{\cos z\pi} \end{aligned}$$

Daraus (1.15). Ähnlich spiegelt die Reflexionsgleichung der schwingenden Fakultät die Reflexionsgleichung der Gammafunktion (L. EULER, 1749) wider. Denn eine zweifache Anwendung von ihr führt für  $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$

auf

$$\begin{aligned}
 z\lambda(-z)\lambda &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2) \Gamma(1 - z/2)}{\Gamma(z/2 + 1) \Gamma(1/2 - z/2)} \right)^{\cos z\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\sin(\pi(z+2)/2) 2\Gamma(z/2 + 1/2)\Gamma(z/2)}{\sin(\pi(z+1)/2) z\Gamma(z/2)\Gamma(z/2 + 1/2)} \right)^{\cos z\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\tan(\pi z/2)}{z/2} \right)^{\cos \pi z} \quad \diamond
 \end{aligned}$$

### 1.7 ANWENDUNG DER LEGENDRESCHEN VERDOPPLUNGSFORMEL.

Die berühmte *divide-and-conquer-Formel* von Legendre für die Fakultät lässt sich schreiben

$$x! = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)! \left(\frac{x-1}{2}\right)! . \quad (1.17)$$

Eine unmittelbare Folgerung von (1.17) ist

$$\left(\frac{(x-1)/2}{x/2}\right)^{\cos \pi x} = 2^{-\cos(\pi x)/2} \left(\frac{(x-1)/4}{x/4}\right)! \left(\frac{x-3}{4}\right)! \left(\frac{x}{4}\right)! \left(\frac{x-2}{4}\right)! .$$

Aus dieser Relation und aus der Definition von  $x\lambda$  folgt

$$x\lambda = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{(x-1)/4}{x/4} \right)! \left( \frac{x-3}{4} \right)! \left( \frac{x}{4} \right)! \left( \frac{x-2}{4} \right)! \right)^{\cos \pi x} . \quad (1.18)$$

Damit können wir an Stelle von  $(x/2)!$  und  $((x-1)/2)!$  bei einer Berechnung der schwingenden Fakultät auch auf die Werte  $((x-\alpha)/4)!$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$  zurückgreifen.

Eine zweite Anwendung von Legendres Identität ist

$$\begin{aligned}
 x!\lambda &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x+1) \left( \frac{\Gamma(x/2 + 1/2)}{\Gamma(x/2 + 1)} \right)^{\cos(x\pi)} \\
 &= \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x/2 + 1/2) \Gamma(x/2 + 1) \left( \frac{\Gamma(x/2 + 1/2)}{\Gamma(x/2 + 1)} \right)^{\cos(x\pi)} \\
 &= \left( \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \frac{\Gamma(x/2 + 1/2)^{\cos x\pi + 1}}{\Gamma(x/2 + 1)^{\cos x\pi - 1}}
 \end{aligned}$$

Wir werden später, wenn wir die eratosthenische Fakultät untersuchen werden, zu dieser Identität zurückkehren und sie für den ganzzahligen Fall weiter vereinfachen.

### 1.8 INTEGRALDARSTELLUNGEN VON $n!$ .

Sei  $B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$  die eulersche Betafunktion. Die Identität

$$B((z+w-1)/w, 1/w) = \Gamma(1/w)\Gamma((z+w-1)/w)/\Gamma((z+w)/w)$$

besagt für  $w = 2$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^z} \frac{z!}{(z/2)!^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} B\left(\frac{z+1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Formel (1.11) lässt sich daher auch schreiben

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} B\left(\frac{z+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right)^{\cos(\pi z)}. \quad (1.19)$$

Verwendet man die trigonometrischen Form der Integraldarstellung der Betafunktion [1, (6.2.1)] so zeigt sich, dass (1.19) gleichbedeutend ist mit

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^z dt \right)^{\cos z\pi} \quad (\operatorname{Re} z > -1). \quad (1.20)$$

Diese Formel erinnert an die Geburtsstunde der reellen Fakultätsfunktion, als Euler die Definition  $z! = \int_0^1 (-\log t)^z dt$  Goldbach im Januar 1730 mitteilte.

Für den ganzzahligen Fall  $n > 0$  geben wir noch einfachere Integraldarstellungen an. Im Fall  $n$  gerade ist  $2^n/n! = (n/2)B(n/2, 1/2)$  und falls  $n$  ungerade ist, gilt  $2^n/n! = B(n/2 + 1/2, 1/2)$ . Damit ist für ganzzahliges  $n > 0$

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{n}{2} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n/2-1} dt \quad (n \text{ even}), \quad (1.21)$$

$$\frac{2^n}{n!} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n/2-1/2} dt \quad (n \text{ odd}). \quad (1.22)$$

Einen zweiten Zugang ermöglicht die Formel (1.11)

$$z! = \frac{2^z}{\Gamma(1/2)} \left( \frac{\Gamma(1/2)}{2^z} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma^2(z/2+1)} \right)^{\cos z\pi}. \quad (1.23)$$

Mit der zentralen Betafunktion

$$\beta(z) = B(z, z) = \frac{\Gamma^2(z)}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{z-1} dt$$

lässt sich (1.23) auch schreiben

$$\frac{1}{z!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^z} \left( (z+1) \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \beta\left(\frac{z}{2}+1\right) \right)^{\cos z\pi}. \quad (1.24)$$

Daraus folgt die für  $z > -1$  gültige Darstellung

$$\frac{1}{z!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^z} \left( (z+1) \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 t^{z/2} (1-t)^{z/2} dt \right)^{\cos z\pi}. \quad (1.25)$$

In den ganzzahligen Fällen vereinfacht sich dies zu

$$\frac{1}{n!} = (n+1)^{[n \text{ even}]} \beta\left(\frac{1}{2}(n+1+[n \text{ even}])\right) \quad (n \geq 0) \quad (1.26)$$

Wendet man hier die Integraldarstellung der zentralen Betafunktion an, so wird daraus mit der Abkürzung  $N = n + [n \text{ even}]$

$$\frac{1}{n!} = N^{[n \text{ even}]} \int_0^1 (t(1-t))^{(N-1)/2} dt \quad (n \geq 0), \quad (1.27)$$

beziehungsweise bei Anwendung der trigonometrischen Form

$$\frac{1}{n!} = 2N^{[n \text{ even}]} \int_0^{\pi/2} (\sin(t) \cos(t))^N dt. \quad (1.28)$$

Eine letzte Integraldarstellung geben wir noch ohne Beweis an.

$$\int_1^\infty \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x}{2} \right)^{n+1} \left( \left( \frac{x}{2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{1/2} \right)^{-1} dx = \frac{1}{(n!)} (-1)^n \pi^{[n \text{ even}]} 4^{n/[n \text{ odd}]}$$

## 1.9 PRODUKTDARSTELLUNGEN DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.

Kombiniert man Formel (1.19) mit der Darstellung der Betafunktion, die aus dem Euler-Weierstrass Produkt folgt (vgl. [83], 47)

$$B(x, y) = \frac{x+y}{xy} \prod_{n \geq 1} \left[ 1 - \frac{xy}{(n+x)(n+y)} \right],$$

so erhält man eine Produktdarstellung der schwingenden Fakultät

$$z! = \frac{z^z}{\pi^{(1+\cos \pi z)/2}} \left( 2 \frac{z+2}{z+1} \prod_{n=3,5,7,\dots} \left[ 1 - \frac{z+1}{(z+n)n} \right] \right)^{\cos \pi z}. \quad (1.29)$$

Wählt man dagegen als Ausgangspunkt die Darstellung der reziproken schwingenden Fakultät (1.24) so erhält man

$$\frac{1}{z!} = \left( \frac{z^z}{\sqrt{\pi}} \right)^{\cos(\pi z)-1} \left( 4 \frac{z+1}{z+2} \prod_{n=4,6,8,\dots} \left[ 1 - \left( \frac{z+2}{z+n} \right)^2 \right] \right)^{\cos \pi z}. \quad (1.30)$$

1.10 DIE LOGARITHMISCHE ABLEITUNG VON  $\chi$ .

In diesem Abschnitt betrachten wir die logarithmische Ableitung der schwingenden Fakultät

$$\Xi(x) = \frac{\chi'}{\chi} \quad (1.31)$$

und wollen für positive ganze Zahlen  $n$  zeigen

$$\lim_{r \rightarrow n} \frac{\Xi(-r)}{(-r)!} = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (n > 0). \quad (1.32)$$

Mit der Digammafunktion  $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$  und den Notationen

$$\alpha(x) = \cos(\pi x)(\Psi(x/2 + 1/2) - \Psi(x/2 + 1))/2,$$

$$\beta(x) = \sin(\pi x)(\log \Gamma(x/2 + 1/2) - \log \Gamma(x/2 + 1))\pi,$$

können wir schreiben  $\Xi(x) = \log(2) + \alpha(x) - \beta(x)$ . Dies folgt unmittelbar aus der Definition von  $\chi$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(-x)}{\Gamma(1-x)} &= \frac{1}{2} \frac{\cos(-\pi x)}{\Gamma(1-x)} (\Psi(1/2 - x/2) - \Psi(1 - x/2)) \\ &= \frac{\cos(-\pi x)}{\Gamma(1-x)} \frac{d}{dx} \log \left( \frac{\Gamma(1/2 - x/2)}{\Gamma(1 - x/2)} \right). \end{aligned}$$

Dies ist eine ganze analytische Funktion. Nach Jacques Hadamard [35] (vergleiche auch [54]) interpoliert die Funktion

$$\frac{1}{\Gamma(1-x)} \frac{d}{dx} \log \left( \frac{\Gamma(1/2 - x/2)}{\Gamma(1 - x/2)} \right).$$

die Fakultät an den natürlichen Zahlen. Somit gilt

$$\frac{\alpha(-n)}{\Gamma(1-n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \quad (n \geq 1). \quad (1.33)$$

Da  $\lim_{r \rightarrow n} \log(2)/\Gamma(1-r)$  und  $\lim_{r \rightarrow n} \beta(-r)/\Gamma(1-r)$  für  $n \geq 1$  verschwinden, folgt die Behauptung aus

$$\lim_{r \rightarrow n} \frac{\Xi(-r)}{(-r)!} = \lim_{r \rightarrow n} \frac{\log 2 + \alpha(-r) - \beta(-r)}{\Gamma(1-r)} = (-1)^{n-1} (n-1)!.$$

### 1.11 $n!$ UND ALTERNIERENDE HARMONISCHE ZAHLEN.

Die logarithmische Ableitung der schwingenden Fakultät nimmt an den natürlichen Zahlen  $n \geq 0$  den Wert der *alternierenden harmonischen Zahlen*  $\tilde{H}_n$  an. Das bedeutet  $\Xi(n) = \tilde{H}_n$ , wobei

$$\tilde{H}_n = \sum_{0 \leq k < n} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad (n \geq 0). \quad (1.34)$$

Zum Beweis betrachten wir

$$\tau(n) = [n \text{ even}] \log 2 + \frac{(-1)^n}{2} (\Psi(n/2 + 1/2) + \gamma).$$

Hier ist  $\gamma$  Eulers Konstante. Nun ist nach ([1, 6.3.2 und 6.3.4])

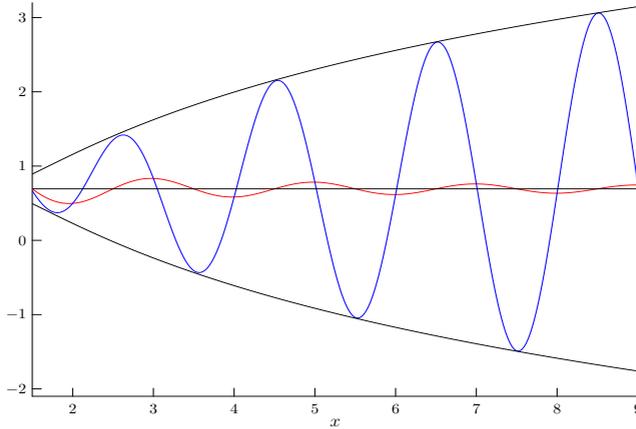


Abbildung 2 – Die logarithmische Ableitung von  $z_l$  (blau) und die schwingende harmonische Funktion  $\tilde{H}(z)$  (rot), sowie  $\log 2$  und Schranken.

$$\Psi(n/2 + 1/2) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 - 1/2 \rfloor} \frac{1}{k} \quad (n \geq 1, n \text{ odd}),$$

$$\Psi(n/2 + 1/2) = -\gamma - 2 \log 2 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{2}{2k-1} \quad (n \geq 2, n \text{ even}).$$

Weil der an  $\sin(\pi n)$  gebundene Anteil von  $\Xi(n)$  verschwindet, folgt

$$\Xi(n) = \tau(n) + \tau(n+1) = \tilde{H}_n \quad \diamond \quad (1.35)$$

Mit der Produktdarstellung (1.14) für die schwingende Fakultät  $n_l$  ergibt sich damit eine elementare Darstellung der Ableitung von  $n_l$ ,

$$n_l' = \frac{1}{2} \left( \prod_{0 \leq k < n} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{(-1)^k} \right) \left( \sum_{0 \leq k < n} (-1)^k \frac{2}{k+1} \right) \quad (n \geq 0). \quad (1.36)$$

Schreiben wir  $H_n$  für die harmonischen Zahlen und  $x!'/x!$  für  $\Psi(x+1)$ , dann erhalten wir die Gegenüberstellung

$$\frac{n_l'}{n_l} = \tilde{H}_n, \quad \frac{n_l'}{n!} = H_n - \gamma. \quad (1.37)$$

## 1.12 DIE SCHWINGENDE HARMONISCHE FUNKTION.

Die Überlegungen im letzten Abschnitt legen eine Verallgemeinerung der alternierenden harmonischen Zahlen zu einer *schwingenden harmonischen Funktion* nahe, die wir einführen als

$$\tilde{H}(z) = \log 2 + \frac{\cos \pi z}{2} \left( \Psi \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right) - \Psi \left( \frac{z}{2} + 1 \right) \right). \quad (1.38)$$

Die Differenz  $\tilde{H}(z) - \Xi(z)$  zwischen der schwingenden harmonischen Funktion und der logarithmischen Ableitung von  $z!$  lässt sich darstellen als ein Produkt

$$\tilde{H}(z) - \Xi(z) = \pi \sin(\pi z) \log \left( \frac{\Gamma \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{z}{2} + 1 \right)} \right). \quad (1.39)$$

Die asymptotische Entwicklung von  $\tilde{H}(z)$  führt auf eine einfache Inklusion von  $\tilde{H}(z)$ , die auch Näherungswerte an die alternierenden harmonischen Zahlen liefert. Sei dazu  $h(z) = 1/(2z) - 1/(4z^2) + 1/(8z^4)$ , dann ist

$$\log 2 - h(z) \leq \tilde{H}(z) \leq \log 2 + h(z) \quad (z > 0). \quad (1.40)$$

Definiert man zusätzlich

$$p(z) = \frac{\pi}{2} \left( \log \left( \frac{z}{2} \right) + \frac{1}{2z} \right) + \frac{1}{2z^2} \left( \log 2 + \frac{\pi}{24} - \frac{1}{4} \right),$$

so kann man folgende Inklusion der logarithmischen Ableitung der schwingenden Fakultät angeben

$$\log 2 - p(z) \leq \frac{z!'}{z!} \leq \log 2 + p(z) \quad (z > 3/2). \quad (1.41)$$

Die Beweise von (1.40) und (1.41) verlegen wir in die Übungen.

Abbildung 2 zeigt  $\tilde{H}(z)$ , die Funktion  $z!'/z!$  sowie die Schranken  $\log 2 \mp p(z)$ . Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, liegen in den Schnittpunkten von  $z!'/z!$  und  $\tilde{H}(z)$  genau die alternierenden harmonischen Zahlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n'	1	1	2	6	12	60	120	840	1680	15120	30240

Tabelle 2 – Die eratosthenische Fakultät

### 1.13 DIE ERATOSTHENISCHE FAKULTÄT.

Zu einer Folge ganzer Zahlen  $f$  definieren wir die  $k$ -te *eratosthenische Ableitung*  $f^{(k)}$  rekursiv wie folgt.  $f^{(0)} = f$  und für  $k > 0$  sei  $p_k$  die  $k$ -te Primzahl, dann entsteht  $f^{(k)}$  aus  $f^{(k-1)}$  indem man alle Terme der Folge  $f^{(k-1)}$ , die Vielfache von  $p_k$  sind, durch  $p_k$  ersetzt. Offensichtlich ist das eine Variante des *Siebs des Eratosthenes*.

Ist  $f$  die Folge der positiven ganzen Zahlen, so ist die Folge der partiellen Produkte von  $f^{(k)}$  eine Verallgemeinerung der Fakultät, die wir eratosthenische Fakultät der Stufe  $k$  nennen. Ist  $k = 1$  so sprechen wir einfach von der *eratosthenischen Fakultät* und bezeichnen sie mit  $n'$ . Per Konvention ergänzen wir  $0' = 1$ . In dieser Arbeit werden wir nur den Fall  $k = 1$  behandeln.

Betrachten wir nun die Funktion  $\sqrt{z|z|}$ , wobei  $\sqrt{z}$  den Hauptzweig der Quadratwurzel bezeichnet, für komplexes  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ . Auch diese Funktion wollen wir – verallgemeinerte – eratosthenische Fakultät nennen. Dieser Sprachgebrauch wird gerechtfertigt durch die Identität

$$n' = \sqrt{n!n!} \quad (n \geq 0). \quad (1.42)$$

Beweisen wir Gleichung (1.42). Sie ist richtig für  $n = 0$ . Für  $n > 0$  ist das Produkt  $p(n)$  der ersten  $n$  Zahlen, nachdem alle Vielfachen der 2 durch 2 ersetzt wurden,

$$p(n) = \frac{n!}{[n/2]}.$$

Auf der einen Seite ist dies nach der Definition von  $n'$  und der Identität von Legendre gleichbedeutend mit

$$n' = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{n - [n \text{ even}]}{2} \right)! . \quad (1.43)$$

Auf der anderen Seite hatten wir bereits die Darstellung (1.7) hergeleitet

$$x!x\lambda = \left(\frac{2^x}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \frac{\Gamma(x/2 + 1/2)^{\cos x\pi + 1}}{\Gamma(x/2 + 1)^{\cos x\pi - 1}}$$

Betrachten wir diese Formel für ein ganzzahliges  $n > 0$ , so können wir sie vereinfachen zu

$$n!n\lambda = \left(\frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1 + [n \text{ odd}])\right)\right)^2 \quad (1.44)$$

$$= \frac{4^n}{\pi} \left(\frac{n - [n \text{ even}]}{2}\right)!^2 \quad (1.45)$$

Aus (1.43) und (1.45) folgt die Behauptung (1.42).

#### 1.14 MEHR ZUR ERATOSTHENISCHEN FAKULTÄT.

Da wir  $n\lambda = n'^2/n!$  schreiben können gibt es *zwei* grundlegende Beziehungen für die Primexponenten der schwingenden Fakultät

$$\ell_p(n\lambda) = \ell_p(n!) - 2\ell_p([n/2]!) \quad \text{und} \quad \ell_p(n\lambda) = 2\ell_p(n') - \ell_p(n!).$$

Der Umstand, dass  $n\lambda$  die Fakultät  $n!$  teilt, und zwar zu einer Quadratzahl, führt mit (1.42) auf die Proportion

$$\frac{n!}{n'} = \frac{n'}{n\lambda}.$$

Eine Folgerung aus (1.43) und (1.37) ist

$$\frac{n!n'}{n'^2} = (H_n - \gamma) \tilde{H}_n. \quad (1.46)$$

Unmittelbar aus der Definition der erasthenischen Fakultät folgt eine Rekursionsgleichung. Mit dem Startwert  $0' = 1$  ist

$$n' = 2^{[n \text{ even}]} n^{[n \text{ odd}]} (n-1)' \quad (n \geq 1). \quad (1.47)$$

Es bezeichne  $x' = \sqrt{|x!x\lambda|}$  die *reelle* erasthenische Fakultät. Dann ist

$$x' = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} |\Gamma(x/2 + 1/2)|^{(1+\cos(\pi x))/2} |\Gamma(x/2 + 1)|^{(1-\cos(\pi x))/2}.$$

$x'$  nimmt auch an den negativen ganzen Zahlen endliche Werte an, sofern man die Definition durch Hinzunahme der Grenzwerte ergänzt. In der Tat ist dann

$$n'(-n)' = [n \text{ even}] + n[n \text{ odd}]/2 \quad (n \in \mathbb{N}_0). \quad (1.48)$$

Dies ist offenbar ein *diskreter Ergänzungssatz* (Reflexionsgesetz).

Dem Leser überlassen wir das Vergnügen, die exponentiell erzeugende Funktion der erastosthenischen Fakultät zu identifizieren als

$$n' = n! [z^n] (1+z) \exp(z^2). \quad (1.49)$$

Zur effizienten Berechnung von  $n'$  werden wir in Kapitel 4 noch einen Hinweis geben (4.4). Auf die kombinatorische Interpretation der erastosthenischen Fakultät werden wir in Kapitel 9 eingehen (11.5). Man beachte auch die Übungsaufgaben (B.7) und (B.8).

#### 1.15 EINE DARSTELLUNG MIT STIRLING-ZAHLEN.

Die steigende Fakultät  $x^{\bar{0}} = 1$  und  $x^{\bar{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)$  für  $n > 0$  lässt sich bekanntlich mit Hilfe der vorzeichenlosen stirlingschen Zyklenzahlen  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  (siehe [31, 6.8 und 6.11]) darstellen als

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (n \geq 0). \quad (1.50)$$

Da die erastosthenische Fakultät geschrieben werden kann als

$$n' = \frac{n!}{[n/2]!} = [n/2] \overline{[n/2]} \quad (n \geq 0), \quad (1.51)$$

folgt mit  $a = [n/2 + 1/2]$  und  $b = [n/2 + 1/2]$

$$n' = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} = \sum_{k=0}^b \begin{bmatrix} b \\ k \end{bmatrix} a^k \quad (n \geq 0). \quad (1.52)$$

Damit wird aus  $n! n! = (n')^2$

$$n! n! = \left( \sum_{k=0}^b \begin{bmatrix} b \\ k \end{bmatrix} a^k \right)^2. \quad (1.53)$$

Ähnlich findet man die Darstellung der schwingenden Fakultät

$$n! = \left( \sum_{k=0}^b \binom{b}{k} a^{k+[n \text{ odd}]} \right) / \left( \sum_{k=0}^b \binom{b}{k} \right) \quad (n \geq 0). \quad (1.54)$$

Diese folgt aus (1.53) und  $n! = b! \sum_{k=0}^b \binom{b}{k} a^{k-[n \text{ odd}]}$ .

Beispielsweise ist für  $n = 7$

$$7! = \frac{0 \cdot 4^1 + 6 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4^3 + 6 \cdot 4^4 + 1 \cdot 4^5}{0 + 6 + 11 + 6 + 1} = \frac{3360}{24}.$$

### 1.16 SCHWINGENDE REIHEN.

*Schwingende Reihen* sind definiert als Reihen vom Typ

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

Sie finden Anwendung als eine Methode zur Konvergenzbeschleunigung, zum Beispiel bei der Berechnung von Werten der Zetafunktion. Als erster hat wohl A. A. Markoff 1890 diese Methode benützt [60]. Man vergleiche auch die Arbeit von K. Knopp und I. Schur [38]. Doch schon Euler verwendete schwingende Reihen, so 1738 zur Berechnung von  $\pi^4$ .

Wir geben zur Illustration nur die beiden berühmtesten Beispiele an.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}, \quad \text{mit } a_n = \frac{[n \text{ even}]}{n^2}. \quad (1.55)$$

Diese Reihendarstellung für  $\zeta(2)$  hat Eugène Catalań [13] 1868 angegeben als er die allgemeinere Funktion  $\zeta(2, a) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+a)^{-2}$  untersuchte. (1.55) lässt sich auch schreiben

$$12 = \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} \cdots}{\frac{1}{4 \cdot 2} + \frac{1}{16 \cdot 6} + \frac{1}{36 \cdot 20} + \frac{1}{64 \cdot 70} + \cdots}. \quad (1.56)$$

Die Reihe mit der Roger Apéry 1978 die Irrationalität von  $\zeta(3)$  bewiesen hat war auch eine schwingende Reihe. In analoger Darstellung

---

```

Zeta2(n)      // n ist Anzahl der zu summierenden Terme

q ← 0; s ← 0; w ← 1; v ← 4;
for k from 2 by 2 to 2n do
  w ← wv/k      // schwingende Fakultät
  q ← q + v     // Reihenterm
  v ← v + 8     // Hilfsgrösse
  s ← s + 1/(wq) // Summe
end_for

return 12s

```

---

Algo. 1 – Berechnung von  $\zeta(2)$  als schwingende Reihe

schreibt sie sich

$$20 = \frac{1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \frac{1}{216} + \frac{1}{343} + \frac{1}{512} + \frac{1}{729} \cdots}{\frac{1}{8} \frac{1}{2} - \frac{1}{64} \frac{1}{6} + \frac{1}{216} \frac{1}{20} - \frac{1}{512} \frac{1}{70} + \cdots}. \quad (1.57)$$

Ganze Zahlen so zu schreiben hat offenbar etwas Irrationales an sich, und wir können froh sein, dass die Mathematiker das jetzt auch beweisen können. . .

Listing [1.16] zeigt die Implementierung von Formel (1.55). Sie demonstriert wie mächtig dieses Verfahren zur Konvergenzbeschleunigung ist. 16 Terme der schwingenden Reihe liefern 11,5 exakte Dezimalstellen. Zum Vergleich: 16000 Terme der definierenden Reihe erbringen gerade mal 4,5 exakte Dezimalstellen.

### 1.17 VERALLGEMEINERTE FAKULTÄT.

Wir wollen noch die schwingende Fakultät als den Spezialfall eines allgemeineren Konzeptes identifizieren. Das machen wir, indem wir sie mit einer elementaren Zerlegung des Einheitskreises im Komplexen assoziieren, mit den *Einheitswurzeln*, also den Lösungen der Kreisteilungsgleichung  $z^n = 1$ . Dazu definieren wir die schwingende Fakultät zum Index  $n > 0$

$$S_n(z) = \Gamma(z+1) \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+k}{n} + \frac{1}{n}\right)^{\exp(2\pi i(z+k)/n) - 1}. \quad (1.58)$$

Oftmals betrachten wir nur reelle Exponenten, statt  $\exp(2\pi i(z+k)/n)$  also  $\Re \exp(2\pi i(z+k)/n)$ , ohne dass wir dabei eine notationelle Unterscheidung machen, *par abuse de language*. Als Erstes sehen wir, dass

$$z! = \mathcal{S}_2(z) = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\Re \exp(\pi i z)} \Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)^{\Re \exp(\pi i(z+1))}$$

Dies folgt aus  $\Re \exp(\pi i z) = \cos \pi z$  und  $\Re \exp(\pi i(z+1)) = -\cos \pi z$  sowie aus  $\Gamma(z/2 + 1/2)\Gamma(z/2 + 1) = 2^{-z}\Gamma(1/2)\Gamma(z+1)$ .

Schreiben wir noch den Fall  $n = 3$  mit reellen Exponenten an.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3(z) &= 3^z \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{z}{3} + \frac{1}{3}\right)^{\cos(z\pi/3)} \\ &\quad \times \Gamma\left(\frac{z}{3} + \frac{2}{3}\right)^{\cos((z+1)\pi/3)} \Gamma\left(\frac{z}{3} + 1\right)^{\cos((z+2)\pi/3)} \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{S}_1(n) = n!$  für ganzzahliges  $n \geq 0$  ist, kann man die schwingende Fakultät in ihrer allgemeinen Form (1.58) auch als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Fakultät auffassen.

Die Funktionen  $\mathcal{S}_n(z)$  erinnern in ihrer Struktur an die Multiplikationsformel der Gammafunktion. Während aber die Gaußsche Formel ein Produkt von Werten der Gammafunktion ist, wird hier die Sicht von Wallis eingenommen, die ein *Produkt von Quotienten* betrachtet,

$$\Gamma((z+k+1)/n)^{\alpha_k} / \Gamma((z+k+1)/n),$$

wobei die Summe der Exponenten  $\sum \alpha_k = 0$  ist.

Vielleicht hätte John Wallis, dessen berühmte Formel unsere Überlegungen eingeleitet hat, Gefallen gefunden an der Darstellung (1.58), die ja auch seine Formel für  $\pi$  in der Form  $\pi = 2/\mathcal{S}_2(1/2)^2$  enthält.

## 2.1 ASYMPTOTIK DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.

Eine asymptotische Entwicklung für die schwingende Fakultät zu finden bedeutet eine Entwicklung für einen Quotienten von nahe beieinanderliegenden Werten der Gammafunktion zu finden. Dazu könnte man deren stirlingsche Entwicklungen dividieren, effizientere Formeln erhält man, wenn man von folgendem Satz ausgeht.

**Satz 3** *Mit einem reellen  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , gilt*

$$x^{1-2\alpha} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}(\alpha)}{(2k)!} \frac{(1-2\alpha)^{2k}}{x^{2k}} + O(x^{-2n}). \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnet  $x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1)$  die steigende Fakultät (wobei  $x^{\overline{0}} = 1$ ). Die  $b_{2k}(x)$  sind spezielle (nicht Standard) Bernoulli-Polynome, die rekursiv definiert sind als  $b_0(x) = 1$  und für  $n \geq 1$  durch

$$b_{2n}(x) = -2x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k+1} \frac{B_{2k+2}}{2k+2} b_{2n-2k-2}(x)$$

$B_k$  sind die Bernoulli-Zahlen [1, (23.1.2)].

*Beweis:* Der Satz ist ein Spezialfall einer asymptotischen Entwicklung von Quotienten der Form  $\Gamma(x+\alpha)/\Gamma(x+\beta)$ , die J. L. Fields [27] angegeben hat und dessen Beweis auch ausführlich in [52, S. 34] dargestellt wird. Zum Zusammenhang von  $b_{2n}(x)$  mit den (verallgemeinerten) Bernoulli-Polynomen verweisen wir auch auf [66].  $\diamond$

Nun bemerken wir, dass mit der Definition

$$G(x) = \left(\frac{x}{8}\right)^{1/2} \frac{\Gamma(x/8+1/4)}{\Gamma(x/8+3/4)} \quad (2.2)$$

und der Identität

$$\frac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)} = \frac{G(8x+2)}{(x+1/4)^{1/2}}$$

sich die schwingende Fakultät auch schreiben lässt

$$\chi_l = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \frac{G(4x+2)^{\cos(x\pi)}}{(x/2+1/4)^{\cos(x\pi)/2}}. \quad (2.3)$$

Aus (2.1) gewinnen wir mit  $\alpha = 1/4$  eine einfache *gerade* und *einhängende* asymptotische Reihe für  $G(x)$ . Unter einer einhängenden asymptotischen Reihe verstehen wir dabei, dass unter der Voraussetzung, dass  $x$  reell und positiv ist, die restlichen Terme der Entwicklung beschränkt sind durch den Betrag des ersten nicht berücksichtigten Terms, der Fehler das selbe Vorzeichen hat wie dieser, und das Vorzeichen alterniert.

Wenden wir auf diese den Logarithmus an und expandieren, so folgt

$$\ln G(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^4} - \frac{976}{3x^6} + \frac{22160}{x^8} - \frac{12933376}{5x^{10}} + O(x^{-12}). \quad (2.4)$$

Entwickeln wir nun in

$$G(x)^c = \exp(c \ln G(x)) = \exp(-c/x^2 + 10c/x^4 - \dots)$$

die Exponentialfunktion, so erhalten wir

$$G(x)^c = 1 - \frac{c}{x^2} + \frac{20c + c^2}{2x^4} - \frac{1952c + 60c^2 + c^3}{6x^6} + O(x^{-8}).$$

Setzen wir dies in (2.3) ein, dann gewinnen wir eine *asymptotische Entwicklung* der schwingenden Fakultät, wobei  $\chi = 4x + 2$  und  $c = \cos x\pi$  gesetzt ist.

$$\chi_l = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{8}{\chi} \right)^{\frac{x}{2}} \left( 1 - c \left( \frac{1}{x^2} - \frac{20+c}{2\chi^4} + \frac{1952+60c+c^2}{6\chi^6} - \dots \right) \right) \quad (2.5)$$

Wir heben die einfache Näherung hervor, die sich ergibt, wenn man in (2.5) den dritten Faktor gleich 1 setzt.

$$\chi_l = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)^{-\cos(x\pi)/2} + O(x^{-2}) \quad (2.6)$$

Einhängende Schranken für  $\chi_l$  findet man, wenn man die Funktionen

$$b_\alpha(x) = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{x}{2} + \frac{\alpha}{4} \right)^{-\cos(\pi x)/2} \quad (2.7)$$

für die Parameter  $\alpha \in \{-1, 1, 3\}$  betrachtet.  $x!$  liegt für reelles  $x \geq 1$  stets zwischen  $b_{-1}(x)$  und  $b_3(x)$ . Dabei wechselt die Eigenschaft, obere oder untere Schranke zu sein, jeweils an den ganzzahligen Punkten  $n/2$ .  $b_1(x)$  hatten wir in (2.6) als eine  $O(x^{-2})$  Näherung an  $x!$  erkannt.

2.2 DIE LOGARITHMISCHE FORM.

Geben wir nun die logarithmische Form der asymptotischen Entwicklung an. Mit  $\chi = 4x + 2$  ist

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{\Gamma(x/2 + 1/2)}{\Gamma(x/2 + 1)} \right) &= \ln G(\chi) - \ln(\chi/8)/2 \\ &= -\frac{1}{2} \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{24x^3} - \frac{1}{20x^5} - \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\ln x! = x \ln 2 - \frac{\ln \pi}{2} - \frac{\cos \pi x}{2} \left( \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \varphi(x) \right) \tag{2.8}$$

wobei

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{5x^4} - \frac{17}{28x^6} + \frac{31}{9x^8} - O(x^{-10}).$$

Diese asymptotische Entwicklung von  $\ln x!$ , die aufgefasst werden kann als Gegenstück zu Stirlings asymptotischer Entwicklung von  $\ln x!$ , leistet ähnlich wie diese bei der näherungsweise numerischen Bestimmung von  $x!$  für großes  $x$  gute Dienste. Wenn  $x > 0$  und reell ist, dann liegt der wahre Wert von  $\ln x!$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerten der Entwicklung, was sich aus der einhüllenden asymptotischen Reihe von  $\ln G(x)$  ergibt.

Eine weitere Darstellung von  $\ln x!$  gewinnt man mit der Hurwitz-Zetafunktion  $\zeta(s, x)$ . Wenn man mit  $\zeta'(s, x)$  die Ableitung von  $\zeta(s, x)$  nach  $s$  bezeichnet und  $\zeta'_0(x) = \zeta'(0, x)$  setzt, dann gilt

$$\ln x! = x \ln 2 - \frac{\ln \pi}{2} - \cos(x\pi) \left( \zeta'_0 \left( \frac{x}{2} + 1 \right) - \zeta'_0 \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right). \tag{2.9}$$

Zum Beweis muss man nur die bekannte Formel von Lerch [50] anwenden,  $\log \Gamma(x) = \zeta'_0(x) - \zeta'_0(1)$ . Als Nebenergebnis erhält man so die

asymptotische Entwicklung, gültig für  $x > 1/2$

$$\zeta'_0(x+1) - \zeta'_0\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8x} - \frac{1}{192x^3} + \frac{1}{640x^5} - O(x^{-7}).$$

### 2.3 EINE TASCHENRECHNERFORMEL FÜR $\binom{2n}{n}$ .

Zur Illustration der Effizienz der asymptotischen Entwicklung von  $n!$  wählen wir in (2.5)  $x = 2n$  und erhalten mit  $N = 8n + 2$

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{(n+1/4)\pi}} \left(1 - \frac{1}{N^2} + \frac{21}{2N^4} - \frac{671}{2N^6} + \frac{180323}{8N^8} - O\left(\frac{1}{N^{10}}\right)\right).$$

Diese Formel lässt sich noch vereinfachen zu einer attraktiven *Taschenrechnerformel* mit ganzzahligen Koeffizienten, in dem wir  $180323/4$  durch  $180324/4$  ersetzen.

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{N\pi/2}} \left(2 - \frac{2}{N^2} + \frac{21}{N^4} - \frac{671}{N^6} + \frac{45081}{N^8}\right). \quad (2.10)$$

Zum Vergleich: Nach [44] besitzt der zentrale Binomialkoeffizient folgende asymptotische Entwicklung:

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{1024n^3} - \frac{21}{32768n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) \quad (2.11)$$

Bei etwa gleichem rechnerischen Aufwand liefert (2.10) ein deutlich besseres Ergebnis als (2.11). Für  $n = 10$  beispielsweise ergeben sich die Werte

$$184756,0028 \dots \quad \text{mit (2.11),}$$

$$184756,000000034 \dots \quad \text{mit (2.10).}$$

### 2.4 FAKTORIELLE SCHRANKEN VON $n!$ .

Sei  $r$  die Nullstelle von  $(x/2 - 1/2)! - (x/2)!$  in  $\mathbb{R}^+$ . (Kurioserweise haben die Punkte  $(r, r!)$  und  $(1/\ln 2, e/\sqrt{\pi})$  einen euklidischen Abstand kleiner 0.0005.) Dann gilt:

$$\left(\frac{x}{2}\right)!^{-2} \leq \frac{x!}{x!} \leq \left(\frac{x-1}{2}\right)!^{-2} \quad (x \geq r) \quad (2.12)$$

Auch für  $x \in (-1, r]$  bleibt die Inklusion bestehen, allerdings dreht sich dann die Ordnung um. Zum Beweis betrachten wir mit  $\alpha = 1 - \cos x\pi$  und  $\beta = -1 - \cos x\pi$

$$\left( \frac{2^x (x/2)!^2}{\sqrt{\pi x!}} \right)^\alpha \frac{x!}{(x/2)!^2} = x! = \frac{x!}{(x/2 - 1/2)!^2} \left( \frac{2^x (x/2)!^2}{\sqrt{\pi x!}} \right)^\beta$$

Dies folgt aus (1.10) mit  $\Gamma(x/2 + 1/2) = (x!/(x/2)!)(\sqrt{\pi}/2^x)$ . Sei nun  $x \geq r$ . Dann ist der ganz links stehende Faktor  $\geq 1$ , weil die Basis  $\geq 1$  ist und der Exponent  $\alpha \geq 0$  ist. Der ganz rechts stehende Faktor ist  $\leq 1$ , da der Exponent  $\beta \leq 0$  ist. Damit können wir diese Faktoren weglassen, sofern wir „ $=$ “ durch „ $\leq$ “ ersetzen. Die Behauptung ist so für  $x \geq r$  bewiesen, der Fall  $x \leq r$  lässt sich ähnlich behandeln.

## 2.5 SCHRANKEN VON $n!$ UND $\log(n!)$ .

**Lemma 4** Mit der Bezeichnung  $s(x) = \frac{1}{2} \ln(x + 1/4) + (8x + 2)^{-2}$  gilt

$$s(x) - \frac{10}{(8x + 2)^4} < \ln \left( \frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(x + 1/2)} \right) < s(x) \quad (x > -1/2). \quad (2.13)$$

*Beweis:* Da  $\Gamma(x + 1)/\Gamma(x + 1/2) = \sqrt{x + 1/4}/G(8x + 2)$  wobei  $G(x)$  in (2.2) definiert wurde und  $\ln G(x)$  die asymptotische Entwicklung (2.4) besitzt, folgt

$$\ln \left( \frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(x + 1/2)} \right) = s(x) + O(x^{-4}).$$

Der Fehler fällt positiv aus, und da die asymptotische Entwicklung (2.4) einhüllend ist, gilt die obere Schranke in (2.13). Nimmt man in der Entwicklung einen weiteren Term hinzu, so erhält man die untere Schranke.

**Satz 5** Mit der Bezeichnung  $b(x) = \sqrt{x/2 + 1/4} \exp((4x + 2)^{-2})$  ist

$$b^{-1}(x) < \sqrt{\pi} \frac{x!}{2^x} < b(x) \quad (x \geq 3/2). \quad (2.14)$$

Weiter gilt für  $x \geq 3/2$  die Schranke

$$|\ln x! - x \ln 2| \leq \frac{1}{2} \ln(2x + 1) + \frac{1}{2} \ln(\pi/4) + (4x + 2)^{-2}. \quad (2.15)$$

*Beweis:* Wendet man das Lemma in seine exponentielle Form so erhält man aus  $\sqrt{\pi} \frac{x!}{2^x} \leq \frac{\Gamma(x/2+1)}{\Gamma(x/2+1/2)}$  und  $b(x) = \exp(s(x/2))$  die obere Schranke und damit aus  $b^{-1}(x) < \frac{\Gamma(x/2+1/2)}{\Gamma(x/2+1)} \leq \sqrt{\pi} \frac{x!}{2^x}$  die untere Schranke. Die Abschätzung (2.15) folgt direkt aus (2.13), denn sie ist gleichbedeutend mit  $|\ln x! - x \ln 2| \leq s(x/2) + \ln(\sqrt{\pi})$ .

**Folgerung 6** *Es gilt die Inklusion*

$$\left(\frac{2}{x+1}\right)^{1/2} < \sqrt{\pi} \frac{x!}{2^x} < \left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/2} \quad (x \geq 3/2) \quad (2.16)$$

und die Schranke

$$|\ln x! - x \ln 2| \leq \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(\pi/2) \quad (x \geq 2). \quad (2.17)$$

*Beweis:* Die Inklusion (2.16) folgt aus (2.14) und  $b(x) < \sqrt{x/2+1/2}$ , was eine Konsequenz ist von

$$\exp((4x+2)^{-2}) < (x/2+1/2)^{1/2} / (x/2+1/4)^{1/2} \quad (x \geq 0).$$

Die Abschätzung (2.15) vereinfacht sich zu (2.17), wobei die rechte Seite von (2.15) sich um den Wert  $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2x+2}{2x+1}\right) - (4x+2)^{-2} > 0$  vergrößert.

## 2.6 DIE ALTERNIERENDE LOGARITHMISCHE SUMME.

Mit der Schreibweise  $\lg x$  für  $\log_2 x$  wollen jetzt  $\lg n!$  als *summatorische Funktion* interpretieren. Denn setzen wir

$$\lambda(n) = 1 + (-1)^n (1 - \lg n),$$

so können wir  $\lg n! = \sum_{1 \leq k \leq n} \lambda(k)$  schreiben, was man leicht sieht, wenn man  $\lg n! - \lg(n-1)!$  betrachtet. Mit anderen Worten, wir können die Logarithmen der ersten  $n$  Zahlen mit Hilfe der schwingenden Fakultät alternierend summieren, denn die letzte Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k+1} \lg k = \lg n! - n + [n \text{ odd}]. \quad (2.18)$$

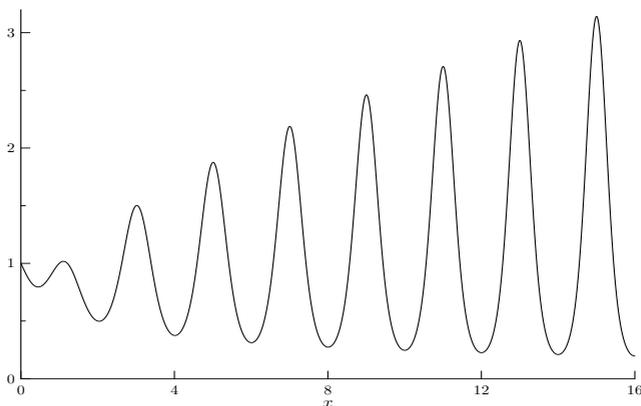


Abbildung 3 – Die alternierende Fakultät

$n$	$\alpha(n)$	$n$	$\alpha(n)$	$n$	$\alpha(n)$
$10^3$	5,3090009	$10^9$	15,274424	$10^{15}$	25,240209
$10^4$	6,9696403	$10^{10}$	16,935389	$10^{16}$	26,901173
$10^5$	8,6305719	$10^{11}$	18,596353	$10^{17}$	28,562137
$10^6$	10,291533	$10^{12}$	20,257317	$10^{18}$	30,223101
$10^7$	11,952496	$10^{13}$	21,918281	$10^{19}$	31,884065
$10^8$	13,613460	$10^{14}$	23,579245	$10^{20}$	33,545029

Tabelle 3 –  $\alpha(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \log_2(k)$ .

Tabelle 3 führt einige Werte der alternierenden Summe des binären Logarithmus auf. Mit der Bezeichnung  $\gamma(n) = n!/2^n$  ist  $\lg n! = n + \lg \gamma(n)$  und so vereinfacht sich die rechte Seite der Gleichung zu  $\lg \gamma(n) + [n \text{ odd}]$ . Allgemein interpoliert  $\alpha(x) = \lg \gamma(x) + (1 - \cos(x\pi))/2$  die betrachtete Summe. Übersetzen wir diese Aussage zurück in die multiplikative Sprechweise, so erhalten wir die *alternierende Fakultät*.

$$1 \frac{1}{2} 3 \frac{1}{4} 5 \frac{1}{6} 7 \dots n^{(-1)^{(n+1)}} = \frac{n!}{2^n} 2^{(1-\cos(n\pi))/2} \tag{2.19}$$

Bemerkenswert ist, dass die rechte Seite der Gleichung nun für beliebige komplexe Werte von  $n$  definiert ist (vgl. Abbildung 3). Mit der Integraldarstellung von  $n!$  (1.21) können wir auch schreiben

$$\prod_{k=1}^n k^{(-1)^k} = n^{[n \text{ even}]} \int_0^1 (\sqrt{1-t^2})^{n-1-[n \text{ even}]} dt. \tag{2.20}$$

Die asymptotische Entwicklung der schwingenden Fakultät liefert

$$\sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \ln k = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} + \frac{\cos \pi n}{2} (\ln n + \varphi(n)) , \quad (2.21)$$

wobei

$$\varphi(n) = \frac{n^{-1}}{2} - \frac{n^{-3}}{12} + \frac{n^{-5}}{10} - \frac{17n^{-7}}{56} + O(n^{-9}).$$

## 2.7 BERNOULLI-FUNKTION UND $\chi$ .

In diesem Abschnitt wollen wir eine Beziehung zwischen der Zetafunktion und der schwingenden Fakultät betrachten. Dabei verwenden wir die Bezeichnung  $\mathfrak{B}_n(x)$  für die Bernoulli-Polynome [1, 23.1.1] und  $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}_n(1)$  für die Bernoulli-Zahlen.

Weiter sei  $\mathcal{B}(s) = \mathcal{B}(s, 1)$  die *Bernoulli-Funktion*, welche definiert ist als der Spezialfall  $x = 1$  der allgemeinen Bernoulli-Funktion

$$\mathcal{B}(s, x) = -s\zeta(1-s, x) \quad (s \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, x \notin \{0, -1, -2, \dots\}) .$$

Hier ist  $\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s}$  die Hurwitz-Zetafunktion. Wo notwendig verstehen wir die Definition von  $\mathcal{B}(s, x)$  durch Grenzwerte ergänzt, etwa  $\mathcal{B}(0, x) = 1$  für reelles  $x > 0$ .

Ausgangspunkt ist nun die bekannte Formel

$$\frac{\mathfrak{B}_{2n}}{\binom{2n}{n}} = -(-1)^n \int_0^1 \mathfrak{B}_n^2(x) dx . \quad (2.22)$$

Diese Formel wollen wir verallgemeinern zu

$$\frac{\mathcal{B}(s)}{s!} = -g\left(\frac{s}{2}\right) \int_0^1 \mathcal{B}^2\left(\frac{s}{2}, x\right) dx \quad (s > 1) . \quad (2.23)$$

Dabei steht  $g(s)$  für

$$g(s) = \cos(\pi s) \left( \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s+1/2)} \right)^{\cos 2\pi s - 1} .$$

Als erstes sehen wir, dass sich für  $s = 2n$  ( $n > 0$  ganze Zahl) die Formel (2.23) auf (2.22) reduziert, denn dann gilt

$$\mathfrak{B}(2n, x) = -2n\zeta(1 - 2n, x) = \mathfrak{B}_{2n}(x) \quad (x \in [0, 1]) . \quad (2.24)$$

Diese klassische Beziehung zwischen der Bernoulli Funktion und den Bernoulli Polynomen wird zum Beispiel bei Apostol [5] hergeleitet. Weiterhin ist auf der linken Seite von (2.22) in diesem Fall  $\binom{2n}{n} = (2n)!$  und auf der rechten Seite ist  $(-1)^n = g(n)$ .

Den allgemeinen Fall sieht man so ein. Mit der riemannschen Reflexionsgleichung für  $\zeta(s)$  hat man

$$\mathfrak{B}(s) = -s\zeta(1 - s) = -\cos(s\pi/2) \frac{2\zeta(s)}{(2\pi)^s} s! \quad (2.25)$$

und wegen der Umrechnungsformel (1.13) zwischen den Fakultäten kann man das schreiben

$$\frac{\mathfrak{B}(s)}{s!} = -g\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^2\left(\frac{s}{2} + 1\right) \frac{2\zeta(s)}{(2\pi)^s} . \quad (2.26)$$

Des Weiteren gilt

$$\frac{2\zeta(s)}{(2\pi)^s} = \int_0^1 \left( \frac{\zeta(1 - s/2, x)}{\Gamma(s/2)} \right)^2 dx \quad (s > 1) .$$

Dies ist ein Spezialfall einer Formel von Mikolas [62], folgt zum Beispiel auch aus einer Formel von Espinosa und Moll [25, 3.5] mit  $z \rightarrow 1 - z/2$ . Eingesetzt in die rechte Seite von (2.26) vereinfacht sich die Formel zu unserer behaupteten Formel (2.23).

## 3.1 DARSTELLUNGEN MIT KLASSISCHEN IDENTITÄTEN.

Wir geben in diesem Abschnitt vier hypergeometrische Darstellungen der schwingenden Fakultät  $z!$  an. Zur Definition der hypergeometrischen Funktion  $F\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix} \middle| z\right)$  verweisen wir auf [4]. Weiter setzen wir in diesem Abschnitt ein reelles  $z > 0$  voraus. Für den ganzzahligen Fall  $n!$  sind in der Formelsammlung (F) die wichtigsten Identitäten tabellarisch zusammengestellt.

Ausgangspunkt ist Kummers hypergeometrische Identität in ihrer ursprünglichen Form [45, S.32] und in ihrer quadratisch transformierten Form [81, 2.3.2.1].

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)!(a/2)!}{(a/2-b)!a!} &= F\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ 1+a-b \end{smallmatrix} \middle| x\right)_{x=-1} \\ &= (1-x)^{-a} F\left(\begin{smallmatrix} a/2+1/2-b, a/2 \\ 1+a-b \end{smallmatrix} \middle| \frac{-4x}{(1-x)^2}\right)_{x=-1} \end{aligned}$$

Setzen wir hierin  $a = z$  und  $b = z/2$ , so erhalten wir

$$\frac{\Gamma^2(z/2+1)}{\Gamma(z+1)} = F\left(\begin{smallmatrix} z, z/2 \\ z/2+1 \end{smallmatrix} \middle| -1\right) = 2^{-z} F\left(\begin{smallmatrix} z/2, 1/2 \\ z/2+1 \end{smallmatrix} \middle| 1\right) \quad (3.1)$$

Jeweils eingesetzt in (1.11), liefert dies die ersten zwei hypergeometrischen Darstellungen der schwingenden Fakultät

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} F\left(\begin{smallmatrix} z, z/2 \\ z/2+1 \end{smallmatrix} \middle| -1\right) \right)^{-\cos z\pi}; \quad (3.2)$$

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} F\left(\begin{smallmatrix} z/2, 1/2 \\ z/2+1 \end{smallmatrix} \middle| 1\right) \right)^{-\cos z\pi}. \quad (3.3)$$

Auf (3.3) können wir die Formel von Clausen [45, (7.11)] anwenden und

erhalten

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\pi} F \left( \begin{matrix} z, z/2 + 1/2, 1 \\ z+1, z/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \right)^{-\cos(z\pi)/2}. \quad (3.4)$$

Des Weiteren hat Binet [7, S. 194f] im Jahr 1839 folgende Relationen angegeben, gültig für  $\operatorname{Re} z > 0$

$$\left( \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+1/2)} \right)^2 = \frac{\pi}{B^2(1/2, z+1/2)} = zF \left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ z+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \quad (3.5)$$

Hier ist  $B(z, w)$  die Betafunktion. Eingesetzt in unsere Standardformel (1.10) ergibt dies die vierte hypergeometrische Darstellung der schwingenden Fakultät

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{z}{2} F \left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ z/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \right)^{-\cos(z\pi)/2} \quad (\operatorname{Re} z > 0). \quad (3.6)$$

Mit (2.5) gewinnen wir daraus die asymptotische Darstellung

$$\ln F \left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ x/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^3} + \frac{1}{10x^5} - \dots \quad (x \rightarrow \infty) \quad (3.7)$$

### 3.2 EINE HYPERGEOMETRISCHE IDENTITÄT.

Vergleicht man (3.4) mit (3.6), so erhält man

$$\frac{1}{\pi} F \left( \begin{matrix} 2z, z+1/2, 1 \\ 2z+1, z+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) = zF \left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ z+1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \quad (z > 0). \quad (3.8)$$

Ist  $z > 0$  eine ganze Zahl, so gibt der Algorithmus von Zeilberger (z.B. [45, S.93]) einen kurzen Beweis für diese Identität. Einzelnen angewandt auf die linke und rechte Seite liefert er beide Male die holonomische Rekursionsgleichung

$$4(z+1)^2 s(z) - (2z+1)^2 s(z+1) = 0.$$

Der gemeinsame Anfangswert ist direkt nachzuprüfen. Für die linke Seite gilt:

$$s(1) = \frac{1}{\pi} F \left( \begin{matrix} 2, 3/2, 1 \\ 3, 2 \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1/2)!}{(1/2)!(k+2)!} = \frac{4}{\pi}$$

Und für die rechte Seite gilt:

$$s(1) = F\left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 2 \end{matrix} \middle| 1\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!^2}{(k!2^k)^4(k+1)} = \frac{4}{\pi}$$

Letzteres ist eine wohlbekannte Darstellung von  $\pi$  (siehe z.B. [12]).

### 3.3 DIE SCHWINGENDEN LEGENDRE-POLYNOME.

Eine Darstellung der ganzzahligen schwingenden Fakultät als alternierende binomische Summe gibt der nächste Satz. Dazu definieren wir zuerst die *schwingenden Legendre-Polynome* als

$$Q_n(x) = (1+x)^n P_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

wobei  $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left( (x^2 - 1)^n \right) / (2^n n!)$  die Legendre-Polynome sind.

**Satz 7** Die schwingenden Legendre-Polynome haben die Darstellung

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 x^k. \quad (3.9)$$

Als Spezialfall erhalten wir eine Summendarstellung der schwingenden Fakultät

$$(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} n! = \begin{cases} Q_n(1) & (n \text{ even}); \\ nQ_{n-1}(1) & (n \text{ odd}). \end{cases}$$

*Beweis.* Aus der bekannten Rekursionsgleichung der Legendre-Polynome [45, S.2] folgt die Rekursionsgleichung für die schwingenden Legendre-Polynome

$$(n+2)Q_{n+2}(x) + (x-1)(2n+3)Q_{n+1}(x) + (x+1)^2(n+1)Q_n(x) = 0 \quad (3.10)$$

mit den Anfangswerten  $Q_0(x) = 1$  und  $Q_1(x) = 1 - x$ .

Die angegebene binomische Summe genügt ebenfalls dieser Rekursionsgleichung, was man etwa mit dem Algorithmus von D. Zeilberger

bestätigt (vgl. dazu [79] und [45]). Diese Routineprüfung delegieren wir an ein Mathematikprogramm. Die Anfangswerte sind klar.

Zum Spezialfall. Für  $x = 1$  vereinfacht sich die Rekursionsgleichung der Polynome zu  $(n+2)Q_{n+2}(1) + 4(n+1)Q_n(1) = 0$ . Auf der anderen Seite genügt  $n! = n! / [n/2]!^2$  der Rekursionsgleichung

$$q_n = 2q_{n-1} \left(\frac{2}{n}\right)^{(-1)^n} = q_{n-1} n^{[n \text{ odd}]} \left(\frac{4}{n}\right)^{[n \text{ even}]} \quad (3.11)$$

für  $n > 1$  mit dem Anfangswert  $q_1 = 1$ . Für gerades  $n$  erzeugen beide Rekursionen gleiche Werte, und für ungerades  $n$  folgt die Summendarstellung aus  $n! = n(n-1)!$ .  $\diamond$

Wir geben noch zwei weitere Darstellungen der schwingenden Legendre-Polynome an, die beide unmittelbar aus entsprechenden Darstellungen der Legendre-Polynome folgen [45, S.1].

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{-n-1}{k} x^k (x+1)^{n-k} \quad (3.12)$$

$$Q_n(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2k} \quad (3.13)$$

Zur Systematisierung der gegebenen Relationen ist es zweckmäßig, noch einen Blick auf die hypergeometrischen Darstellungen zu werfen. Wir führen nur die drei Einfachsten auf.

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= F\left(\begin{matrix} -n, -n \\ 1 \end{matrix} \middle| -x\right) = (x+1)^n F\left(\begin{matrix} -n, n+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{x}{x+1}\right) \\ &= (x+1)^{2n+1} F\left(\begin{matrix} n+1, n+1 \\ 1 \end{matrix} \middle| -x\right). \end{aligned}$$

Sie folgen aus der hypergeometrischen Darstellung der Legendre-Polynome [45, S.3], dem pfaffschen Reflexionsgesetz und der eulerschen Identität (vgl. dazu [31, S.217f]).

## 3.4 DIE DOPPELTE UND DIE UNGERADE FAKULTÄT.

Bekanntlich [46, (7.3)] besitzen die Legendre-Polynome die endliche Fourier-Reihe

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^n \frac{(1/2)^{\bar{k}} (1/2)^{\overline{n-k}}}{k! (n-k)!} e^{i(n-2k)\theta}$$

Damit folgt aus Satz 7 unmittelbar folgende binomische Summe für  $n!n!$ .

$$n!n! = 2^{n-[n \text{ odd}]} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{k}} \left(\frac{1}{2} + [n \text{ odd}]\right)^{\overline{n-k}} \quad (3.14)$$

Nun ist nach (1.42)  $n!n! = (n')^2$  und  $n'$  ist nach (1.43) das Produkt der ersten  $\lceil n/2 \rceil$  ungeraden Zahlen. Verwenden wir die spezielle Notation für die *doppelt steigende Fakultätsfunktion*

$$x^{\overline{\bar{n}}} = x(x+2)(x+4) \cdots (x+2(n-1)) \quad (n > 0, \text{ ganze Zahl}), \quad (3.15)$$

und setzen  $x^{\overline{\bar{0}}} = 1$ , so können wir mit Hilfe der *ungeraden Fakultät*  $1^{\overline{\bar{n}}}$  einprägsamer schreiben

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 1^{\bar{k}} 1^{\overline{\overline{2n-k}}} = \left(2^n 1^{\overline{\bar{n}}}\right)^2. \quad (3.16)$$

## 3.5 EINE ALTE UND EINE NEUE SUMME.

Helmut Prodinger gab in *Knuth's old sum - a survey* ([70], vgl. [40]) einen Überblick über Methoden, die Identität von *Reed-Dawson*

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} = [n \text{ even}] n! \quad (3.17)$$

zu beweisen. Von dieser Gleichung wollen wir folgende *Verallgemeinerung* zeigen

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} \binom{n-k+2}{2} = n!. \quad (3.18)$$

Ist  $n$  gerade, besagt ein Vergleich der Formeln, dass wir den Faktor  $(n - k + 2)/2$  bei den Summanden weglassen können, ohne dadurch die Summe zu verändern. Ist dagegen  $n$  ungerade, so sehen wir, dass die ‚alte Summe‘ (3.17) zusammenbricht während die ‚neue Summe‘ (3.18) nach wie vor  $n!$  berechnet.

Betrachten wir dazu mit den Anfangswerten  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  das Rekursionsschema

$$R_n = 4 \frac{(1 - 2n)R_{n-1} + (n-1)(n-2)(n+2)R_{n-2}}{n(n+1)(n-3)} \quad (n \geq 4) \quad (3.19)$$

Zeilbergers Algorithmus (hier in der Implementierung *sumrecursion* von W. Koepf [45]) bestätigt, dass die linke Seite von (3.18) diese holonome Rekursionsgleichung erfüllt. Als Anfangswerte finden sich  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ ,  $R_3 = 6$ . Zu zeigen bleibt noch, dass auch die schwingende Fakultät dieser Rekursion genügt. Setzen wir  $R_n = n! = n! / \lfloor n/2 \rfloor!^2$  ein, so erhalten wir eine Rekursion für die Fakultät  $n! = \alpha_n(n-1)! + \beta_n(n-2)!$  mit

$$\alpha_n = \frac{4(1-2n) \lfloor n/2 \rfloor!^2}{n(n+1)(n-3) \lfloor (n-1)/2 \rfloor!^2} ,$$

$$\beta_n = \frac{4(n-1)(n-2)(n+2) \lfloor n/2 \rfloor!^2}{n(n+1)(n-3) \lfloor (n-2)/2 \rfloor!^2}$$

und  $n > 3$ . Da  $\alpha_n/n + \beta_n/((n-1)n) = 1$  ist, wie man leicht nachrechnet, ist diese Rekursion von  $n!$  gültig und in Folge dessen wird auch die Rekursionsgleichung (3.19) von  $n!$  erfüllt.

### 3.6 DIE VERALLGEMEINERTEN REED-DAWSON-POLYNOME.

Wir wollen noch die hypergeometrische Form der verallgemeinerten Reed-Dawson-Identität herleiten. Dazu spalten wir die Summe (3.18) im Faktor  $(n - k + 2)/2$  auf, wenden die Identität  $\binom{2k}{k} = \binom{-1/2}{k} (-4)^k$  an und erhalten

$$n! = 2^n \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{-1/2}{k} 2^k + 2^n \frac{n}{2} \sum_{k \geq 0} \binom{n-1}{k} \binom{-1/2}{k} 2^k .$$

Man sieht nun leicht, dass die erste Summe verschwindet, wenn  $n$  gerade ist, und die zweite Summe verschwindet, wenn  $n$  ungerade ist. Damit

---


$$\begin{aligned}
R_0(x) &= 1 \\
R_1(x) &= 1 \\
R_2(x) &= 4 - 8x + 6x^2 \\
R_3(x) &= 12 - 24x + 18x^2 \\
R_4(x) &= 16 - 64x + 144x^2 - 160x^3 + 70x^4 \\
R_5(x) &= 80 - 320x + 720x^2 - 800x^3 + 350x^4 \\
R_6(x) &= 64 - 384x + 1440x^2 - 3200x^3 + 4200x^4 - 3024x^5 + 924x^6
\end{aligned}$$


---

Tabelle 4 – Die Polynome  $R_n(x)$  mit  $R_n(1) = n!$ .

lässt sich die rechte Seite zusammenziehen zu

$$n! = 2^n \left(\frac{n}{2}\right)^{[n \text{ odd}]} \sum_{k \geq 0} \binom{n - [n \text{ odd}]}{k} \binom{-1/2}{k} 2^k. \quad (3.20)$$

Daraus folgt unmittelbar die hypergeometrische Darstellung

$$n! = 2^n \left(\frac{n}{2}\right)^{[n \text{ odd}]} F\left(\begin{matrix} -n + [n \text{ odd}], 1/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| 2x \right). \quad (3.21)$$

Diese Darstellung nehmen wir zum Anlass, eine Familie von Polynomen einzuführen, die *R-Polynome*

$$R_n^{(\alpha)}(x) = 2^n \left(\frac{n}{2}\right)^{[n \text{ odd}]} x^\alpha F\left(\begin{matrix} -n + [n \text{ odd}], 1/2 \\ 1 + \alpha \end{matrix} \middle| 2x \right). \quad (3.22)$$

(3.21) besagt damit  $R_n^{(0)}(1) = n!$ . Nun gilt auch  $R_n^{(1)}(1) = n!$  und

$$\int_0^1 R_n^{(0)}(x) dx = n!. \quad (3.23)$$

Denn aus der Definition der  $R_n^{(\alpha)}(x)$  folgt  $(d/dx)R_n^{(1)}(x) = R_n^{(0)}(x)$  und  $R_n^{(1)}(0) = 0$ . Daher gilt  $\int_0^1 R_n^{(0)}(x) dx = R_n^{(1)}(1)$ . Weiter ist  $R_n^{(1)}(1) = nR_{n-1}^{(1)}(1)$  falls  $n$  ungerade, und  $R_n^{(1)}(1) = 4R_{n-1}^{(1)}(1)/n$  falls  $n$  gerade ist, sowie  $R_1^{(1)}(1) = 1$ . Damit genügt  $R_n^{(1)}(1)$  den selben Rekursionsgleichungen und dem selben Anfangswert wie  $n!$ .

Anders ausgedrückt haben wir damit gezeigt, dass  $(k+1)$  den Koeffizienten von  $x^k$  des Polynoms  $R_n(x) = R_n^{(0)}(x)$  teilt.

---


$$\begin{aligned}
 S_0(x) &= 1 \\
 S_1(x) &= 2 - x \\
 S_2(x) &= 4 - 8x + 6x^2 \\
 S_3(x) &= 16 - 24x + 24x^2 - 10x^3 \\
 S_4(x) &= 16 - 64x + 144x^2 - 160x^3 + 70x^4 \\
 S_5(x) &= 96 - 240x + 480x^2 - 600x^3 + 420x^4 - 126x^5 \\
 S_6(x) &= 64 - 384x + 1440x^2 - 3200x^3 + 4200x^4 - 3024x^5 + 924x^6
 \end{aligned}$$


---

Tabelle 5 – Die Polynome  $S_n(x)$  mit  $S_n(1) = n!$ .

### 3.7 DIE SYMMETRISCHE REED-DAWSON-IDENTITÄT.

Die klassische Reed-Dawson-Identität (3.17) ist

$$[n \text{ even}]n! = \sum_{k \geq 0} (-2)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k}.$$

Unter der *schwingenden Reed-Dawson-Identität* verstehen wir

$$n! = \sum_{k \geq 0} (-2)^{n-k-[n \text{ odd}]} \binom{n+[n \text{ odd}]}{k+[n \text{ odd}]} \binom{2k}{k}. \quad (3.24)$$

Hier haben wir die linken Seite aus der Abhängigkeit von der Parität gelöst indem wir diese in die binomische Summe auf der rechten Seite eingebaut haben. Leicht verallgemeinernd betrachten wir dazu die *S-Polynome*

$$S_n(x) = 2^{n-[n \text{ odd}]} \sum_{k \geq 0} \binom{n+[n \text{ odd}]}{k+[n \text{ odd}]} \binom{2k}{k} \left(\frac{-x}{2}\right)^k, \quad (3.25)$$

oder in hypergeometrischer Schreibweise für  $n \geq 0$

$$S_n(x) = 2^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{[n \text{ odd}]} F\left(\begin{matrix} -n, 1/2 \\ 1+[n \text{ odd}] \end{matrix} \middle| 2x\right). \quad (3.26)$$

Die schwingende Reed-Dawson-Identität schreibt sich damit  $S_n(1) = n!$ . Zum Beweis betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$T(n) = \frac{4(n-1)T(n-2) + 2[n \text{ odd}]T(n-1)}{n+[n \text{ odd}]} \quad (n \geq 2)$$

mit den Anfangswerten  $T(0) = T(1) = 1$ . Man kann sich mit dem Algorithmus von D. Zeilberger leicht vergewissern, dass sowohl der mittlere Binomialkoeffizient  $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  wie auch  $2^n F(-n, 1/2; 1 + [n \text{ odd}]; 2)$  dieser Rekursion genügt. Die Behauptung folgt somit aus

$$\begin{aligned} S_n(1) &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{[n \text{ odd}]} 2^n F\left(\begin{matrix} -n, 1/2 \\ 1 + [n \text{ odd}] \end{matrix} \middle| 2\right) \\ &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{[n \text{ odd}]} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = n! \quad \diamond \end{aligned}$$

### 3.8 WEITERE HYPERGEOMETRISCHE DARSTELLUNGEN VON $n!$ .

In der Formelsammlung (F) sind 14 hypergeometrische Darstellungen der ganzzahligen schwingenden Fakultät  $n!$  zusammengestellt, von denen wir einen Großteil in den letzten Abschnitten besprochen haben.

Diese Darstellungen können teilweise auch als binomische Identitäten geschrieben werden. Als Beispiel betrachten wir die Darstellung, welche in der Tabelle mit ‚PL‘ gekennzeichnet ist.

Sei  $\eta = [n \text{ odd}]$ . Wir definieren die Polynome

$$p_n(x) = 2^{n-\eta} \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k - (n-\eta)/2 - 1}{k} \binom{k - \eta - 1/2}{k} x^k.$$

Für  $x = 1$  erhält man

$$2^{n-\eta} \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k - (n-\eta)/2 - 1}{k} \binom{k - \eta - 1/2}{k} = n! .$$

Begründet ist dies darin, dass die Polynome  $p_n(x)$  der Rekursionsgleichung genügen

$$\begin{aligned} -16(x-1)(n-2-\eta)p_{n-4}(x) + 4(x(n-1-3\eta) \\ - 2(n-1-\eta))p_{n-2}(x) + (n-\eta)p_n(x) = 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten  $p_0(x) = 1$  und  $p_1(x) = 1$ . Dies erhält man mit dem Algorithmus von Zeilberger (W. Koepf [45]). Für  $x = 1$  reduziert sich dies auf

$$p_n(1) = 4 \frac{n+\eta-1}{n-\eta} p_{n-2}(1) .$$

Dies ist der Fall da  $0! = 1$  und  $1! = 1$  sowie

$$n! = 4 \frac{n + \eta - 1}{n - \eta} (n - 2)! \quad (n \geq 2),$$

was man unmittelbar aus der Definition von  $n!$  nachrechnet.

### 3.9 KETTENBRUCHENTWICKLUNGEN VON $x!$ .

Wir geben zwei Kettenbruchentwicklungen von  $x!$  an, welche auf altbekannten hypergeometrischen Darstellungen von Quotienten von Werten der Gammafunktion und der gaußschen Kettenbruchentwicklung (vgl. [66] und [37]) von  ${}_2F_1$  Funktionen beruhen.

Dazu definieren wir  $\Upsilon(x)$  als Quotient zweier  ${}_2F_1$  Funktionen

$$\Upsilon(x) = \frac{2}{x + 1/2} \frac{F\left(\begin{matrix} 1/2, x+1 \\ x+3/2 \end{matrix} \middle| -1\right)}{F\left(\begin{matrix} 1/2, x \\ x+1/2 \end{matrix} \middle| -1\right)}. \quad (3.27)$$

Nun findet man mit [1, 15.1.21]

$$\Upsilon(x) = \left( \frac{\Gamma(x/2 + 1/2)}{\Gamma(x/2 + 1)} \right)^2. \quad (3.28)$$

Damit erhält man die Darstellung der schwingenden Fakultät

$$x! = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} \Upsilon(x)^{(\cos x\pi)/2}. \quad (3.29)$$

Der Wert dieser Darstellung liegt darin, dass man die Kettenbruchentwicklung von Gauß auf (3.27) anwenden kann. In der Tat erhält man so

$$\Upsilon(x) = \frac{2}{x + 1/2} \frac{(1/2)^2}{x + 3/2} \frac{(x + 1)^2}{x + 5/2} \frac{(3/2)^2}{x + 7/2} \frac{(x + 2)^2}{x + 9/2} \dots \quad (3.30)$$

Dies ist eine konvergente Darstellung, welche, wie W. D. Smith [83] bemerkte, *exponentiell konvergiert für jeden komplexen Wert von  $x$* .

Für den Quotienten  $\Gamma(x/2 + 1/2)/\Gamma(x/2 + 1)$  gibt es noch viele andere Kettenbruchentwicklungen, die man zur Berechnung von  $x!$  heranziehen

kann. Leider ist die Konvergenzgeschwindigkeit der meisten dieser Darstellungen nicht befriedigend (subgeometrische Konvergenz).

Eine Darstellung ist aber bemerkenswert, weil sie, neben geometrischer Konvergenz, die Eigenschaft hat, für jede ganze Zahl mit der *exakten* Antwort abzubrechen. Sei (vgl. [1, 15.1.24])

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} F \left( \begin{matrix} 1, x \\ x/2 + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma(x/2 + 1)}{\Gamma(x/2 + 1/2)}. \quad (3.31)$$

Damit erhält man eine weitere Darstellung der schwingenden Fakultät

$$x! = \frac{2^x}{\sqrt{\pi}} Z(x) \sin(\pi(x-1/2)). \quad (3.32)$$

Die gaußsche Kettenbruchentwicklung von  $Z(x)$  ist

$$\frac{Z(x)}{\pi^{-1/2}} = \frac{x/2}{x/2-} \frac{x(x/2)/2}{x/2+1+} \frac{1(x/2-1)/2}{x/2+2-} \frac{(x+1)(x/2+1)/2}{x/2+3+} \frac{2(x/2-2)/2}{x/2+4-} \dots$$

Für die Reziproke von  $Z(x)$  findet man die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{\pi^{-1/2}}{Z(x)} = 1 - \frac{x/2}{x/2+1+} \frac{1(x/2-1)/2}{x/2+2-} \frac{(x+1)(x/2+1)/2}{x/2+3+} \frac{2(x/2-2)/2}{x/2+4-} \frac{(x+2)(x/2+2)/2}{x/2+5+} \dots$$

und damit eine Kettenbruchentwicklung der schwingenden Fakultät

$$x! = 2^x \left[ 1 - \frac{x/2}{x/2+1+} \frac{1(x/2-1)/2}{x/2+2-} \frac{(x+1)(x/2+1)/2}{x/2+3+} \dots \right]^{\cos \pi x}. \quad (3.33)$$

Man vergleiche dazu auch die Formeln 51 bis 55 bei W. D. Smith [83].

Für positives, ganzzahliges  $n$  vereinfacht sich dies zu

$$n! = 2^n (\lfloor n/2 \rfloor + 1/2)^{[n \text{ odd}]} \text{kb}(\lfloor n/2 \rfloor).$$

Dabei ist der Kettenbruch  $\text{kb}(z)$  gegeben mit den Abkürzungen

$$\alpha_k(z) = (2z+k)(z+k), \quad \beta_k(z) = k(z-k) \quad \text{und} \quad \gamma_k(z) = z+k$$

durch

$$\begin{aligned}
 kb(z) = 1 - & \frac{z}{\gamma_1(z) + \frac{1}{2} \frac{\beta_1(z)}{\gamma_2(z) - \frac{1}{2} \frac{\alpha_1(z)}{\gamma_3(z) + \frac{1}{2} \frac{\beta_2(z)}{\gamma_4(z) - \frac{1}{2} \frac{\alpha_2(z)}{\gamma_5(z) + \dots}}}
 \end{aligned}$$

BERECHNUNG DER FAKULTÄT  $n!$ 4.1 EIN ALGORITHMUS ZUR BERECHNUNG VON  $n!$ .

Kehren wir zu der eingangs gestellten Frage zurück, wie man die Fakultät  $n!$  effizient berechnen kann. Wir wissen nun, dass sie sich berechnen lässt mittels der quadratischen Rekursion  $n! = \lfloor n/2 \rfloor!^2 n$  für  $n > 0$  und dem Rekursionsanfang  $0! = 1$ . Dabei ist zu verstehen, dass  $n!$  mittels Primfaktorzerlegung ermittelt wird. Die Primfaktoren der schwingenden Fakultäten lassen sich auf Grund von Satz 1 mit Hilfe eines Primzahlensiebs einfach und schnell finden.

Diesen Algorithmus wollen wir *dscFactorial* nennen (*dsc* steht als Abkürzung für *divide, swing and conquer*). Ein Beispiel dazu ist

$$\begin{aligned} 3! &= 2 \cdot 3 \\ 7! &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 15! &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \\ 31! &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \\ 62! &= 2^5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \\ 62! &= (((((1!)^2 3!)^2 7!)^2 15!)^2 31!)^2 62! \end{aligned}$$

Dazu ermittelt man die Primexponenten von  $\lfloor n/2^k \rfloor!$  für  $k \geq 0$ , wobei man sich die Relation  $\lfloor \lfloor n/2 \rfloor / p^k \rfloor = \lfloor \lfloor n/p^k \rfloor / 2 \rfloor$  zu Nutze macht, die einem erlaubt, diese Exponenten mittels einfacher Schiebeoperationen aus  $\lfloor n/p^k \rfloor$  zu bestimmen. Rechnerisch wertvoll ist auch die Relation  $p^{e_p(n!)} \leq n$ , denn sie erlaubt den von  $p$  herrührenden Anteil von  $n!$  auf Registerebene zu berechnen, solange  $n$  in das Register des Rechners passt. Eine Buchführung über die Exponenten ist nicht erforderlich.

Nachdem alle Primanteile von  $\lfloor n/2^k \rfloor!$  auf die  $k$ -te von  $\log_2 n$  Listen gesetzt sind, werden diese mittels eines *divide-and-conquer*-Produktes zusammengefasst.

Nehmen wir nun an, dass dieses wiederum auf einen *divide-and-conquer*-Multiplikationsalgorithmus aufsetzt, etwa den von Karatsuba, so durch-

läuft die Rechnung drei Ebenen von *divide-and-conquer*-Strategien, bevor tatsächlich eine Multiplikation ausgeführt wird. Schließlich nutzen wir noch den Umstand, dass Multiplikationen mit Potenzen der 2 auf binären Computern besonders schnell sind. Wir berechnen daher nur den ungeraden Anteil der schwingenden Fakultät, und multiplizieren das Ergebnis der Rekursion mit  $2^{n-\sigma_2(n)}$ , wobei  $\sigma_2(n)$  die Anzahl der Stellen von  $n$  in der binären Basis ist.

Eine der ersten Fragen, die sich bei der Implementierung von *dscFactorial* stellt, ist, wie viel Speicherplatz für die Faktorenlisten bereitgestellt werden muss. Dies ist gleichbedeutend zur Frage nach der Anzahl der Primfaktoren von  $n!$ . Hilfreich sind für die Praxis dabei folgende einfache Schranken für die *Anzahl aller Primfaktoren* der schwingenden Fakultät  $\Omega(n!)$ . Die Schranken wurden im angegebenen Bereich numerisch verifiziert.

Im Bereich  $25 \leq n \leq 10^6$  gilt:

$$\left\lfloor \frac{n}{\log_2(n/2)} + n^{1/6} \right\rfloor \leq \Omega(n!) \leq \left\lfloor \frac{n}{\log_2(n/2)} + n^{1/2} \right\rfloor$$

#### 4.2 SWING TIME: ZEITKOMPLEXITÄT VON $n!$ .

Überlegen wir uns nun, wie viel Zeit die Berechnung des Produkts dieser Primfaktorlisten bei Verwendung der rekursiven *divide-and-conquer* Methode braucht. Wir verstehen darunter die Berechnung von  $n!$  über die Rekursion  $n! = P(1, \Omega(n!))$  und

$$P(k, n) = P(k, l) \cdot P(l + 1, n), \quad (k < n, l = \lfloor (k+n)/2 \rfloor)$$

mit dem Rekursionsschluss  $P(n, n) = P(n)$ , wobei  $P(n)$  der  $n$ -te Primfaktor aus der Liste ist, die wir mit  $F(n!)$  bezeichnen wollen. Da die Bitlänge von  $n! \sim n$  ist, durchläuft die Rekursion  $\log n$  Stufen, wobei in der letzten Stufe zwei Faktoren der Bitlänge  $n/2$  multipliziert werden, die aus vier Faktoren der Bitlänge  $n/4$  gewonnen wurden, usw. Nehmen wir nun an, dass wir zwei binäre Ganzzahlen mit Bitlänge  $n$  in  $M_{\text{asy}}(n) = \beta n \log(\alpha n)(1 + \log \log(\alpha n))$  ( $\alpha, \beta > 0$ ) Zeiteinheiten multiplizieren können (dies leistet asymptotisch die Schönhage-Strassen-Multiplikation [77, S.208,6.1.33]), so werden wir auf folgende asymptoti-

sche Aussage für die Berechnungszeit des Produktes geführt:

$$\begin{aligned} T_{\text{prod}}F(n!) &\simeq \beta n \log \log(n) \sum_{1 \leq i \leq \lfloor \lg n \rfloor} \log(\alpha n 2^{-i}) \\ &\simeq \frac{\alpha}{\beta} n (\log n)^2 \log \log n \end{aligned}$$

Verwendet man das Sieb des Eratosthenes zur Erstellung der Primfaktorlisten, so kann man zeigen, dass bei hinreichend großem  $n$  die Zeit  $T_{\text{prim}}F(n!)$  zur Ermittlung der Primfaktoren von  $n!$  vernachlässigt werden kann gegenüber der Zeit zur Bildung des Produktes (vgl. [6, S. 297]). Damit kommen wir zu dem Schluss, dass der Zeitaufwand  $T_{\text{swing}}(n)$  für die Berechnung der schwingenden Fakultät von  $n$  asymptotisch beschränkt ist durch die Ordnung  $n(\log n)^2 \log \log n$ .

$$T_{\text{swing}}(n) = T_{\text{prod}}F(n!) + T_{\text{prim}}F(n!) = O(n(\log n)^2 \log \log n)$$

#### 4.3 FACTORIAL TIME: ZEITKOMPLEXITÄT VON $n!$ .

Sei  $T_{\text{mult}}(n, m)$  die Zeit, die eine Multiplikation zweier Faktoren mit den Bitlängen  $n$  respektive  $m$  benötigt,  $T_{\text{quad}}(k)$  die Zeit, die das Quadrieren einer Zahl mit Bitlänge  $k$  erfordert. Da die Bitlänge von  $n! \sim n \log n$  ist, können wir die Zeit  $T_{\text{dsc}}(n)$ , welche die Berechnung von  $n!$  mittels *dscFactorial* benötigt, für großes  $n$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} T_{\text{dsc}}(n) &\sim \sum_{0 \leq l < \lambda} T_{\text{mult}}(2 \lfloor n/2^{l+1} \rfloor \log \lfloor n/2^{l+1} \rfloor, \lfloor n/2^l \rfloor) \\ &\quad + \sum_{0 \leq l < \lambda} T_{\text{quad}}(\lfloor n/2^{l+1} \rfloor \log \lfloor n/2^{l+1} \rfloor) \\ &\quad + \sum_{0 \leq l < \lambda} T_{\text{swing}}(\lfloor n/2^l \rfloor) \quad (\lambda = \lfloor \log_2(n) \rfloor) \end{aligned}$$

Setzen wir in  $T_{\text{mult}}(n, n)$  und  $T_{\text{quad}}(n)$  die asymptotische Laufzeit der Schönhage-Strassen-Multiplikation  $M_{\text{asy}}(n)$  ein, so sieht man leicht, dass die beiden ersten Summen beschränkt sind von der asymptotischen Ordnung  $n(\log n)^2 \log \log n$ . Weiter lässt sich die Summe der Berechnungszeiten der schwingenden Fakultäten durch ein konstantes Vielfaches von  $T_{\text{swing}}(n)$  abschätzen. Damit folgt mit dem Ergebnis des letzten Abschnitts, dass insgesamt gilt:

$$T_{\text{dsc}}(n) = O(n(\log n)^2 \log \log n) \tag{4.1}$$

---

```

Factorial(n)
  if n < 2 then return(1) end_if
  return(Factorial ( $\lfloor n/2 \rfloor$ )2 PrimeSwing(n))

PrimeSwing(n)
  count ← 0
  for prime in Primes(2...n) do
    q ← n; p ← 1
    repeat
      q ←  $\lfloor q/\text{prime} \rfloor$ 
      if q is odd then p ← p · prime end_if
    until q = 0
    if p > 1 then FactorList[count++] ← p end_if
  end_for
  index ← 0
  return(Product(FactorList, count))

Product(list, len)
  if len = 0 then return(1) end_if
  if len = 1 then return(list[index++]) end_if
  hlen ←  $\lfloor \text{len}/2 \rfloor$ 
  return(Product(list, len - hlen) Product(list, hlen))

```

---

Algo. 2 – Berechnung von  $n!$  mit Primzahlzerlegung von  $n$

Die Laufzeit von *dscFactorial* ist damit asymptotisch durch die gleiche Ordnung beschränkt ist wie die Multiplikation binärer Zahlen der Länge  $\log(n!)$ .

Der schnellste bisher bekannte Algorithmus zur Berechnung von  $n!$  beruht auf der Primfaktorzerlegung von  $n!$ , die dann mit der Methode des geschachtelten Quadrierens ausmultipliziert wird. So beschrieben von A. Schönhage et alia [77, S.225] (und in ähnlicher Form von P. B. Borwein [9] angegeben). Bezogen auf sein Rechenmodell (mehrbandige Turingmaschine) gibt Schönhage für die Laufzeit dieses Algorithmus ebenfalls die asymptotische Ordnung von (4.1) an.

#### 4.4 ZUR BERECHNUNG DER ERATOSTHENISCHEN FAKULTÄT.

Der Algorithmus *dscFactorial* kann mit einer minimalen Veränderung auch zur Berechnung der erathostenischen Fakultät verwendet werden.

Es genügt dazu, die letzte Quadratur in der Berechnung wegzulassen. Man vergleiche mit dem Beispiel

$$62' = (((((1\lambda)^2 3\lambda)^2 7\lambda)^2 15\lambda)^2 31\lambda) 62\lambda$$

Darauf aufsetzend kann die orbitale Fakultät  $n^\circ = n!n!$ , die wir im kombinatorischen Teil dieser Arbeit noch betrachten werden (11.7), berechnet werden als  $n^\circ = (n')^2$ , im Beispiel

$$62^\circ = (((((((1\lambda)^2 3\lambda)^2 7\lambda)^2 15\lambda)^2 31\lambda) 62\lambda)^2 .$$

#### 4.5 IMPLEMENTIERUNG VON DSC-FACTORIAL.

Implementierungen von *dscFactorial* existieren in verschiedenen Computersprachen. Im Internet werden auf der Seite [57] insgesamt 21 verschiedene Algorithmen zur Berechnung der Fakultät vorgestellt und miteinander verglichen, neben *dscFactorial* auch die Methoden von Arnold Schön-hage, Peter Borwein und Ilan Vardi [86].

Eine im Vergleich zu der im letzten Abschnitt gegebenen Beschreibung stark vereinfachte Implementierung geben wir in Listing (2) im Pseudocode an. Sie besteht aus den drei Funktionen `Factorial`, `PrimeSwing` und `Product`. Dabei nehmen wir an, dass der kleinste Index einer Liste 0 ist und dass `index` eine globale Größe ist. Eine optimierte Implementierung mit dem Mathematikprogramm *Sage* findet sich am Ende dieses Kapitels.

#### 4.6 REKURSIVE BERECHNUNG VON $n!$ .

Die Idee die Fakultät mit Hilfe der schwingenden Fakultät zu berechnen kann auch ohne Primfaktorzerlegung umgesetzt werden. Dabei wird die schwingende Fakultät über eine Rekursion berechnet. Dies führt zu einem effizienten Algorithmus, den wir weiter unten in einer Python-Sage Implementierung angeben (5). Benchmarks zeigen, dass dies der schnellste bekannte Algorithmus in dieser Kategorie ist [58].

Das überraschendste Merkmal dieses Algorithmus ist, dass dabei starker Gebrauch von der Division gemacht wird – etwas, was einem nicht in den Sinn kommt, wenn man sich der Fakultät in naiver Weise nähert.

4.7 ADDITIVE BERECHNUNG VON  $n!$  UND  $n!$ .

Zur Abrundung geben wir noch eine Methode zur Berechnung der ganzzahligen Fakultät an, die überraschender Weise rein additiv ist. Sie ist ein Spezialfall der *Moessner-Paasche-Summation*. Wir verweisen auf [68] und [16, S.63f.], sowie auf [67].

---

```

MoessnerPaascheFactorial(n)
s0 ← 1
for m : 1 ≤ m ≤ n
    sm ← 0
    for k : m ≥ k ≥ 1
        for i : 1 ≤ i ≤ k
            si ← si + si-1
fn ← sn

```

---

Algo. 3 – Additive Berechnung der Fakultät

Diese Methode besitzt ein Gegenstück zur Berechnung der schwingenden Fakultät. Wir werden in einem späteren Kapitel die binomische Pyramide einführen. Diese benutzt eine Rekursionsgleichung, die es erlaubt, den Zeilenabschnitt  $\binom{n}{k}_2$  für  $-n \leq k \leq 0$  aus dem vorausgehenden Zeilenabschnitt  $\binom{n-1}{k}_2$  zu berechnen. Auf diese Weise kann die schwingende Fakultät als  $n! = \binom{n}{0}_2$  rein additiv berechnet werden, wie im Algorithmus 4.

---

```

AdditiveSwing(n)
s-1 ← 0, s0 ← 1
for m : 1 ≤ m ≤ n
    sm ← sm-2
    for k : m ≥ k ≥ 1
        if k even then sk ← sk + sk-2
        else sk ← sk + sk-1 + sk-2
fn ← sn

```

---

Algo. 4 – Additive Berechnung der schwingenden Fakultät

Diese beiden Algorithmen bewerben sich *nicht* um die Teilnahme am Wettbewerb um die effizienteste Methode. Sie sind hier nur wegen ihrer besonderen Einfachheit aufgeführt.

## 4.8 SAGE IMPLEMENTIERUNGEN.

Die Implementierungen wurden in dem Python-Dialekt des Mathematikprogramms Sage [85] geschrieben. Algorithmus 6 benutzt die Python Bibliotheksfunktion `bisect_left` und die Sage Funktion `prime_range`.

---

```
def factorial(n):

    def product(m, len):
        if len == 1: return m
        if len == 2: return m * (m - 2)
        hlen = len >> 1
        return product(m-hlen*2, len-hlen) * product(m, hlen)

    def odd_factorial(n):
        if n < 5:
            oddFact = [1,1,1,3,3][n]
            sqrOddFact = [1,1,1,3,3][n//2]
        else:
            sqrOddFact, oldOddFact = odd_factorial(n//2)
            len = (n - 1) // 4
            if (n % 4) != 2: len += 1
            high = n - ((n + 1) & 1)
            oddSwing = product(high, len) // oldOddFact
            oddFact = (sqrOddFact**2) * oddSwing
        return (oddFact, sqrOddFact)

    def eval(n):
        if n < 10: return mul(range(2,n+1))
        bits = n - sum(n.digits(2))
        return odd_factorial(n)[0] * 2**bits

    return eval(n)
```

---

Algo. 5 – Sage Implementierung mit Rekursion von  $n!$

---

```

def factorial(n):

    def product(s, n, m):
        if n > m: return 1
        if n == m: return s[n]
        k = (n + m) // 2
        return product(s, n, k) * product(s, k + 1, m)

    def swing(m, primes):
        if m < 4: return [1,1,1,3][m]

        s = bisect_left(primes, 1 + isqrt(m))
        d = bisect_left(primes, 1 + m // 3)
        e = bisect_left(primes, 1 + m // 2)
        g = bisect_left(primes, 1 + m)

        factors = primes[e:g]
        factors += filter(lambda x: (m//x)&1 == 1, primes[s:d])
        for prime in primes[1:s]:
            p, q = 1, m
            while True:
                q //= prime
                if q == 0: break
                if q & 1 == 1:
                    p *= prime
            if p > 1: factors.append(p)

        return product(factors, 0, len(factors) - 1)

    def odd_factorial(n, primes):
        if n < 2: return 1
        return (odd_factorial(n//2,primes)**2)*swing(n,primes)

    def eval(n):
        if n < 10: return product(range(2, n + 1), 0, n-2)
        bits = n - sum(n.digits(2))
        primes = prime_range(2, n + 1)
        return odd_factorial(n, primes) * 2**bits

    return eval(n)

```

---

Teil II

ANWENDUNGEN VON  $N_2$  IN DER  
ZAHLENTHEORIE

# 5

## ZERLEGBARE UND PRIME ZAHLEN

---

### 5.1 EINE ZAHLENTHEORETISCHE UNGLEICHUNG.

In diesem Abschnitt betrachten wir die schwingende Fakultät im zahlen-theoretischen Zusammenhang. Die Einteilung der Zahlen in Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen legt es nahe (etwa unter dem Paradigma des *divide-and-conquer*), die Fakultät in Teilprodukte zu zerlegen, die nur aus Primzahlen oder nur aus zusammengesetzten Zahlen bestehen, also zu betrachten

$$n! = \prod_{1 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor} k \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < q \leq n \\ q \text{ zerlegbar}}} q \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \\ p \text{ prim}}} p.$$

Ausgedrückt mit der schwingenden Fakultät nimmt diese Gleichung die Form an

$$\frac{n!}{\prod_{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n} p} = \frac{\prod_{\lfloor n/2 \rfloor < q \leq n} q}{\prod_{1 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor} k}. \quad (5.1)$$

Dabei bezeichnet  $q$  zerlegbare und  $p$  prime Zahlen. Nun gilt folgende Ungleichung:

#### Satz 8

$$\frac{\prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < q \leq n \\ q \text{ zerlegbar}}} q}{\prod_{1 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor} k} < \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \\ p \text{ prim}}} p^3 \quad (n > 2) \quad (5.2)$$

*Beweis:* Die Fälle  $2 < n < 6363$  wurden mit Hilfe eines Mathematikprogramms numerisch verifiziert. Wir nehmen nun an, dass ein  $n \geq 6363$  existiert, für das die Ungleichung falsch ist, das heißt nach

(5.1), dass  $n! \geq \prod_{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n} p^4$  ist. Dann ist mit Anwendung der unteren Schranke (2.16) der schwingenden Fakultät

$$\frac{n!}{\prod_{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n} p} \geq \frac{n!}{(n!)^{1/4}} = (n!)^{3/4} \geq \left(2^n \sqrt{\frac{2/\pi}{n+1}}\right)^{3/4}.$$

Andererseits ist nach Satz 1  $p^{\ell_p(n!)} \leq n$  und  $\ell_p(n!) = 1$  für  $p > \sqrt{n}$ , also

$$\begin{aligned} \frac{n!}{\prod_{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n} p} &= \prod_{1 < p \leq \sqrt{n}} p^{\ell_p(n!)} \prod_{\sqrt{n} < p \leq n/3} p^{\ell_p(n!)} \\ &\leq \prod_{1 < p \leq \sqrt{n}} n \prod_{\sqrt{n} < p \leq n/3} p \leq n^{(3+\sqrt{n})/2} 4^{n/3} \end{aligned}$$

Dabei wurde die Anzahl der Primzahlen durch die Anzahl der ungeraden Zahlen abgeschätzt und schließlich von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass  $\prod_{p \leq x} p < 4^x$  für  $x \geq 2$  ist (siehe z.B. [65, Satz 8.5]). Daraus folgt

$$\begin{aligned} 2^{3n/4-2n/3-1} &\leq (2/\pi)^{3/8} 2^{3n/4-2n/3} \\ &\leq (n+1)^{3/8} n^{(3+\sqrt{n})/2} \leq (n+1)^{2+\sqrt{n}/2}. \end{aligned}$$

Mit dem binären Logarithmus folgt  $(3n/4 - 2n/3 - 1)/(2 + \sqrt{n}/2) \leq \lg(n+1)$ , eine Relation die für  $n \geq 6363$  falsch ist, wie man leicht sieht. Die Behauptung ist somit für alle Fälle bewiesen.  $\diamond$

Bezogen auf ein Intervall  $(a, b] = \{k \mid a < k \leq b\}$  nennen wir das Produkt aller ganzen Zahlen *Factorial*( $a, b$ ), das Produkt aller Primzahlen *Primorial*( $a, b$ ) und das Produkt aller zusammengesetzten Zahlen *Compositorial*( $a, b$ ). Damit lässt sich die Abschätzung aus Satz 8 so formulieren: Für  $n > 2$  ist

$$\text{Compositorial}(\lfloor n/2 \rfloor, n) < \text{Factorial}(1, \lfloor n/2 \rfloor) \text{Primorial}(\lfloor n/2 \rfloor, n)^3.$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Zähler $U_n$	1	1	1	1	2	2	4	4	2	18	36	36
Nenner $U_n$	1	1	2	6	3	15	5	35	35	35	7	77

Tabelle 6 – Ungleichung (5.3)

5.2 REKURSION DER VERSCHÄRFTEN UNGLEICHUNG.

Um Satz 8 für kleine Werte von  $n$  numerisch zu verifizieren, betrachten wir die sehr viel schärfere Abschätzung

$$\left( \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < q \leq n \\ q \text{ zerlegbar}}} q \right) / \left( \prod_{1 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor} k \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \\ p \text{ prim}}} p \right) < 1 \tag{5.3}$$

die man erhält, wenn man  $p^3$  auf der linken Seite von (5.2) durch  $p$  ersetzt. Bezeichnen wir die linke Seite der Ungleichung mit  $U_n$ , so lässt sich die Folge rekursiv berechnen als  $U_0 = 1$  und

$$U_n = U_{n-1} u_n \quad (n > 0) .$$

Dabei ist die Folge  $u_n$  definiert als  $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1/2$  und für  $n > 2$  durch

$$\begin{aligned} &\text{if } n \text{ odd then if } n \text{ prime then } u_n = \frac{1}{n} \text{ else } u_n = n \text{ fi fi ;} \\ &\text{if } n \text{ even then if } \frac{n}{2} \text{ prime then } u_n = n \text{ else } u_n = \frac{4}{n} \text{ fi fi .} \end{aligned}$$

Die Ungleichung (5.3) ist genau dann falsch, wenn der Zähler von  $U_n$  größer oder gleich dem Nenner von  $U_n$  ist. Mit einem Computerprogramm lässt sich auf diese Weise in wenigen Augenblicken diese Ungleichung für  $n \in [1, 20000]$  nachprüfen: Tatsächlich zeigt sich dabei, dass (5.3) in diesem Bereich nur für die Werte  $n \in \{10, 15, 27, 39\}$  nicht gilt. Sind es die einzigen Ausnahmen? Unsere numerische Untersuchung fassen wir so zusammen: *Für  $40 \leq n \leq 10^6$  gilt*

$$\text{Compositorial}(\lfloor n/2 \rfloor, n) < \text{Factorial}(1, \lfloor n/2 \rfloor) \text{Primorial}(\lfloor n/2 \rfloor, n) .$$

## 5.3 BERTRANDS POSTULAT.

Aus der Ungleichung (5.2) von Satz 8 folgen zusammen mit Satz 1 einfache zahlentheoretische Schranken für die schwingende Fakultät.

$$\prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \\ p \text{ prim}}} p \leq n! < \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \\ p \text{ prim}}} p^4 \quad (n > 2)$$

Wendet man den binären Logarithmus  $\lg(n) = \log_2(n)$  auf die Ungleichungen an, und bedenkt, dass

$$\lg(n/2) (\pi(n) - \pi(n/2)) \leq \sum_{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n} \lg(p) \leq \lg(n) (\pi(n) - \pi(n/2)) ,$$

wobei  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen ist, die  $x$  nicht übersteigen, so folgt

$$\frac{\lg n!}{4 \lg n} < \pi(n) - \pi(n/2) \leq \frac{\lg n!}{\lg(n/2)} \quad (n \geq 3) . \quad (5.4)$$

Mit den Schranken (2.16) der schwingenden Fakultät erhält man daraus die einfachen Schranken für  $\pi(n) - \pi(n/2)$  und  $n \geq 3$ .

$$\frac{n \ln(4) - \ln(n+1) - \ln(\pi/2)}{8 \ln(n)} < \pi(n) - \pi(n/2),$$

$$\pi(n) - \pi(n/2) < \frac{n \ln(4) + \ln(n+1) - \ln(2\pi)}{2 \ln(n/2)}$$

Damit ist  $\pi(2n) - \pi(n) > 0$  für  $n \geq 1$ , und wir können mit N. J. Fine (zitiert nach [74]) beschwingt feststellen: „*Tschebyschew hat es gesagt, und ich sag' es nochmal, zwischen  $n$  und  $2n$  liegt stets eine prime Zahl.*“

## 5.4 DIE FOLGE DER PRIMZAHLEN.

Gibt es unendlich viele Primzahlen? Nach Ribenboim ([72, S. 4]) stammt der schönste Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen von Hermite.  $\mathcal{P}(n)$  sei die Menge der Primteiler von  $n$ .

*Beweis von Hermite:* Es genügt zu zeigen, dass für jede vorgelegte Zahl  $n$  eine Primzahl  $p$  existiert, die größer ist als  $n$ . Und dazu genügt es

$\mathcal{P}(n! + 1)$  zu betrachten. Ende des Beweises von Hermite. (Denn die Menge  $\mathcal{P}(n! + 1)$  besteht *ausschließlich* aus Primteilern  $> n$  und kann nach dem Fundamentalsatz der Arithmetik auch nicht leer sein.)

*Unser Beweis:* Es genügt zu zeigen, dass für jede vorgelegte Zahl  $n$  eine Primzahl  $p$  existiert, die größer ist als  $n$ . Und dazu genügt es  $\mathcal{P}((2n)!)^{\lambda}$  zu betrachten. Ende unseres Beweises. (Denn nach dem bertrandschen Postulat ist die Menge  $\mathcal{U}(2n) = \{p \text{ prim} : n < p \leq 2n\}$  nicht leer und nach Satz 1 gilt  $\mathcal{U}(2n) \subseteq \mathcal{P}((2n)!)^{\lambda}$ .)

Die Unendlichkeit der Primzahlen ist jetzt also doppelt abgesichert. Aber können wir damit auch alle Primzahlen *generieren*? Geben wir ein *konstruktives* Verfahren an, indem wir zu den Beweisen jeweils eine *Auswahlfunktion* hinzufügen. Im Fall des hermiteschen Beweise sei dazu  $\lfloor n \rfloor$  der kleinste Primteiler von  $n$ . Dann betrachten wir die Folge

$$n \mapsto \lfloor n! + 1 \rfloor; \quad 2, 3, 7, 5, 11, 7, 71, 61, 19, 11, 39916801, 13, \dots \quad (n \geq 1)$$

Kommen darin alle Primzahlen vor? Und in welcher Reihenfolge? Im Fall unseres Beweises bezeichne  $\lceil n \rceil$  den größten Primteiler von  $n$ . Betrachten wir nun die Abbildung

$$n \mapsto \lceil (2n) \rceil^{\lambda}; \quad 2, 3, 5, 7, 7, 11, 13, 13, 17, 19, 19, 23, \dots \quad (n \geq 1)$$

Offenbar findet man auf diese Weise *alle* Primzahlen und dies in natürlicher Reihenfolge.

## 5.5 ERKENNEN VON PRIMZAHLEN.

Die schwingende Fakultät wirft auch ein Licht auf die Frage, wie Primzahlen von zusammengesetzten Zahlen unterschieden werden können, eine Frage der zu widmen Gauß mit moralischer Emphase forderte. Ein klassisches Ergebnis ist das *Alhacen-Lagrange-Kriterium* [19] (von Alhacen (Ibn al-Haytham) entdeckt, von Lagrange bewiesen, als *Satz von Wilson* in der Literatur zitiert). Es besagt:

*Eine Zahl  $n > 1$  ist prim genau dann, wenn  $n$  Teiler von  $(n - 1)! + 1$  ist.*

Im Vergleich wollen wir folgende Aussage betrachten.

**Satz 9** *Ist eine Zahl  $n > 1$  prim, dann ist  $n$  Teiler von  $(n - 1)! - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ .*

*Beweis.* Wenn  $p$  prim ist, dann gilt  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  nach dem Alhacen-Lagrange-Kriterium, und ebenso  $\lfloor (p-1)/2 \rfloor!^2 \equiv -(-1)^{\lfloor p/2 \rfloor} \pmod{p}$ . Damit ist

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\lfloor p/2 \rfloor} \lfloor (p-1)/2 \rfloor!^2 \pmod{p}.$$

Da  $\lfloor (p-1)/2 \rfloor!^2$  nicht durch  $p$  teilbar ist, können wir dividieren, und erhalten so die Behauptung

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\lfloor p/2 \rfloor} \pmod{p}. \quad \diamond \tag{5.5}$$

Gilt auch die Umkehrung von Satz 9, so wie beim Alhacen-Lagrange Kriterium? Leider nicht. Das kleinste Gegenbeispiel ist  $n = 5907$  und wurde von Steven Skiena [80] gefunden. Welche zusätzlichen Eigenschaften muss  $n$  besitzen, damit aus der Gültigkeit von (5.5) folgt, dass  $n$  prim ist ([31, exc. 5.110])? Ilan Vardi [86] hat gezeigt, dass wenn  $p$  eine Wieferich Primzahl ist,  $n = p^2$  die Kongruenz (5.5) löst. Da 1093 und 3511 die einzigen bekannten Wieferich Primzahlen sind, sind die einzigen bekannten Ausnahmen für die Umkehrung des Satzes  $5907$ ,  $1093^2$  und  $3511^2$ . Diese Zahlen kann man als die *schwingenden Pseudoprimzahlen* bezeichnen.

## 5.6 SCHWINGENDE PRIMZAHLEN.

Wir nennen  $n$  eine *schwingende Primzahl*, wenn  $n$  eine Primzahl ist und  $s_n = \left( (n-1)! - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \right) / n$  eine Primzahl ist. Die ersten schwingenden Primzahlen sind unten aufgeführt. Eine offene Fragen ist, ob es unendlich viele schwingende Primzahlen gibt.

7, 11, 13, 17, 23, 29, 37, 41, 67, 83, 167, 199, 883, 1777, 2221, 3181, 4133, 6037, ...

## 5.7 DAS ALHACEN-LAGRANGE KRITERIUM.

Wir geben in diesem Abschnitt eine funktionale Formulierung des Primzahlkriteriums von Alhacen und Lagrange an. Dazu betrachten wir Funktionen  $F(n, n)$ , mit denen sich die Indikatorfolge der Primzahlen für  $n \geq 2$  wie folgt ergibt

$$[n - F(n, n) = 1] = 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \quad (n \geq 2).$$

Das Alhacen-Lagrange-Kriterium besagt gerade, dass eine mögliche Wahl von  $F$  ist

$$F(n, k) = (n - 1)! \bmod k.$$

Wir wollen nun diese Beziehung mit Hilfe der schwingenden Fakultät wesentlich effizienter darstellen. Dazu verwenden wir die rekursive Beziehung  $n! = \lfloor n/2 \rfloor!^2 n$ . Mit ihr ergibt sich die in Listing 7 aufgeführte Berechnungsmethode für  $F(n, k)$ .

---

```
FactMod(n, k)    // Berechnet (n - 1)! mod k

    if n < 2 then return 0 end_if
    if n = 2 then return 1 end_if

    m ← (n - 1) mod k
    if m ≠ 0 then
        m ← FactMod(⌊(n - 1) / 2⌋ + 1, k)2 · m mod k end_if

    return m
```

---

Algo. 7 – Berechnung von  $(n - 1)! \bmod k$  mit  $n$

Wir sehen, dass die ganze Last der Rechnung sich nun in der Berechnung von  $(n - 1) \bmod k$  konzentriert. Das Eingangszitat von Graham, Knuth und Patashnik stammt tatsächlich aus ihrer Betrachtung der Frage, ob das Alhacen-Lagrange-Kriterium für praktische Primzahltests geeignet ist. Wir können also jetzt sagen, ob dies der Fall ist, hängt davon ab, ob wir für die Berechnung von  $n! \bmod k$  einen effizienten Algorithmus finden können (der etwa mit dem Potenzierungs-Algorithmus vergleichbar wäre).

## 5.8 DIE BERECHNUNG VON $n! \bmod p$ NACH LUCAS.

Eine effiziente Berechnung von  $n! \bmod p$  basiert auf zwei Dingen: Erstens die Berechnung von  $n!$  mittels Primfaktorzerlegung, wie in Satz 1 beschrieben. Und zum Zweiten auf einem Satz von Lucas [51] (vgl. auch [28]), der angibt, wie man Binomialkoeffizienten modulo einer Primzahl berechnet. Dieser Satz lässt sich für die schwingende Fakultät wie folgt

adaptieren und damit lässt sich der Wert  $n! \pmod p$  einfach berechnen, wie in Algorithmus 8 dargestellt.

---

```

SwingModPrime(n,p)      // Berechnet  $n! \pmod p$  für  $p$  prim

     $(n_1, n_2, \dots, n_k)_p \leftarrow n$       //  $n$  in Basis  $p$ 
     $(h_1, h_2, \dots, h_m)_p \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$  //  $\lfloor n/2 \rfloor$  in Basis  $p$ 

    for  $i$  from 1 to  $\min(k, m)$  do
        if  $n_i < h_i$  then return 0 end_if
    end_for

     $r \leftarrow 1$ 
    for  $i$  from 1 to  $\min(k, m)$  do
         $\sigma \leftarrow \text{PrimeSwing}(n_i)$ 
        if  $n_i$  is odd then  $\sigma \leftarrow \sigma / ((n_i + 1) / 2)$  end_if
         $r \leftarrow r \cdot \sigma \pmod p$ 
    end_for

    return  $r$ 

```

---

Algo. 8 – Berechnung von  $n! \pmod p$  nach Lucas

**Satz 10** Sei  $p$  eine Primzahl und  $n \geq 2$  eine ganze Zahl. Weiter sei  $n_i$  die  $i$ -te Ziffer der Darstellung von  $n$  in der Basis  $p$  und  $h_i$  die  $i$ -te Ziffer der Darstellung von  $\lfloor n/2 \rfloor$  in der Basis  $p$ . Gilt für ein  $i$  die Relation  $n_i < h_i$ , dann ist

$$n! \equiv 0 \pmod p .$$

Andernfalls gilt mit der Abkürzung  $u_i = ((n_i + 1) / 2)^{[n_i \text{ odd}]}$

$$n! \equiv \frac{n_1!}{u_1} \frac{n_2!}{u_2} \dots \frac{n_r!}{u_r} \pmod p .$$

## 5.9 KONGRUENZEN DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.

Teilbarkeitseigenschaften der schwingenden Fakultät sind ein Thema mit einer langen Geschichte. Einen Überblick über die ältere Literatur findet man in [23]. In diesem Abschnitt fassen wir einige Resultate zusammen,

verweisen den Leser für die Beweise auf die Literatur, insbesondere den Artikel von A. Granville [33].

Ist  $p$  eine Primzahl der Gestalt  $p = 4n + 1$ , und schreibt man sie nach Euler [26] als  $p = a^2 + b^2$ , wobei man das Vorzeichen von  $a$  so wählt, dass  $a \equiv 1 \pmod{4}$  ist, dann gilt

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)_! \equiv 2a \pmod{p}, \quad (p \equiv 1 \pmod{4});$$

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)_! \equiv \left(2a - \frac{p}{2a}\right) \left(2^{p-2} + \frac{1}{2}\right) \pmod{p^2}, \quad (p \equiv 1 \pmod{4}).$$

Die erste Äquivalenz wurde von Gauß (1828), die zweite wurde von Chowla, Dwork und Evans (1986) bewiesen. Legendre, Babbage (1819) und Wolstenholme (1862) zeigten (in Reihenfolge)

$$(2p)_! \equiv 2 \pmod{p}, \quad (p \geq 2);$$

$$(2p)_! \equiv 2 \pmod{p^2}, \quad (p \geq 3);$$

$$(2p)_! \equiv 2 \pmod{p^3}, \quad (p \geq 5).$$

Morley (1895) [64] und Granville (1995) [33] zeigten

$$(-1)^{(p-1)/2} (p-1)_! \equiv 4^{p-1} \pmod{p^3}, \quad (p \geq 5);$$

$$(-1)^{(p-1)/2} (p-1)_! \equiv \frac{p(\mathcal{B}_{p-1} + 1) - 1}{p-1} \pmod{p^2}, \quad (p \geq 3).$$

Hier ist  $\mathcal{B}_{p-1} = B_{p-1}(1) - B_{p-1}(1/2)$  gesetzt und  $B_{p-1}$  bezeichnet die Bernoulli-Polynome. Wir ergänzen noch um:

$$(-1)^{(p-1)/2} (p-1)_! \equiv 1 \pmod{p}, \quad (p \geq 2);$$

$$(-1)^{(p-1)/2} (p-1)_! \equiv 2^{p-1} \pmod{p}, \quad (p \geq 3);$$

$$(-1)^{(p-1)/2} (p-1)_! \equiv 2^p - 1 \pmod{p^2}, \quad (p \geq 3).$$

### 5.10 WEITERE EINFACHE TEILBARKEITSRELATIONEN.

Aus der Definition von  $n!$  folgt unmittelbar, dass  $n!/(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$  eine ganze Zahl ist. Diese Beobachtung werden wir noch bei der Suche nach den verlorenen Catalan-Zahlen im Teil III der Arbeit weiterverfolgen.

Eine Folgerung aus Satz 1 verdient hervorgehoben zu werden, da sie in vielfältiger Gestalt in kombinatorischen Zusammenhängen auffällig ist:

$$2^k \upharpoonright 2 \text{ und } (2^k + 1) \upharpoonright 2 \text{ sind für } k > 0 \text{ stets ungerade.}$$

Der erste Fall ergibt sich aus Relation (e) von Satz 1 und der zweite Fall, weil  $(2^k + 1) \upharpoonright 2 = (2^k \upharpoonright 2)(2^k + 1)$  das Produkt zweier ungerader Zahlen ist. Eine andere unmittelbare Folgerung aus der Darstellung  $n! = n \lfloor n/2 \rfloor!$  und Satz 1 ist, dass jeder quadratische Teiler von  $n \upharpoonright$  bi-quadratischer Teiler von  $n!$  ist. Und es gilt:

Für  $n > 8$  ist  $n \upharpoonright$  nicht quadratefrei.

Diese Aussage wurde in ihrer binomischen Form von von A. Granville und O. Ramaré bewiesen [32] (siehe auch [75] und [87]), und bestätigt eine bekannte Vermutung von Paul Erdős, dass  $\binom{2^n}{n}$  für  $n > 4$  nicht quadratefrei ist. Einen Überblick gibt R. K. Guy in [34, B33].

### 5.11 ZWEI VERMUTUNGEN.

Dagegen ist die Gültigkeit der Teilbarkeitsbeziehung

$$3^2 \mid 2^n \upharpoonright \quad (n > 9) \quad (\text{Vermutung 1})$$

bis heute unentschieden. Eine verwandte Vermutung [53] besagt:

*Für alle  $n > 26$  existiert ein  $k > 0$  existiert, so dass*

$$\left\lfloor \frac{2^n}{3^k} \right\rfloor \bmod 6 = 3. \quad (\text{Vermutung 2})$$

Dabei ist die mod-Operation definiert als  $x \bmod m = x - m \lfloor x/m \rfloor$ . Wir zeigen, dass Vermutung 1 aus Vermutung 2 folgt.

Denn wenn  $\lfloor 2^n/3^k \rfloor \bmod 6 = 3$ , dann ist  $\lfloor 2^n/3^k \rfloor$  ungerade, weil  $\lfloor 2^n/3^k \rfloor = 3 + 6T_{n,k}$  mit  $T_{n,k} = \lfloor \lfloor 2^n/3^k \rfloor / 6 \rfloor$ . Aber auch  $\lfloor 2^n/3^{k+1} \rfloor$  ist ungerade, denn  $\lfloor 2^n/3^{k+1} \rfloor = \lfloor \lfloor 2^n/3^k \rfloor / 3 \rfloor = \lfloor (3 + 6T_{n,k}) / 3 \rfloor = 1 + 2T_{n,k}$ . Damit ist 2 kein Teiler von  $\lfloor 2^n/3^j \rfloor$  ( $j \in \{k, k+1\}$ ), und das heißt, dass  $\sum_{j \geq 1} \lfloor 2^n/3^j \rfloor \bmod 2 \geq 2$  ist, was nach Satz 1 bedeutet, dass  $3^2$  Teiler von  $2^n \upharpoonright$  ist.

Vermutung 2 lässt sich auch äquivalent als Inklusion formulieren:

Für alle  $n > 26$  existiert ein  $k > 0$ , so dass gilt

$$3^k \lfloor 2^n / 3^k \rfloor < 2^n < 3^k \left( \lfloor 2^n / 3^k \rfloor + 1 \right) . \quad (\text{Vermutung } 2^*)$$

								0	1
								1	2
							1	-1	3
						1	-1		4
					1	-1		1	5
				1	-1		0		6
			1	-1		1	-1		7
			1	-1	0	0			8
		1	-1		1	0	0		9
	1	-1		0	0	0			10
1	-1		1	-1	1	-1			11
1	-1	0	0	0	0	0			12

Tabelle 7 – Das pascalsche Dreieck, reduziert  $\binom{n-1}{k} \triangleright n$

5.12 PASCALS DREIECK ALS PRIMZAHLENINDIKATOR.

Die Gegenbeispiele im Abschnitt 5.5 zerstören die Hoffnung, allein aus der Mittelsenkrechten des pascalschen Dreiecks ablesen zu können, ob eine ungerade Zahl Primzahl ist. Allgemeiner jedoch lässt Pascals Dreieck sehr wohl als ein Primzahlenindikator verwenden. Dies wollen wir in diesem Abschnitt betrachten.

Wir erinnern an die Definition von  $\text{smod}$  –  $\text{smod}$  steht für *signed mod* – der  $\text{mod}$ -Operation mit kleinstem Rest [6, S.79],

$$a \text{ smod } n = a - n \lceil a/n - 1/2 \rceil \quad (\text{falls } n \neq 0, a \text{ sonst}).$$

Weiter definieren wir die Operation  $\triangleright : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

$$a \triangleright n = (a \text{ smod } n) \lceil |a \text{ smod } n| = 1 \rceil .$$

Reduzieren wir nun das pascalsche Dreieck mittels  $\triangleright$ , das heißt, betrachten wir für  $n \geq 1$  das Dreieck  $\binom{n-1}{k} \triangleright n$  für  $0 \leq k \leq (n-1)$ , so kommt

eine interessante Infrastruktur zum Vorschein. In Tabelle 7 schreiben wir wegen der Symmetrie nur die linke Hälfte an.

**Satz 11** Sei  $n \geq 1$ ,  $n \neq 4$ . Dann gilt:  $n$  ist prim genau dann, wenn

$$\forall_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n-1}{k} \triangleright n \neq 0.$$

*Beweis.* Falls  $n$  prim ist, gilt  $\binom{n-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{n}$  für  $0 \leq k \leq n-1$ , und das heißt  $\binom{n-1}{k} \triangleright n = (-1)^k$ . Falls  $n$  nicht prim ist, dann existiert ein  $k$  mit  $\binom{n-1}{k} \triangleright n = 0$ , und zwar ist ein solches  $k$  die kleinste Primzahl  $p$ , die  $n$  teilt, denn mit dem binomischen Absorptionsgesetz folgt  $\binom{n-1}{p} \text{ smod } n = \left( \binom{n-1}{p-1} \frac{n-p}{p} \right) \text{ smod } n = \left( \binom{n-1}{p-1} \text{ smod } n \right) \left( \frac{n-p}{p} \right) = (-1)^{p-1} (n/p - 1)$ , und letzteres ist außer im Fall  $n = 4$  dem Betrag nach größer als 1, also  $\binom{n-1}{p} \triangleright n = 0$ .  $\diamond$

### 5.13 NOTION VERSUS NOTATION.

Die Werte  $\{-1, 0, 1\}$  schreiben wir auch  $\{\bar{1}, 0, 1\}$ . Die reduzierten Zeilen des pascalschen Dreiecks (Tabelle 7) bilden damit eine Folge von Tritstrings,  $0, 11, 1\bar{1}\bar{1}, 1\bar{1}\bar{1}1, 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}, 1\bar{1}00\bar{1}1, \dots$ , die als eine Codierung der natürlichen Zahlen aufgefasst werden kann, aus der, mit einer Ausnahme, direkt ablesbar ist, ob eine Primzahl vorliegt. Der Webfehler bei  $n = 4$  lässt sich (per Konvention) leicht korrigieren. Setzen wir außerdem die Tritstrings rechts der Mittelachse durch ihr Dual  $\bar{1}$  fort, und wählen wir andere Symbole, so erhalten wir eine archaisch anmutende Zahlendarstellung, deren Anfang Tabelle 8 zeigt.

In dieser Notation *schwingen die Primzahlen*, das heißt genau die Pfeilketten, die *keine horizontalen Pfeile* aufweisen, repräsentieren unzerlegbare Zahlen. Sobald sich diese Notation durchgesetzt hat, werden Primzahltests überflüssig. Man muss dann die Zahlen nur noch hinschreiben und anschauen. ;-)

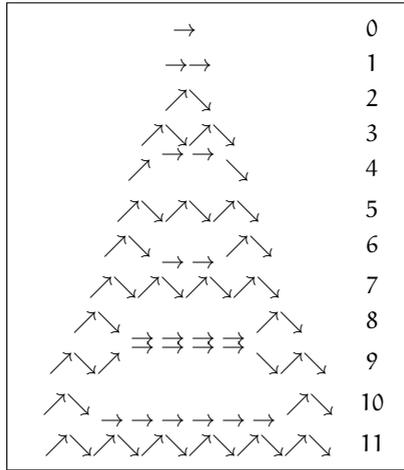


Tabelle 8 – Eine schwingende Notation mit Primzahlerkennung.

## DIE LOUISA-ZAHLEN

## 6.1 DAS KOMPLEMENT DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.

Die im Satz 1 aufscheinende natürliche Schranke  $\ell_p(n!) \leq \log_p(n)$  legt es nahe, auch das *Komplement der schwingenden Fakultät* zu betrachten

$$\begin{aligned} \ell_p(\mathcal{L}(n)) &= \lfloor \log_p(n) \rfloor - \ell_p(n!) , \\ \mathcal{L}(n) &= \prod_{2 \leq p \leq n} p^{\ell_p(\mathcal{L}(n))} \quad (p \text{ prim}) . \end{aligned} \quad (6.1)$$

Diese Zahlen setzen die schwingende Fakultät in das Verhältnis zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen der ersten  $n$  Zahlen,

$$\text{lcm } n = \text{lcm}\{1, 2, 3, \dots, n\} ,$$

denn es gilt ja  $\text{lcm } n = \prod_{2 \leq p \leq n} p^{\lfloor \log_p(n) \rfloor}$ ,  $p$  prim. Mit anderen Worten: Definition (6.1) besagt

$$\mathcal{L}(n) = \frac{\text{lcm } n}{n!} . \quad (6.2)$$

Damit erhalten wir die Zerlegung  $\text{lcm } n = \mathcal{L}(n)n!$ , die im Mittelpunkt der Überlegungen dieses Kapitels stehen wird. Und da der Nenner der alternierenden harmonischen Zahlen gerade  $\text{lcm } n$  ist, folgt aus (1.37)

$$\mathcal{L}(n)n!^{\prime} = \tilde{H}_n \text{lcm } n .$$

Wir werden nun sehen, dass *das Studium des Wachstums dieser Zahlen  $\mathcal{L}(n)$  äquivalent ist zum Studium des Restglieds im Primzahlsatz*. Da diese Zahlen bis jetzt offenbar noch nicht studiert wurden, möchte ich vorschlagen, ihnen einen literarisch ansprechenden Namen zu geben, und sie *Louisa-Zahlen* <sup>(1)</sup> zu nennen.

<sup>1</sup> Ähnlich wie Astronomen ein Vorschlagsrecht für den Namen von ihnen entdeckter Objekte haben, sollten Mathematiker dies bei Folgen ganzer Zahlen auch haben. Die systematische Katalog-Nummer (etwa bei OEIS A180000) bleibt davon unberührt.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{L}(n)$	1	1	1	1	2	2	3	3	12	4	10	10	30	30

Tabelle 9 – Die Louisa-Zahlen  $\mathcal{L}(n)$ 

Sei nun die Funktion  $V$  so definiert: Wenn es genau eine Primzahl gibt, die  $k$  teilt, dann ist  $V(k)$  diese Primzahl und 1 sonst. Damit hat  $\mathcal{L}(n)$  folgende explizite Darstellung

$$\mathcal{L}(n) = 2^{-n} \prod_{1 \leq k \leq n} V(k) \left(\frac{k}{2}\right)^{(-1)^k}. \quad (6.3)$$

Da bekanntlich  $\text{lcm } n = \prod_{1 \leq k \leq n} V(k)$  ist, folgt (6.3) aus der Produkt-darstellung der schwingenden Fakultät (1.14). Man sieht, dass  $n$  genau dann prim ist, wenn  $\mathcal{L}(n) = \mathcal{L}(n-1)$ . Primzahlen liefern also keinen Beitrag zu diesem Produkt. Allgemeiner können wir ein Gegenstück zu Satz 1 formulieren, das die Primzahlzerlegung der Louisa-Zahlen angibt.

**Satz 12** Sei  $\ell_p(\mathcal{L}(n))$  der Exponent der Primzahl  $p$  in der Primzahlzerlegung von  $\mathcal{L}(n)$ . Dann gilt, wobei  $[ ]$  die Iverson-Klammer ist:

$$\ell_p(\mathcal{L}(n)) = \sum_{k \geq 1} \left[ \left[ \frac{n}{p^k} \right] \text{ even} \right] \quad (6.4)$$

Also ist  $\ell_p(\mathcal{L}(n)) \leq \log_p n$  und  $p^{\ell_p(\mathcal{L}(n))} \leq n$ . Für die Potenz einer ungeraden Primzahl  $p$  gilt  $\ell_p(\mathcal{L}(p^a)) = 0$ .

*Beweis:*

$$\ell_p(\mathcal{L}(n)) = \left[ \log_p n \right] - \sum_{k \geq 1} \left[ \left[ \frac{n}{p^k} \right] \text{ odd} \right] = \sum_{k \geq 1} \left[ \left[ \frac{n}{p^k} \right] \text{ even} \right] \diamond$$

## 6.2 BERECHNUNG DER LOUISA-ZAHLEN.

Die Dualität von schwingender Fakultät und Louisa-Zahlen drückt sich auch bei ihrer Berechnung aus. Die Korrektheit des folgenden Algorithmus folgt unmittelbar aus Satz 1 und Satz 12. Dabei wird geradezu zwingend die Betrachtung einer weiteren Größe nahe gelegt, der Cofakultät,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n <sub>j</sub>	1	1	1	1	2	2	3	3	48	16	40	40	270

Tabelle 10 – n<sub>j</sub> die Cofakultät von n.

die in einem analogen Verhältnis zu den Louisa-Zahlen steht wie die eulersche Fakultät zu der schwingenden Fakultät. Ihr werden wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden.

Im folgenden Rechenschema benutzen wir eine selbsterklärende algorithmische Notation und bezeichnen mit  $\text{Primes}[a, b]$  die Menge der Primzahlen  $a < p \leq b$ .

### 6.3 DIE COFAKULTÄT.

Nach dem selben Rekursionsschema, nach der sich die Fakultät aus der schwingenden Fakultät berechnet, berechnet sich die *Cofakultät* aus den Louisa-Zahlen. Sie ist für nichtnegative ganze Zahlen definiert als  $0_j = 1$  und

$$n_j = \lfloor n/2 \rfloor_j^2 \mathcal{L}(n) \quad (n \geq 1). \quad (6.5)$$

Damit erhalten wir unmittelbar folgende Identitäten:

$$n! = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor_j!^2} \quad \text{lcm } n = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor_j!^2} \mathcal{L}(n), \quad (6.6)$$

$$\mathcal{L}(n) = \frac{n_j}{\lfloor n/2 \rfloor_j^2} \quad \text{lcm } n = \frac{n_j}{\lfloor n/2 \rfloor_j^2} n!. \quad (6.7)$$

Folgerungen daraus sind zum Beispiel, dass  $n_j \text{lcm } n$  Teiler von  $n!$  ist und der Quotient  $n! / (n_j \text{lcm } n)$  eine Quadratzahl ist, sowie eine Darstellung von  $\text{lcm } n$ , die frei vom Bezug auf  $\mathcal{L}(n)$  oder  $n!$  ist.

$$\text{lcm } n = \frac{n! n_j}{(\lfloor n/2 \rfloor_j! \lfloor n/2 \rfloor_j)^2} \quad (6.8)$$

- $\ell_p(n)$ -	- $\ell_p(\mathcal{L}(n))$ -
<pre> SwingExp(m, n) s ← 0; p ← m loop q ← ⌊n/p⌋   if q = 0 then Return(s)   s ← s + [q odd]   p ← p × m end_loop </pre>	<pre> LouisaExp(m, n) s ← 0; p ← m loop q ← ⌊n/p⌋   if q = 0 then Return(s)   s ← s + [q even]   p ← p × m end_loop </pre>
- $n!$ -	- $\mathcal{L}(n)$ -
<pre> Swing(n) (n ≥ 0) a ← [1,1,2,6,6,30,20,140,70] if n &lt; 9 then Return(a[n]) P1 ← Primes[1, ⌊√n⌋] P2 ← Primes[⌊√n⌋, ⌊n/3⌋] P3 ← Primes[⌊n/2⌋, n] Return(   ∏<sub>p∈P1</sub> p^ SwingExp(p, n) ×   ∏<sub>p∈P2</sub> p^ [⌊n/p⌋ odd] ×   ∏<sub>p∈P3</sub> p ) </pre>	<pre> Louisa(n) (n ≥ 0) a ← [1,1,1,1,2,2,3,3,12] if n &lt; 9 then Return(a[n]) P1 ← Primes[1, ⌊√n⌋] P2 ← Primes[⌊√n⌋, ⌊n/3⌋] P3 ← Primes[⌊n/3⌋, ⌊n/2⌋] Return(   ∏<sub>p∈P1</sub> p^ LouisaExp(p, n) ×   ∏<sub>p∈P2</sub> p^ [⌊n/p⌋ even] ×   ∏<sub>p∈P3</sub> p ) </pre>
- $n!$ -	- $n_j$ -
<pre> Factorial(n) (n ≥ 0) if n = 0 then Return (1) else Return (Swing(n) ×   Factorial(⌊n/2⌋)^2) </pre>	<pre> CoFactorial(n) (n ≥ 0) if n = 0 then Return (1) else Return (Louisa(n) ×   CoFactorial(⌊n/2⌋)^2) </pre>

Tabelle 11 – Berechnung der Fakultät und Cofakultät

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
n <sub>*</sub>	1	1	2	6	48	240	2160	15120	1935360

Tabelle 12 – n<sub>\*</sub> die Sternfakultät von n.

**Satz 13** Die Cofakultät besitzt die Rekursionsgleichung

$$n_j = (n-1)_j \kappa_n$$

mit dem Rekursionsanfang  $1_j = 1$ . Mit  $V(n)$  wie in (6.3) ist der Schrittfaktor  $\kappa_n$  rekursiv gegeben durch  $\kappa_1 = 1$  und

$$\kappa_n = \left( \kappa_{\lfloor n/2 \rfloor} \right)^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} V(n) \left( \frac{n}{4} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( \frac{1}{n} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Den Spezialfall einer Primzahlpotenz  $n$  heben wir hervor.

$$\kappa_n = \begin{cases} 2^{2^m-1-m} & \text{falls } n = 2^m, \quad m > 0; \\ p^{1-m} & \text{falls } n = p^m, \quad p \text{ prim} \neq 2, \quad m > 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist  $n$  prim genau dann wenn  $\kappa_n = 1$ .

*Beweis:* Unmittelbar aus der expliziten Darstellung (6.3) folgt

$$\kappa_n = \frac{n_j}{(n-1)_j} = \left( \kappa_{\lfloor n/2 \rfloor} \right)^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} V(n) \left( \frac{n}{4} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor} \left( \frac{1}{n} \right)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Wenn  $n$  ungerade ist, ist  $\kappa_n = \mathcal{L}(n)/\mathcal{L}(n-1) = V(n)/n$  und daraus folgt der zweite Spezialfall. Wenn  $n$  dagegen gerade ist, ist

$$\kappa_n = \left( \kappa_{\lfloor n/2 \rfloor} \right)^2 \frac{n}{4} V(n).$$

Ist nun  $n = 2^m$ , dann ist  $V(n) = 2$  und  $\kappa_{2^m} = 2^{m-1} (\kappa_{2^{m-1}})^2$ . Diese Rekursionsgleichung lässt sich zum ersten Spezialfall auflösen.  $\diamond$

#### 6.4 DIE LOUISA-ZAHLEN ALS SUMMATORISCHE FUNKTION.

Der Logarithmus von  $V(n)$ ,  $\Lambda(n) = \log V(n)$ , ist als *Von-Mangoldt-Funktion* bekannt.

$$\Lambda(n) = [n = p^m] [p \text{ prim}] [m > 0] \log p$$

Mit ihr zeigt sich die Dualität von schwingender Fakultät und den Louisa-Zahlen besonders prägnant.

$$\log n! = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) \llbracket \lfloor n/k \rfloor \text{ odd} \rrbracket ; \quad (6.9)$$

$$\log \mathcal{L}(n) = \sum_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} \Lambda(k) \llbracket \lfloor n/k \rfloor \text{ even} \rrbracket . \quad (6.10)$$

*Beweis:* Die Bezeichnung  $\sum_{d|k}$  möge bedeuten, dass die Summe über alle Teiler von  $k$  läuft. Bekanntlich ist

$$\sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) \lfloor x/k \rfloor = \sum_{1 \leq k \leq x} \sum_{d|k} \Lambda(d) = \sum_{1 \leq k \leq x} \log k = \log [x]! .$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \log [x]! &= \log [x]! - 2 \log [x/2]! \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) \lfloor x/k \rfloor - \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) 2 \lfloor x/2k \rfloor \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) (\lfloor x/k \rfloor - 2 \lfloor x/2k \rfloor) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) \llbracket \lfloor x/k \rfloor \text{ odd} \rrbracket . \end{aligned}$$

Für den Logarithmus der Louisa-Zahlen ist

$$\begin{aligned} \log \mathcal{L}(\lfloor x \rfloor) &= \log \text{lcm} \lfloor x \rfloor - \log [x]! \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) - \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) \llbracket \lfloor x/k \rfloor \text{ odd} \rrbracket \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k) \llbracket \lfloor x/k \rfloor \text{ even} \rrbracket \end{aligned}$$

Da  $\llbracket \lfloor x/k \rfloor \text{ odd} \rrbracket = 1$  für  $\lfloor x/2 \rfloor < k \leq \lfloor x \rfloor$  ist, können wir die letzte Summe auf  $k \leq \lfloor x/2 \rfloor$  beschränken.  $\diamond$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tau(n)$	1	1	1	1	2	2	6	6	12	12	60	60	120

Tabelle 13 – Eine obere Schranke (6.13) der Louisa Zahlen

Aus (6.3) erhalten wir unmittelbar eine weitere Darstellung des Logarithmus der Louisa-Zahlen.

$$\log \mathcal{L}(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \left( \Lambda(k) + (-1)^k \log k - [k \text{ even}] \log 4 \right). \quad (6.11)$$

Um noch ein Gegenstück zu der Darstellung der alternierenden logarithmischen Summe (2.18) anzugeben, definieren wir

$$\Upsilon(n) = (-1)^n \log_2 n + \log_2 V(n).$$

Mit der Möbius-Funktion  $\mu$  schreibt sich die Von-Mangoldt-Funktion  $\Lambda(n) = -\sum_{d \mid n} \mu(d) \log d$  (vgl. [5, S.33]), und so folgt

$$\Upsilon(n) = -\sum_{d \mid n, d < n} \mu(d) \log_2 d + ((-1)^n - \mu(n)) \log_2 n.$$

Wir sehen:  $\Upsilon$  gewichtet die *echten* Teiler von  $n$  genauso wie die Von-Mangoldt-Funktion, nicht aber  $n$  selber. Damit erhalten wir

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \Upsilon(k) = \log_2 \mathcal{L}(n) + n - [n \text{ odd}]. \quad (6.12)$$

## 6.5 EINE OBERE SCHRANKE FÜR DIE LOUISA-ZAHLEN.

**Lemma 14**  $\mathcal{L}(n) \mid \text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor$ .

*Beweis:*  $\mathcal{L}(n)$  ist Teiler von  $\text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor$  weil jede Primzahlpotenz  $p^k$ , die  $\mathcal{L}(n)$  teilt, auch  $\text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor$  teilt. Denn die Primzahlexponenten schrei-

ben sich unter Verwendung der Iverson-Klammer

$$\begin{aligned}
 \ell_p(\mathcal{L}(n)) &= \sum_{k \geq 1} \left[ \left[ \frac{n}{p^k} \right] \text{even} \right] \\
 &= \sum_{k \geq 1} \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{n}{p^k} \right] \right] = \left[ \frac{n}{2p^k} \right] \\
 &\leq \sum_{k \geq 1} \left[ \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{p^k} \right] \\
 &= \left[ \log_p \lfloor n/2 \rfloor \right] \\
 &= \ell_p(\text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor) \quad \diamond
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun das endliche Produkt schwingender Fakultäten

$$\tau(x) = \prod_{k \geq 1} \left[ \frac{x}{2^k} \right] \quad (6.13)$$

**Satz 15** Es gelten für  $n \geq 1$  die Abschätzungen

$$\mathcal{L}(n) \leq \tau(n), \quad (6.14)$$

$$\ln(n) \tau(n) \leq n \ln 4 + \ln^2 n. \quad (6.15)$$

*Beweis:* Um  $\mathcal{L}(n) \leq \tau(n)$  zu zeigen, genügt es zu wissen, dass  $\mathcal{L}(n)$  Teiler von  $\text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor$  ist. Denn dann ist

$$\mathcal{L}(n) \leq \text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor = \lfloor n/2 \rfloor \wr \mathcal{L}(\lfloor n/2 \rfloor). \quad (6.16)$$

Lösen wir diese rekursive *divide-and-conquer* Ungleichung auf, erhalten wir  $\mathcal{L}(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor \wr \lfloor n/4 \rfloor \wr \dots \wr \left[ n/2^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \right] \wr$ . Dies ist gleichbedeutend mit (6.14). Nun zum Beweis von (6.15). Mit der oberen Schranke für die schwingende Fakultät (2.16) ist

$$\ln n \wr < n \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(n+1) - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \quad (n \geq 2).$$

Damit gewinnen wir für  $n \geq 3$  eine obere Schranke für  $\ln \tau(2n)$ .

$$\begin{aligned}
 \ln \tau(2n) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \ln \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \\
 &\leq \ln(2) \sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \ln(n/2^k + 1) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \ln 2\pi \\
 &\leq \ln(2)2n + \frac{1}{2 \ln 2} (\ln(n) + \ln(2)) \ln(n+1) - \frac{\ln 2\pi}{2 \ln 2} \ln(n) \\
 &\leq n \ln 4 + \frac{1}{2 \ln 2} \ln(n) \ln(n+1) \\
 &\leq n \ln 4 + \ln^2 n
 \end{aligned}$$

Da  $\tau(2n) = n \lambda \tau(n)$  folgt die Behauptung (6.15).  $\diamond$

## 6.6 EINE EINFACHE SCHRANKE FÜR LCM $n$ .

Mit der Schranke  $\mathcal{L}(n) \leq \tau(n)$  (6.14) gilt die Inklusion

$$n \lambda \leq n \lambda \mathcal{L}(n) \leq n \lambda \tau(n). \quad (6.17)$$

Mit der seit Tschebyschew verwendeten Notation  $\psi(n) = \ln \text{lcm } n$  und der Identität  $n \lambda \mathcal{L}(n) = \text{lcm } n$  können wir dies in logarithmischer Form schreiben als

$$\ln n \lambda \leq \psi(n) \leq \ln(n \lambda \tau(n)).$$

Mit der unteren Schranke (2.16) für  $\ln n \lambda$  und der oberen Schranke (6.15) für  $\ln(n \lambda \tau(n))$  folgt

$$n \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(n+1) - \frac{1}{4} \leq \psi(n) \leq n \ln 4 + \ln^2 n. \quad (6.18)$$

Damit gilt also die asymptotische Inklusion

$$\ln 2 \leq \frac{\psi(n)}{n} \leq \ln 4 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (6.19)$$

Neben den einfachen Schranken der schwingenden Fakultät ging in den Beweis die Teilbarkeitsrelation  $\mathcal{L}(n) \mid \text{lcm} \lfloor n/2 \rfloor$  ein. Um Inklusion (6.19) wesentlich zu verbessern müssen wir gute Schranken für die Louisa-Zahlen finden.

### 6.7 RESIDUALE ZERLEGUNGEN VON LCM $n$ .

In diesem Abschnitt streben wir eine Verallgemeinerung der bisherigen Überlegungen an. Dazu vergegenwärtigen wir uns, dass die wesentlichen Eigenschaften der schwingenden Fakultät in den beiden Teilbarkeitsrelationen  $n! \mid n!$  und  $n! \mid \text{lcm } n$  begründet sind. Daher streben wir eine Verallgemeinerung des *schwingenden Paares*  $(\mathcal{L}(n), n!)$  an. Deswegen Charakteristik ist es aber, eine multiplikative Zerlegung von  $\text{lcm } n$  zu sein.

Gesucht ist also eine Verfeinerung dieser Zerlegung, das heißt eine Familie von Funktionen  $\mathcal{L}_m^{(r)}$  dergestalt, dass  $\mathcal{L}_1^{(0)}(n) = \text{lcm } n$ ,  $\mathcal{L}_2^{(0)}(n) = \mathcal{L}(n)$ ,  $\mathcal{L}_2^{(1)}(n) = n!$ , ... mit der Eigenschaft

$$\text{lcm } n = \prod_{0 \leq r < m} \mathcal{L}_m^{(r)}(n) \quad (m \geq 1, n \geq 0). \quad (6.20)$$

Eine Definition, die diese Forderung abdeckt, gibt der nächste Satz.

**Satz 16**  $\Lambda$  bezeichne die Von-Mangoldt-Funktion,  $[ ]$  die Iverson-Klammer und  $\psi(n) = \ln(\text{lcm } n)$ . Für alle ganzen Zahlen  $n \geq 0$  und  $m \geq 1$  sei weiterhin

$$\lambda_m^{(r)}(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) \left[ \left[ \frac{n}{k} \right] \bmod m = r \right] \quad (0 \leq r < m).$$

Dann ist für alle  $m \geq 1$

$$\psi(n) = \sum_{0 \leq r < m} \lambda_m^{(r)}(n).$$

*Beweis:* Da  $\psi(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k)$  ist, ist die Behauptung äquivalent zu

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) = \sum_{0 \leq r < m} \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) \left[ \left[ \frac{n}{k} \right] \bmod m = r \right]. \quad (6.21)$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathcal{L}_3^{(0)}(n)$	1	1	1	1	1	1	2	2	1	3	3	3
$\mathcal{L}_3^{(1)}(n)$	1	1	2	6	6	30	10	70	140	420	42	462
$\mathcal{L}_3^{(2)}(n)$	1	1	1	1	2	2	3	3	6	2	20	20

Tabelle 14 –  $\mathcal{L}_3^{(r)}(n)$ , eine Zerlegung von lcm  $n$ .

Dies gilt, weil  $\sum_{0 \leq r < m} \left[ \left[ \frac{n}{k} \right] \bmod m = r \right] = 1$  für alle  $1 \leq k \leq n$  und  $m \geq 1$ .  $\diamond$

Der Fall  $m = 2$  besagt, dass  $\psi(n) = \lambda_2^{(0)}(n) + \lambda_2^{(1)}(n) = \ln \mathcal{L}(n) + \ln n!$  ist, und somit haben wir die gesuchte Verallgemeinerung gefunden. Die ganzzahlige Schreibweise ergibt sich mit der Festsetzung

$$\mathcal{L}_m^{(r)}(n) = \exp(\lambda_m^{(r)}(n)).$$

Tabelle 14 listet einige Werte des Falls  $m = 3$  auf. Kehren wir zu Satz 1 zurück, den wir nun in folgender Form verallgemeinern können.

**Satz 17** Für alle ganzen Zahlen  $n \geq 0$  und  $m \geq 1$  gilt

$$\mathcal{L}_m^{(r)}(n) = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ prim}}} p^{\ell_m^{(r)}(n,p)} \quad (0 \leq r < m), \quad (6.22)$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen läuft, die  $n$  nicht übersteigen und

$$\ell_m^{(r)}(n,p) = \sum_{1 \leq k \leq \log_p n} \left[ \left[ \frac{n}{p^k} \right] \bmod m = r \right].$$

*Beweis.* Da  $\Lambda(k) = 0$  falls  $k$  keine Primzahlpotenz ist und  $\Lambda(p^k) = \log p$ , ist

$$\begin{aligned} \lambda_m^{(r)}(n) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) \left[ \left[ \frac{n}{k} \right] \bmod m = r \right] \\ &= \sum_{p \leq n} \sum_{1 \leq k \leq \log_p n} \left[ \left[ \frac{n}{p^k} \right] \bmod m = r \right] \log p \\ &= \sum_{p \leq n} \ell_m^{(r)}(n,p) \log p. \end{aligned}$$

Dies ist die logarithmische Form der behaupteten Identität.  $\diamond$

## 6.8 VERALLGEMEINERTE LOUISA-ZAHLEN.

Es bieten sich zwei natürlich erscheinende Möglichkeiten an, den Begriff der Louisa-Zahl zu verallgemeinern. Zum einem kann man

$$\mathcal{L}_k(n) = \prod_{1 \leq j \leq \lfloor n/k \rfloor} V(j)^{\lfloor k \lfloor n/j \rfloor \rfloor} \quad (6.23)$$

setzen (was das selbe ist wie  $\mathcal{L}_k(n) = \mathcal{L}_k^{(0)}(n)$ ), oder

$$\mathcal{L}_k^*(n) = \frac{\text{lcm } n}{n!} [n/k]!^k. \quad (6.24)$$

Da  $\text{lcm } n / \text{lcm}(n-1) = e^{\wedge(n)} = V(n)$  ist, besitzen diese Zahlen die Rekursionsgleichung

$$\mathcal{L}_k^*(n) = \mathcal{L}_k^*(n-1) \frac{V(n)}{n} \left( \frac{n}{k} \right)^{k \lfloor k \lfloor n \rfloor \rfloor} \quad (n > 0) \quad (6.25)$$

mit dem Rekursionsanfang  $\mathcal{L}_k^*(0) = 1$ . Wir sehen, dass in dieser Rekursion die Primzahlen *ausgesiebt* werden, denn wenn  $n$  eine Primzahl ist, dann ist  $V(n) = n$  und  $(n/k)^{k \lfloor k \lfloor n \rfloor \rfloor} = 1$ .

Die bisher betrachteten Louisa-Zahlen bekommt man für  $k = 2$  sowohl als  $\mathcal{L}_2(n)$  wie als  $\mathcal{L}_2^*(n)$  zurück, wie wir bereits gesehen haben. Und in beiden Fällen gibt  $k = 1$  das  $\text{lcm } n$ .

Die Beziehungen zwischen den verallgemeinerten Louisa-Zahlen führen auf ein Feld, das wir hier nicht betreten wollen. Wer es erkunden mag, dem sei als *worming-up* der Beweis der nächsten Gleichung empfohlen.

$$\frac{\mathcal{L}_3^{(0)}(n)}{\mathcal{L}_3^{(2)}(n)} = \mathcal{L}_3^*(n).$$

## 7.1 ASYMPTOTIK DER LOUISA-ZAHLEN.

In diesem Kapitel wollen wir die Verteilung der Primzahlen mit Hilfe der schwingenden Fakultät und den Louisa-Zahlen betrachten. Insbesondere werden wir den Zusammenhang mit der Psi-Funktion  $\psi(x)$  von Tschebyschow untersuchen.

$$\psi(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} [n = p^m] [p \text{ prim}] [m > 0] \log p$$

Äquivalent zu dieser Definition ist  $\psi(x) = \sum_{1 \leq k \leq x} \Lambda(k)$ , wobei  $\Lambda(n)$  die Von-Mangoldt-Funktion ist. Wir werden auch Gebrauch machen von der Identität  $\psi(x) = \log \text{lcm } x$ , wobei  $\text{lcm } x = \text{lcm}\{1, 2, 3, \dots, [x]\}$  ist.

Für positive reelle Werte  $x$  setzen wir die Louisa-Zahlen fort durch  $\mathcal{L}(x) = \text{lcm}(x)/x!$ . Damit können wir allgemeiner  $\psi(x) = \log \mathcal{L}(x) + \log x!$  betrachten. Eine explizite analytische Darstellung der Louisa-Funktion kann man gewinnen, indem man diese Relation in von Mangoldts *explizite Formel* für  $\psi(x)$  einsetzt.

Genauere Informationen über das Wachstum des Komplements der schwingenden Fakultät zu erhalten, ist wesentlich schwieriger als bei der schwingenden Fakultät selber. Es gilt die asymptotische Gleichheit

$$\log \mathcal{L}(x) \sim x(1 - \log 2), \quad (7.1)$$

wobei die Schreibweise  $f(x) \sim g(x)$  besagt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$ . Um dies zu zeigen, machen wir von der zum Primzahlsatz äquivalenten Relation  $\psi(x) \sim x$  Gebrauch. Mit der aus (2.17) folgenden asymptotischen Gleichheit von  $\log x!$  und  $x \log 2$  ist damit

$$x \log 2 + \log \mathcal{L}(x) \sim \log x! + \log \mathcal{L}(x) = \log(x! \mathcal{L}(x)) = \psi(x) \sim x,$$

folglich  $\log \mathcal{L}(x) \sim x(1 - \log 2)$ . Damit lässt sich der Primzahlsatz formulieren unter alleinigem Bezug auf die Louisa-Zahlen. Denn umgekehrt folgt natürlich aus  $\log \mathcal{L}(x) \sim x(1 - \log 2)$  sofort  $\psi(x) \sim x$ .

## 7.2 VON MANGOLDTS EXPLIZITE FORMEL.

Eine Summe über die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion auszuwerten ist sicher ein nichttriviales Unterfangen, in einem wichtigen Fall jedoch möglich dank von Mangoldts sogenannter *expliziter Formel*, die als eine der Höhepunkte der analytischen Zahlentheorie gilt. (Ein ausführlicher Beweis der Formel findet sich bei H. M. Edwards [24].)

$$\sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} = x - \ln \operatorname{lcm} x - \ln(1 - x^{-2})/2 - \ln(2\pi) \quad (7.2)$$

Die Summe auf der linken Seite konvergiert, aber nur bedingt, muss also in der Reihenfolge steigender  $|\operatorname{Im} \rho|$ -Werte summiert werden. Mit unserer Zerlegung von  $\operatorname{lcm} x$  können wir auch schreiben

$$\sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} = \begin{cases} x(1 - \ln 2) - \ln \mathcal{L}(x) - \ln(1 - x^{-2})/2 - \ln(4\pi)/2 \\ - \cos(x\pi) \ln(\Gamma(x/2 + 1/2)/\Gamma(x/2 + 1)) \end{cases} \quad (7.3)$$

Obwohl länger, ist die zweite Formel in einem gewissen Sinn einfacher als die erste: Zur Berechnung von  $\ln \operatorname{lcm} x$  in der ersten Formel braucht man die Kenntnis aller Primzahlen  $p \leq \lfloor x \rfloor$ , zur Berechnung von  $\ln \mathcal{L}(x)$  in der zweiten Formel nur die Kenntnis der Primzahlen  $p \leq \lfloor x/2 \rfloor$ .

Das kann man als ein geglücktes *divide-and-conquer* Ergebnis deuten. Weiterer rechnerischer Gewinn ist erzielbar, wenn man sich zur näherungsweisen Bestimmung der Summe noch der asymptotischen Entwicklung der schwingenden Fakultät bedient.

*Beispiel:* Da  $\operatorname{lcm} 100 = 69720375229712477164533808935312303556800$  und  $\mathcal{L}(100) = 691044167800$  lautet in diesem Fall die Gleichung (7.2)

$$\sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{100^\rho}{\rho} = \begin{cases} 100 - \ln(1 - 1/10000)/2 - \ln(2\pi) \\ - \ln 69720375229712477164533808935312303556800 \end{cases}$$

und die Gleichung (7.3)

$$\sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{100^\rho}{\rho} = \begin{cases} 100(1 - \ln 2) - \ln(1 - 1/10000)/2 - \ln(4\pi)/2 \\ + \ln \Gamma(101/2) - \ln \Gamma(51) - \ln 691044167800. \end{cases}$$

Maple evaluiert tatsächlich beide Gleichungen zu 4,1168617... Und selbst folgende einfache asymptotische Formel berechnet noch mühelos 3 richtige Dezimalstellen 4,114...

$$\sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{n^\rho}{\rho} \sim n(1 - \ln(2)) - \ln \mathcal{L}(n) + \frac{(-1)^n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{\ln(4\pi)}{2} \quad (7.4)$$

### 7.3 RIEMANNNS HYPOTHESE REDUZIERT.

Bekanntlich ist die *riemannsche Hypothese* [6, S.211] genau dann wahr, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $\psi(x) = x + O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon})$ . ( $O_\varepsilon$  bedeutet, dass die implizite Konstante von  $\varepsilon$  abhängen darf.) Schreiben wir die Hypothese in der Form

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) = n + O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}) \quad (7.5)$$

und zerlegen auf der linken Seite

$$\Lambda(k) = \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ even}] + \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ odd}] .$$

Hierin ist der *ungerade Teil* mit der asymptotischen Entwicklung der schwingenden Fakultät

$$\log n! = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ odd}]$$

asymptotisch vollständig beschrieben:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ odd}] = n \log 2 - \frac{(-1)^n}{2} \log \frac{n}{2} - \frac{\log \pi}{2} + O(n^{-1}) .$$

So reduziert sich die riemannschen Hypothese mit (6.10) auf die rein zahlentheoretische Aussage

$$\sum_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ even}] = n(1 - \log 2) + O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}) . \quad (7.6)$$

In dieser reduzierten Form ist die riemannsche Hypothese eine Verschärfung der asymptotischen Gleichheit der Louisa-Zahlen

$$\log \mathcal{L}(x) \sim x(1 - \log 2)$$

zu einer Aussage über die Größenordnung des Fehlers

$$\log \mathcal{L}(x) = x(1 - \log 2) + O_\varepsilon \left( x^{1/2+\varepsilon} \right) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0. \quad (7.7)$$

Vom allgemeinen Standpunkt des *divide-and-conquer* her gesehen haben wir hier die Zerlegung eines schwierigen Problems in zwei Teilprobleme erreicht, von denen sich das eine einfach behandeln lässt.

#### 7.4 SCHWINGENDE SCHRANKEN DER LOUISA-ZAHLEN.

In diesem Abschnitt setzen wir den Primzahlsatz in der Form  $\log \mathcal{L}(x) \sim x(1 - \log 2)$  voraus. Damit zeigen wir:

**Satz 18** Für hinreichend großes  $n$  gilt folgende Inklusion der Louisa-Zahlen:

$$\lfloor n/3 \rfloor \wr \leq \mathcal{L}(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor \wr \quad (n \geq N_0). \quad (7.8)$$

Zusatz: Die untere Schranke gilt für  $n \geq 96$  und die obere Schranke für  $n \geq 285$ , was wir hier nicht beweisen.

*Beweis:* Die Inklusion ist asymptotisch gültig, denn nach (7.1) und (2.8) ist  $\log(\lfloor n/3 \rfloor \wr) \sim n \log(2)/3 \approx 0,231n$ ,  $\log \mathcal{L}(n) \sim n(1 - \log 2) \approx 0,307n$  und  $\log(\lfloor n/2 \rfloor \wr) \sim n \log(2)/2 \approx 0,347n$ .  $\diamond$

Multipliziert man (7.8) mit  $n\wr$ , so folgt die asymptotische Inklusion

$$\log(\lfloor n/3 \rfloor \wr n\wr) \leq \psi(n) \leq \log(\lfloor n/2 \rfloor \wr n\wr) \quad (n \geq N_0) \quad (7.9)$$

Damit gelten asymptotisch die Schranken

$$0,9241 \approx \frac{4}{3} \log 2 \leq \frac{\psi(n)}{n} \leq \frac{3}{2} \log 2 \approx 1,0398 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die obere Schranke gilt sogar für alle  $n > 0$ , und die untere Schranke für  $n > 58$  (siehe [76]). Vergleichen wir diese Schranken mit denen Tschebyschews [14]

$$0,9212 \approx C \leq \frac{\psi(n)}{n} \leq \frac{6}{5}C \approx 1,1056 \quad (n \rightarrow \infty),$$

wobei  $C = \log(2)/2 + \log(3)/3 + \log(5)/5 - \log(30)/30$ , so sehen wir, dass die auf der Inklusion der Louisa-Zahlen (7.8) beruhende Inklusion von  $\psi(n)/n$  schärfer ist und die Schranken einfacher ausfallen.

### 7.5 DARSTELLUNGEN MIT PSI UND ZETA.

Die Beziehung zwischen  $\psi(x)$  auf der einen Seite und  $\log x!$  und  $\log \mathcal{L}(x)$  fasst der nächste Satz zusammen.

#### Satz 19

$$\log [x]! = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \psi(\lfloor x/k \rfloor), \quad (7.10)$$

$$\log \mathcal{L}[x] = \sum_{k \geq 2} (-1)^k \psi(\lfloor x/k \rfloor). \quad (7.11)$$

*Beweis:* Dies folgt aus der Beziehung von Tschebyschow (siehe etwa Landau [47, S. 77])

$$\log [x]! = \sum_{k \geq 1} \psi(\lfloor x/k \rfloor)$$

und den Darstellungen

$$\log [x]! = \log [x]! - 2 \log [x/2]! \quad \text{und} \quad \log \mathcal{L}[x] = \psi[x] - \log [x]! \quad \diamond$$

Aus der Darstellung [24, p. 50] von  $\psi(x)$  mittels eines Konturintegrals

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds$$

folgen nun mit (7.10) und (7.11) die Darstellungen

$$\log [x]! = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} (1 - 2^{-s} + \dots \pm [x]^{-s}) \frac{x^s}{s} ds,$$

$$\log \mathcal{L}[x] = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} (2^{-s} - 3^{-s} + \dots \pm [x]^{-s}) \frac{x^s}{s} ds.$$

## 7.6 EIN TRANSFERSATZ.

Ziel der vorangegangenen Überlegungen war es, Informationen über die Verteilung der Primzahlen zu erhalten. Dazu benötigen wir noch eine einfache *Transferrelation*, die Schranken der Fluktuation von  $\log \mathcal{L}(x)$  um ihren asymptotischen Wert in entsprechende Schranken für die Abweichung  $\psi(x) - x$  sowie von  $\pi(x) - \text{li}(x)$  überführt. Dabei bezeichnet  $\pi(x)$  die Anzahl der Primzahlen, die  $x$  nicht übersteigen und  $\text{li}(x)$  das logarithmische Integral, das definiert ist als der Cauchy-Hauptwert von  $\int_0^x \frac{dt}{\log t}$ .

**Satz 20** Sei  $\varepsilon(x)$  für reelles  $x \geq 2$  definiert und nicht fallend. Wenn

$$|\log \mathcal{L}(x) - x \log(e/2)| \leq \varepsilon(x),$$

dann gelten für  $x \geq 2$  auch die Schranken

$$|\psi(x) - x| \leq \varepsilon(x) + \log(x+1)/2 + \log(\pi/2)/2 =_{\text{def}} E(x),$$

$$|\pi(x) - \text{li}(x)| \leq 2E(x)/\log(x) + (3/2)E(\sqrt{x}) + C\sqrt{x} \quad (C > 0).$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} |\psi(x) - x| &= |\log \mathcal{L}(x) - x(1 - \log 2) + \log x - x \log 2| \\ &\leq |\log \mathcal{L}(x) - x \log(e/2)| + |\log x - x \log 2| \end{aligned}$$

und daraus mit (2.17) die erste Behauptung. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 3.1 in [22].  $\diamond$

Satz 20 zeigt, dass der Betrag der Fluktuation der Anzahl der Primzahlen um  $\text{li}(x)$  ganz aus der Fluktuation der Louisa-Zahlen um ihren asymptotischen Wert herauszulesen ist.

## 7.7 EINE NUMERISCHE EXPLORATION.

Zur *Veranschaulichung* der Situation bietet sich damit als einfaches *qualitatives analytisches Modell* für den Logarithmus der Louisa-Zahlen, das auch den schwingenden Charakter zum Ausdruck bringt, die Näherung

$$\tilde{x} = x(1 - \ln 2) - \sqrt{x} \cos(\pi x) \ln 2$$

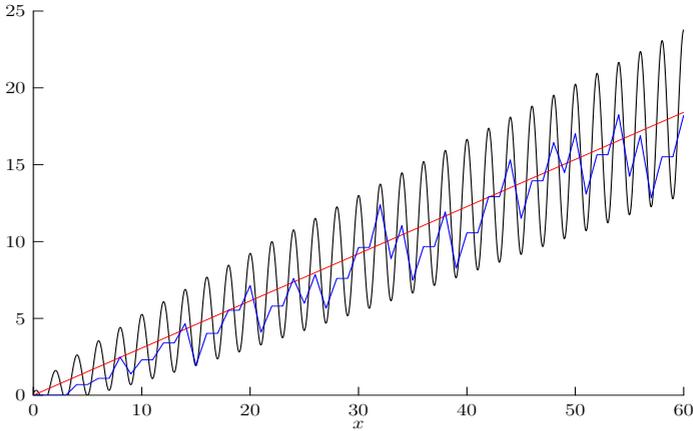


Abbildung 4 – Die Fluktuation der Louisa-Zahlen.

an. Abbildung 4 vergleicht  $\ln \mathcal{L}(x)$  (Streckenzug) mit der Näherung  $\tilde{x}$  (regelmäßige Schwingung) und der Asymptote  $x(1 - \ln 2)$ .

Angeregt durch die Abschätzungen im Transfersatz (Satz 20) wurde in einer numerischen Exploration der Versuch gemacht, den kleinsten Wert  $n$  zu finden, für den  $|\ln \mathcal{L}(n) - n(1 - \ln 2)| > \sqrt{n}$  ausfällt. Mit der zur Verfügung stehenden Rechnerstärke war ein solcher Wert nicht zu finden. Genauer gesagt, es wurde die Relation

$$n \leq N \implies |\ln \mathcal{L}(n) - n(1 - \ln 2)| < n^{\text{eps}(N)}$$

numerisch betrachtet, wobei  $n$  auf Werte  $\leq 10^9$  beschränkt war.

Tabelle 15 zeigt die wichtigsten gefundenen Schwellenwerte. Dabei gibt  $\text{sgn} = \text{signum}(\ln \mathcal{L}(n) - N(1 - \ln 2))$  an, ob die Louisa-Zahlen den asymptotischen Wert unterschreiten (–) oder überschreiten (+).

Drückt man das Ergebnis mit Hilfe des Transfersatzes für  $\psi(n)$  aus, erhält man

$$|\psi(n) - n| \leq n^{0,4874} + \ln(n+1)/2 + \ln(\pi/2)/2 \quad (2 \leq n \leq 10^9) .$$

Es ist interessant diesem Befund die Schranke gegenüberzustellen, die bekanntermaßen [76] äquivalent zur riemannschen Hypothese ist

$$|\psi(n) - n| \leq 2n^{0,5} \ln^2(n) \quad (100 \leq n) .$$

N	$\text{eps}(N)$	sgn	N	$\text{eps}(N)$	sgn
14	0,145	–	302.828	0,4732	–
56	0,361	–	12.871.811	0,4743	+
94	0,381	–	30.669.409	0,4748	+
220	0,424	–	110.102.617	0,4837	–
1.420	0,449	–	1.000.000.000	0,4874	+

Tabelle 15 – Schranken der Fluktuation der Louisa-Zahlen.

Zahlentheoretiker wissen aber auch, dass nichts so trügerisch sein kann wie die Betrachtung der Primzahlen in einem Anfangsabschnitt der natürlichen Zahlen.

Teil III

ANWENDUNGEN VON  $N_2$  IN DER  
KOMBINATORIK

# 8

## KOMBINATORISCHE PYRAMIDEN

---

### 8.1 EINE ERWEITERUNG DES BINOMIALKOEFFIZIENTEN.

Den Weg zur additiven Berechnung der schwingenden Fakultät im ganzzahligen Fall weist uns das pascalsche Dreieck. Allerdings müssen wir das Verhältnis der schwingenden Fakultät zu den Binomialkoeffizienten nun genauer angeben, als bei unseren einführenden Bemerkungen. Denn wir brauchen ein pascalsches Dreieck, in dem die schwingende Fakultät *stets* der mittlere Koeffizient ist, und nicht nur in den geraden Fällen.

Dazu definieren wir den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten für ganzzahlige  $n \geq 0$ ,  $m \geq 1$  als  $B_{n,k}^{(m)} = 0$  falls  $k < 0$  oder  $k > mn$ , sonst

$$B_{n,k}^{(m)} = \frac{n!}{(n - \lceil k/m \rceil)! \lceil k/m \rceil!} \quad (0 \leq k \leq mn) . \quad (8.1)$$

Im Weiteren werden wir nur den Fall  $m = 2$  betrachten und wollen dafür eine suggestivere Schreibweise und eine natürlichere Indizierung wählen. Dazu setzen wir

$$\binom{n}{k}_2 = B_{n,n+k}^{(2)} \quad (n \geq 0, -n \leq k \leq n) .$$

Damit erhalten wir folgende symmetrische Darstellung

$$\binom{n}{k}_2 = \frac{n!}{\Omega_{n-k}! \Omega_{n+k}!}, \quad \text{wobei } \Omega_x := \frac{1}{2}(x - [x \text{ odd}]) . \quad (8.2)$$

Man sieht, dass der zentrale Term dieses verallgemeinerten Binomialkoeffizienten gerade die schwingende Fakultät ist, dass also gilt  $\binom{n}{0}_2 = n!$ . Unmittelbar sieht man  $\binom{n}{n}_2 = 1$ ,  $\binom{n}{n-1}_2 = n$ . Auch die Symmetrieleration ist klar

$$\binom{n}{k}_2 = \binom{n}{-k}_2 \quad (0 \leq k \leq n) . \quad (8.3)$$

$n \setminus k$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
0							1						
1						1	1	1					
2					1	2	2	2	1				
3				1	3	3	6	3	3	1			
4			1	4	4	12	6	12	4	4	1		
5		1	5	5	20	10	30	10	20	5	5	1	
6	1	6	6	30	15	60	20	60	15	30	6	6	1

Tabelle 16 – Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}_2$ 

Setzen wir  $\binom{n}{n}_2 = \binom{n}{-n}_2 = 1$  und  $\binom{n}{n-1}_2 = \binom{n}{1-n}_2 = n$ , so besitzen die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten für  $n \geq 2$  und  $-n+2 \leq k \leq n-2$  die Rekursionsgleichung

$$\binom{n}{k}_2 = \binom{n-1}{k-1}_2 + [n-k \text{ odd}] \binom{n-1}{k}_2 + \binom{n-1}{k+1}_2. \quad (8.4)$$

Um dies zu zeigen setzen wir zur Abkürzung

$$s_{n,k} = \Omega_{n-k}! \Omega_{n+k}!.$$

Damit schreibt sich die Rekursionsgleichung

$$\frac{n!}{s_{n,k}} = \frac{(n-1)!}{s_{n-1,k-1}} + [n-k \text{ odd}] \frac{(n-1)!}{s_{n-1,k}} + \frac{(n-1)!}{s_{n-1,k+1}}.$$

Für  $n \geq 2$  und  $-n+2 \leq k \leq n-2$  ist dies gleichbedeutend mit

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k-1}} + [n-k \text{ odd}] \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k}} + \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k+1}}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist  $n$ , aber auch die rechte Seite, weil

$$\frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k-1}} = \frac{n}{2} + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} [n-k \text{ odd}],$$

$$[n-k \text{ odd}] \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k}} = [n-k \text{ odd}],$$

$$\frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k+1}} = \frac{n}{2} - \frac{k}{2} - \frac{1}{2} [n-k \text{ odd}]. \quad \diamond$$

Betrachtet man die Tabelle (16), so sieht man, wie das klassische binomische Dreieck darin eingebettet ist: Bildlich entsteht das pascalsche Dreieck  $\binom{n}{k}$  aus  $\binom{n}{k}_2$  durch Weglassen aller Einträge, bei denen  $n$  und  $k$  verschiedene Paritäten haben. Formal ist für  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{2k-n}_2 = \binom{n}{k} \quad \text{und} \quad \binom{n}{2k-n-1}_2 = \binom{n}{k} k. \quad (8.5)$$

## 8.2 REKURSIVE PYRAMIDEN.

**Definition 21** Eine Abzählung  $\Delta : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  nennen wir eine rekursive Zahlenpyramide, wenn

$$\Delta_{n,n} = 1 \quad \text{für } n \geq 1 \quad (8.6)$$

$$|\Delta_{n,-k}| = |\Delta_{n,k}| \quad \text{für alle } n, k \quad (8.7)$$

$$\Delta_{n,k} = 0 \quad \text{für } |k| > n \quad (8.8)$$

gilt und es Zahlen  $\tau_{n,k}$  gibt, mit denen sich  $\Delta$  rekursiv berechnen lässt mittels

$$\Delta_{n,k} = \Delta_{n-1,k-1} + \tau_{n,k} \Delta_{n-1,k} + \Delta_{n-1,k+1} \quad (n \geq 1). \quad (8.9)$$

Dabei gelte  $\Delta_{n+1,n} = \sum_{0 \leq k \leq n} \tau_{k+1,k}$ . Gibt es außerdem nicht negative ganze Zahlen  $w_m^n$  mit  $w_m^0 = 1$  für alle  $m$ , so dass die Konvolutionsgleichung

$$\sum_{k=-n}^n w_{m-k}^{n-k} \Delta_{n,k} \Delta_{m,k} = \Delta_{n+m,0} \quad (n, m \geq 0) \quad (8.10)$$

erfüllt wird, sprechen wir von einer Pyramide vom binomischen Typ. Gilt dagegen die Konvolutionsgleichung in der Form

$$\sum_{k=0}^n w_{m+1-k}^{n-k} \Delta_{n,k} \Delta_{m+1,k} = \Delta_{n+m,1} \quad (n, m \geq 0), \quad (8.11)$$

so sprechen wir von einer Pyramide vom catalanischen Typ.

Für den ähnlichen Begriff der *rekursiven Matrix* verweisen wir auf die Arbeiten von Martin Aigner in [2] und [3].

Ist  $\Delta$  eine rekursive Pyramide, so nennen wir die Folge  $Z_n = \Delta_{n,0}$  ( $n \geq 0$ ) das *Zentrum* der Pyramide und  $\Delta_{0,0}$  die *Spitze* der Pyramide. Man bemerke, dass wir in (8.6) die Spitze der Pyramide *nicht* festgelegt haben. Weiter lässt sich eine rekursive Pyramide zu einer rekursiven Doppelpyramide  $\Delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  fortsetzen, indem man im Punkt  $(0,0)$  eine auf der Spitze stehende rekursive Pyramide aufbaut, bei der in der Rekursionsgleichung (8.9) die Koeffizienten  $\tau_{n,k}$  durch  $-\tau_{n,k}$  ersetzt werden. In diesem Fall erhält man dann die zusätzliche Relation  $\Delta_{-n,k} = (-1)^{n+k} \Delta_{n,k}$  ( $n \geq 1$ ).

Jeder Pyramide lässt sich in natürlicher Weise eine Folge von Laurent Polynomen zuordnen, deren Koeffizienten gerade die Einträge in der Pyramide sind,  $\lambda_n(x) = \sum_{k=-n}^n \Delta_{n,k} x^k$ . Wir nennen diese die zur Pyramide assoziierten Laurent-Polynome.

Weiter nennen wir eine Pyramide  $R$  die *Ableitung der Pyramide*  $P$ , wenn die zu  $R$  assoziierten Polynome  $r_n(x)$  zu den assoziierten Polynomen  $p_n(x)$  von  $P$  in der Beziehung stehen

$$r_n(x) = \frac{x}{n} \frac{d}{dx} p_n(x).$$

### 8.3 DIE SCHWINGENDE PYRAMIDE.

**Satz 22** Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}_2$  bilden eine rekursive Pyramide (Tabelle 16) vom binomischen Typ, deren Zentrum die schwingende Fakultät  $n!$  ist.

*Beweis:* Wir setzen  $\Delta_{n,k} = \binom{n}{k}_2$ . Die Rand- und Symmetriebedingungen (8.6) sind nach Definition von  $\binom{n}{k}_2$  erfüllt. Mit  $\tau_{n,k} = [n-k \text{ odd}]$  gilt nach (8.4) auch die Rekursionsgleichung (8.9). Die Subdiagonale hat die Gestalt  $\binom{n+1}{n}_2 = \sum_{0 \leq k \leq n} \tau_{k+1,k}$ , denn  $\binom{n+1}{n}_2 = n+1$  und da  $\tau_{k+1,k} = [1 \text{ odd}] = 1$  ist auch  $\sum_{0 \leq k \leq n} \tau_{k+1,k} = n+1$ .

Beweisen wir nun die Konvolutionsgleichung (8.10). Zur besseren Übersichtlichkeit wählen wir die Schreibweise

$$\left[ \begin{matrix} n, m \\ k \end{matrix} \right] = 1 - [n-k \text{ odd}] [m-k \text{ odd}] \quad (8.12)$$

und definieren die Gewichtsfunktion als  $w_n^m = \left[ \begin{matrix} n, m \\ 0 \end{matrix} \right]$ . Die Konvolutions-

gleichung nimmt so die Form an

$$\sum_{k=-n}^n \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix} \binom{n}{k}_2 \binom{m}{k}_2 = (n+m)! \quad (n, m \geq 0). \quad (8.13)$$

Sei  $r_n = (\dots, 0, \binom{n}{-n}_2, \binom{n}{-n+1}_2, \dots, \binom{n}{0}_2, \binom{n}{1}_2, \dots, \binom{n}{n}_2, 0, \dots)$  die  $n$ -te Zeile. Das gewichtete Skalarprodukt der  $n$ -ten Zeile mit der  $m$ -ten Zeile (8.10) ist  $r_n r_m = \sum_k \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix} \Delta_{n,k} \Delta_{m,k}$ . Zu zeigen ist  $r_n r_m = \binom{n+m}{0}_2$ . Jedenfalls ist  $r_0 r_m = w_m^0 \binom{0}{0}_2 \binom{m}{0}_2 = \binom{m}{0}_2$ , denn  $w_m^0 = 1$  für alle  $m$ . Setzen wir jetzt voraus, dass die Behauptung richtig ist für alle  $i \leq n-1$  und alle  $m$ . Dann ist

$$\begin{aligned} r_n r_m &= \sum_{k=-n}^n \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix} \binom{n}{k}_2 \binom{m}{k}_2 \\ &= \sum_{k=-n}^n \begin{bmatrix} n, m \\ k \end{bmatrix} \left( \binom{n-1}{k+1}_2 + [n-k \text{ odd}] \binom{n-1}{k}_2 + \binom{n-1}{k-1}_2 \right) \binom{m}{k}_2 \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1, m+1 \\ k \end{bmatrix} \left( \binom{m}{k+1}_2 + [m-k \text{ odd}] \binom{m}{k}_2 + \binom{m}{k-1}_2 \right) \binom{n-1}{k}_2 \\ &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1, m+1 \\ k \end{bmatrix} \binom{m+1}{k}_2 \binom{n-1}{k}_2 \\ &= r_{n-1} r_{m+1} = \binom{n+m}{0}_2 \quad \diamond \end{aligned}$$

#### 8.4 SPEZIALFÄLLE DER BINOMISCHEN KONVOLUTION.

Ziehen wir einige Folgerungen aus Konvolutionsgleichung (8.13).

*Spezialfall*  $n \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor, m \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ : Diese Parameterersetzung führt auf eine Darstellung der schwingenden Fakultät, deren Anfangswerte in Tabelle 44 aufgeführt sind.

$$n! = \sum_{k=-n}^n \begin{bmatrix} \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil \\ k \end{bmatrix} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k}_2 \binom{\lceil n/2 \rceil}{k}_2. \quad (8.14)$$

*Spezialfall*  $m \leftarrow n$ : Da  $\begin{bmatrix} n, n \\ k \end{bmatrix} = [n+k \text{ even}]$  für alle  $n$  und  $k$ , gibt (8.13)

$$\sum_{k=-n}^n [n+k \text{ even}] \left( \binom{n}{k}_2 \right)^2 = (2n)! \quad (8.15)$$

Insbesondere erhalten wir

$$2 \sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k}_2^2 = (4n)_! - ((2n)_!)^2. \quad (8.16)$$

Spezialfall  $m \leftarrow n+1$ : Da  $[\begin{smallmatrix} n, n+1 \\ k \end{smallmatrix}] = 1$  für alle  $n$  und  $k$ , folgt aus (8.13)

$$\sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 \binom{n+1}{k}_2 = (2n+1)_!. \quad (8.17)$$

Auf folgende Identität werden wir später noch zurückkommen:

$$\sum_{k=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} n, m+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] k^2 \binom{n}{k}_2 \binom{m+1}{k}_2 = \binom{n+m}{1}_2 \frac{n+nm}{n+m} \quad (n+m > 0) \quad (8.18)$$

## 8.5 DIE SCHWINGENDEN POLYNOME.

Wir verstehen unter den *schwingenden Polynomen* die Folge

$$p_n(x) = (1+x^2)^n + nx(1+x^2)^{n-1} \quad (n \geq 0). \quad (8.19)$$

Da  $p_n(x) = (1+x^2)^{n-1} (1+nx+x^2)$  werden sie durch die folgende Rekursionsgleichung mit dem Anfang  $p_0(x) = 1$  erzeugt:

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) (1+x^2) \frac{1+nx+x^2}{1+(n-1)x+x^2} \quad (n \geq 1) \quad (8.20)$$

Aus dieser Rekursion folgt die Multiplikationseigenschaft

$$p_n(x)p_m(x) = p_{n+m-1}(x) \frac{(1+nx+x^2)(1+mx+x^2)}{1+(n+m-1)x+x^2}. \quad (8.21)$$

Wir ordnen nun jedem Polynom  $p_n(x)$  das Laurent-Polynom

$$\beta_n(x) = x^{-n} p_n(x)$$

zu. Die Aussage ist, dass die binomiale Pyramide  $\binom{n}{k}_2$  gerade aus den Koeffizienten dieser Polynome besteht.

**Satz 23** Die zur binomialen Pyramide assoziierten Laurent-Polynome sind

$$\beta_n(x) = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 x^k = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n + n \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-1}. \quad (8.22)$$

*Beweis:* Dies folgt aus einer zweifachen Anwendung des Binomialssatzes und von (8.5)

$$\begin{aligned} x^{-n} p_n(x) &= x^{-n} (1+x^2)^n + x^{-n} n x (1+x^2)^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{2k-n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{2k-n-1} \\ &= \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 x^k \quad \diamond \end{aligned}$$

## 8.6 ERZEUGENDE FUNKTIONEN FÜR $n\lambda$ .

Mit den im letzten Abschnitt eingeführten schwingenden Polynomen (8.19) und (8.1) können wir auch schreiben

$$n\lambda = [z^n] \left( (1+z^2)^n + n z (1+z^2)^{n-1} \right). \quad (8.23)$$

In der symmetrischen Darstellung (8.2) ist  $n\lambda$  der konstante Term der entsprechenden Laurent-Polynome

$$n\lambda = [z^0] \left( \left(z + \frac{1}{z}\right)^n + n \left(z + \frac{1}{z}\right)^{n-1} \right). \quad (8.24)$$

Beschreiben wir die abzählende Potenzreihe der schwingenden Fakultät. Es ist wohlbekannt (vgl. zum Beispiel D. H. Lehmer [49]), dass die formale Potenzreihe  $S(z) = 1/(1-4z^2)^{1/2}$  die Koeffizienten  $[z^{2n}] S(z) = \binom{2n}{n}$  und  $[z^{2n+1}] S(z) = 0$  besitzt, und man sieht leicht ein, dass

$$T(z) = \frac{1}{4} S'(z) = z/(1-4z^2)^{3/2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sum_k \binom{n}{k} k!$	1	2	5	16	47	146	447	1380	4251	13102

Tabelle 17 – Binomische Transformation der schwingenden Fakultät.

die Koeffizienten  $[z^{2n}] T(z) = 0$  und  $[z^{2n+1}] T(z) = \binom{2n}{n}(2n+1)$  hat. Daraus, und aus der Definition von  $n!$ , erhalten wir eine erzeugende Funktion für die schwingende Fakultät  $F(z) = S(z) + \frac{1}{4}S'(z)$ , also

$$n! = [z^n] \left( 1 + \frac{z}{1-4z^2} \right) \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}. \quad (8.25)$$

Die exponentiell erzeugende Funktion der schwingenden Fakultät wird mit der Bessel- $I_0$  Funktion gewonnen:

$$n! = n! [z^n] (1+z) I_0(2z). \quad (8.26)$$

Eine Anwendung der Euler-Transformation [61, S. 47]

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k = [z^n] \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

führt mit (8.25) auf die erzeugende Funktion

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = [z^n] \frac{1-z-4z^2}{((1+z)(1-3z))^{3/2}}. \quad (8.27)$$

Die ersten Werte dazu finden sich in Tabelle 17.

## 8.7 SPEZIELLE SUMMEN IN DER SCHWINGENDEN PYRAMIDE.

Betrachten wir die Zeilensummen der binomischen Pyramide. Die Summe über eine ganze Zeile (8.28) beschreibt die Anzahl aller Teile aller Kompositionen (geordneten Partitionen) von  $n+1$ .

$$\beta_n(1) = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 = \sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k} = 2^n + n2^{n-1}. \quad (8.28)$$

Diese Summe lässt sich nach Paritäten aufgliedern zu

$$\sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 [n+k \text{ even}] = 2^n \left( \frac{n}{2} [n \text{ odd}] + [n \text{ even}] \right), \quad (8.29)$$

$$\sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 [n+k \text{ odd}] = 2^n \left( [n \text{ odd}] + \frac{n}{2} [n \text{ even}] \right). \quad (8.30)$$

Wir erwähnen noch die Identität

$$2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+\alpha}{2k}_2 = (2n+\alpha)_\lambda - [n=0], \quad \alpha \in \{0,1\}. \quad (8.31)$$

### 8.8 VERALLGEMEINERTE FIBONACCI-ZAHLEN.

Die von einem positiven ganzzahligen Parameter  $r = 1, 2, 3, \dots$  abhängenden *verallgemeinerten Fibonacci-Zahlen*  $F_n^{(r)}, F_n^{(r)} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  sind für nicht negative Indizes definiert durch

$$F_n^{(r)} = [z^n] (1/z - 1 - z)^{-r} \quad (n \geq 0),$$

und für Indizes kleiner 0 durch

$$F_{-n}^{(r)} = [z^n] (1/z + 1 - z)^{-r} \quad (n > 0).$$

$F_n^{(1)}$  sind für  $n \geq 0$  gerade die klassischen *Fibonacci-Zahlen*  $F_n$ , rekursiv definiert als  $F_0 = 0, F_1 = 1$ , sowie

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \quad (n > 1). \quad (8.32)$$

Die  $F_n^{(2)}$  sind für  $n \geq 0$  die *gefalteten Fibonacci-Zahlen*, definiert durch  $F_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n F_k F_{n-k}$ . (Man vergleiche dazu auch [63].) Setzt man im Fibonacci-Tableau die Einträge in der 0-ten Zeile und in der 0-ten Spalte gleich 0 und in der 1-ten Spalte gleich  $[n = r]$ , so kann man die rechte Hälfte des Tableau rekursiv so berechnen:

$$F_n^{(r)} = F_{n-2}^{(r)} + F_{n-1}^{(r)} + F_{n-1}^{(r-1)} \quad (n > 1). \quad (8.33)$$

$r \setminus n$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$F_n^{(0)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$F_n^{(1)}$	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8
$F_n^{(2)}$	20	-10	5	-2	1	0	0	0	1	2	5	10	20
$F_n^{(3)}$	-22	9	-3	1	0	0	0	0	0	1	3	9	22
$F_n^{(4)}$	14	-4	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4	14
$F_n^{(5)}$	-5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5
$F_n^{(6)}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\sum_r F_n^{(r)}$	0	1	0	1	0	1	0	1	2	5	12	29	70

Tabelle 18 – Die verallgemeinerten Fibonacci-Zahlen  $F_n^{(r)}$ 

Diese Rekursion bewahrt für  $r = 1$  in natürlicher Weise die Rekursion der klassischen Fibonacci-Zahlen (8.32) auf.

W. Lang [48] hat eine explizite Formel angegeben für positive  $n$  und  $r$ .

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k-1}{k} \binom{k}{n-k-r} \quad (n \geq r > 0) \quad (8.34)$$

In den restlichen Fällen mit  $n \geq 0$  und  $r \geq 0$  ist  $F_n^{(r)} = 0$ .

Der investigative Leser mag noch für die Spaltensummen im Fibonacci-Tableau folgende Identitäten nachweisen:

$$\sum_{r \geq 0} F_n^{(r)} = [n \text{ odd}] \quad (n < 0), \quad (8.35)$$

$$\sum_{r \geq 0} F_{n+1}^{(r)} = \sum \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} \quad (n \geq 0). \quad (8.36)$$

Hier läuft die Summe auf der rechten Seite über alle nicht negativen ganzen Zahlen  $i, j, k$ , für die gilt  $i + j + 2k = n + 1$ . Diese Zahlen sind als *Pell-Zahlen* bekannt [21].

## 8.9 DIAGONALSUMMEN IN DER SCHWINGENDEN PYRAMIDE.

**Satz 24** Die Summen der Diagonalen in der binomialen Pyramide  $\binom{n}{k}_2$  sind durch die Fibonacci-Zahlen und die gefalteten Fibonacci-Zahlen gegeben.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{n-3k}_2 = F_{n+1}^{(1)} \quad (n \geq 0) \quad (8.37)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{n-3k+1}_2 = F_n^{(2)} \quad (n \geq 0) \quad (8.38)$$

*Beweis:* Die klassische Identität  $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n-k}{n-2k} = F_{n+1}$  beschreibt den Zusammenhang zwischen den Fibonacci Zahlen und den Binomialkoeffizienten. (8.37) reformuliert diese Identität in der binomischen Pyramide  $\binom{n}{k}_2$  und wird gerechtfertigt durch die Einbettung des pascalschen Dreiecks in die binomische Pyramide (8.5).

Zum Beweis von (8.38): Einerseits haben  $n-k$  und  $n-3k+1$  stets verschiedene Parität, und damit ist nach (8.3) und (8.5)

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{n-3k+1}_2 = \sum_{k=0}^n k \binom{n-k}{k}.$$

Andererseits vereinfacht sich (8.34) zu

$$\begin{aligned} F_n^{(2)} &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \binom{k}{n-k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) \binom{n-k-2}{k} = \sum_{k=0}^n k \binom{n-k}{k} \quad \diamond \end{aligned}$$

## VERALLGEMEINERTE CATALAN-ZAHLEN

---

### 9.1 KOMBINATORISCHE INTERPRETATION VON $n!$ .

Eine anschauliche Interpretation der schwingenden Fakultät liefert das *schwingende Orbitalsystem*. Dies ist ein ebenes Orbitalsystem, bestehend aus einer Schar konzentrischer Kreisbahnen, und einem Teilchen (oder *Raumschiff*), das auf diesen Bahnen läuft und auf einer von ihnen seinen *Hafen* hat, von der aus es entlang der Kreisbahn startet und in die es nach jedem Umlauf wieder zurückkehren muss. Die Umlaufebene ist dabei in  $n$  Sektoren geteilt, und an jeder Sektorengrenze wird das Teilchen angeregt seine Bahnhöhe zu wechseln: ein *Steuerimpuls* veranlasst es auf die jeweils nächstgelegene innere oder äußere Bahn zu wechseln. Den Radius einer Bahn nennen wir die Bahnhöhe.

Es ist klar, dass die Geschlossenheitsbedingung unerfüllbar ist, wenn die Anzahl der Sektoren ungerade ist. Deshalb ist für *schwingende Orbitale* die Sprungbedingung in diesem Fall gelockert: Falls  $n$  ungerade ist, darf das Teilchen an *einer* Sektorengrenze auf seiner momentanen Bahn weiterlaufen. Wie viele verschiedene Umläufe kann das Teilchen machen?

Ist  $b_n$  die Anzahl der schwingenden Orbitale über  $n$  Sektoren, so zählt der folgende Trinomialkoeffizient die verschiedenen Möglichkeiten des Sprungverhaltens des Teilchens ab. Damit erhalten wir die Aussage: *Die schwingende Fakultät zählt die schwingenden Orbitale.*

$$b_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor, [n \text{ odd}], \lfloor n/2 \rfloor} = n! \quad (9.1)$$

### 9.2 TYPEN UND CODIERUNG VON ORBITALEN.

Phänomenologisch können sich Teilchen auf schwingenden Orbitalen sehr unterschiedlich verhalten. Sie können sich zum Beispiel hauptsächlich auf Orbitalen bewegen, die fern ihres Heimatorbitals sind, oder sie können sich stets in dessen Umgebung bewegen. Dabei ist *Entfernung* definiert als der Betrag der Differenz zwischen der Bahnhöhe des Sektors

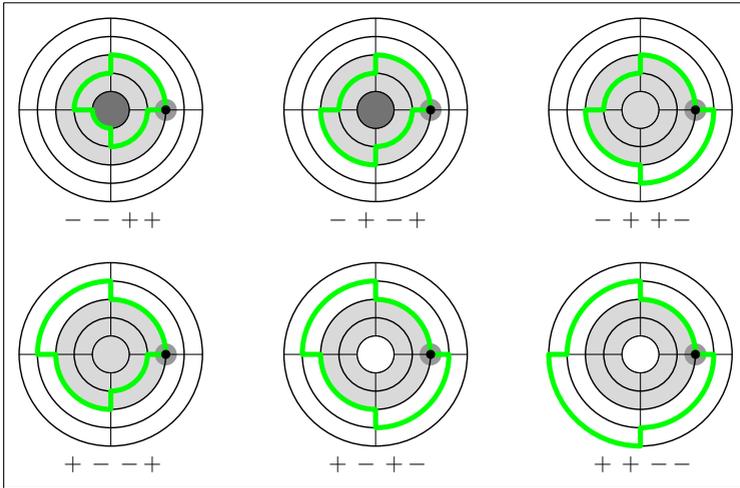


Abbildung 5 – Schwingende Orbitale über 4 Sektoren

und der Bahnhöhe des Heimatorbitals.

Dieses Szenarium wollen wir jetzt formalisieren. Als erstes benennen wir verschiedene *Typen von Orbitalen*. Ein schwingendes Orbital heißt *eleviert*, wenn seine Bahnhöhe nie unter die Bahnhöhe des Hafens sinkt, er heißt *supprimiert*, wenn seine Bahnhöhe die Bahnhöhe des Hafens nie übersteigt, und *oszillierend*, wenn er weder eleviert noch supprimiert ist.

Mit  $\Omega_n$  bezeichnen wir die *Menge der schwingenden Orbitale* über  $n$  Sektoren. Im Weiteren identifizieren wir ein Orbital mit der Folge der *Steuerimpulse* des Raumschiffs auf dem Flug entlang eines Orbitals. Dabei soll  $-1$  einen Sprung auf die tiefer gelegene Bahn,  $+1$  einen Sprung auf die höher gelegene Bahn und  $-$  was nur im Falle eines ungeraden  $n$

Steuerimpulse	catalanisch
$-1, -1, +1, +1$	supprimiert
$-1, +1, -1, +1$	supprimiert
$-1, +1, +1, -1$	oszillierend
$+1, -1, -1, +1$	oszillierend
$+1, -1, +1, -1$	eleviert
$+1, +1, -1, -1$	eleviert

Tabelle 19 –  $\Omega_4$ , die schwingenden Orbitale über 4 Sektoren.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
O <sub>n</sub>	0	0	0	0	2	10	10	70	42	378	168	1848

Tabelle 20 – Die Anzahl oszillierender Orbitale

einmal vorkommen kann — die 0 den Weiterflug ohne Bahnänderung signalisiert. Es gibt genauso viele elevierte wie supprimierte Orbitale, denn man erhält aus einem elevierten Orbital ein supprimiertes Orbital, wenn man die Folge der Steuerimpulse in umgekehrter Reihenfolge durchläuft, und vice versa.

Aus der kombinatorischen Klassifizierung der Orbitale in die grundlegenden Typen eleviert, supprimiert und oszillierend folgt

$$n! = 2E_n + O_n \quad (n \geq 2). \quad (9.2)$$

$O_n$  ist dabei die Anzahl der oszillierenden Orbitale, deren erste Werte in Tabelle 20 aufgeführt sind. Wie wir noch sehen werden, ist

$$O_n = n! \frac{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \quad (n > 1).$$

Den Zahlen  $E_n$  wenden wir uns im übernächsten Abschnitt zu.

### 9.3 PFADE UND ORBITALE.

Eine gewisse Orientierung mag ein Vergleich der Typen der Orbitale mit den Typen der *Pfade* bieten. In der Tabelle 21 sind die am häufigsten verwendeten Pfadtypen zusammengestellt. Ein Pfad ist dabei eine Folge von Elementen  $(n_j, m_j) \in \mathbb{Z}^2$ . Grundsätzlich starten Pfade (per Konvention) im Punkt  $(0, 0)$ . Einschränkende Bedingungen werden an den Endpunkt gestellt (etwa  $(n, 0)$  oder  $(n, n)$  oder  $(2n, 0)$ ), an den Pfadverlauf (etwa keine negativen  $m$ -Werte in den Punkten  $(*, m)$ ), und bezüglich der zulässigen Sprünge  $m_{j+1} - m_j$ . Wir verweisen dazu auf die Literatur, insbesondere auf [84] und [30].

Die Typen der Orbitale sind (übersetzt in die Sprechweise der Pfade) in der Tabelle 22 zusammengestellt. Die Brücke zwischen Pfaden und Orbitalen schlägt die Verbindung von Dyck-Pfaden zu elevierten Orbitalen. Im Fall eines geraden  $n$  stehen elevierte Orbitale über  $n$  Sektoren in eindeutiger Beziehung zu den Dyck-Pfaden – Dyck-Pfade sind dann

Ziel	Sprünge	Werte	Name	Card
$(n, 0)$	$\{-1, 0, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}$	Delannoy	$D_n$
$(n, 0)$	$\{-1, 0, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}_0^+$	Motzkin	$M_n$
$(2n, 0)$	$\{-1, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}_0^+$	Dyck	$C_n$

Tabelle 21 – Typen der Pfade.

Ziel	Sprünge	Werte	Name	Card
$(n, 0)$	$\{-1, 0^*, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}$	Orbital	$n!$
$(n, 0)$	$\{-1, 0^*, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}_0^+$	eleviert	$E_n$
$(n, 0)$	$\{-1, 0^*, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}_0^-$	supprem.	$E_n$
$(n, 0)$	$\{-1, 0^*, +1\}$	$m \in \mathbb{Z}^*$	oszillier.	$O_n$

$0^*$  bedeutet: 0 nur falls  $n$  ungerade ist und nur einmal.

$\mathbb{Z}^*$  bedeutet:  $m \in \mathbb{Z}$  und existiert  $m_a \in \mathbb{Z}^+$  und  $m_b \in \mathbb{Z}^-$ .

Tabelle 22 – Typen der Orbitale.

sozusagen die ‚linearisierte Variante‘ der Orbitale. Dyck-Pfade einer ungeraden Länge gibt es nicht. Dies folgt aus der zulässigen Menge der Sprünge  $\{-1, 1\}$  und der Zielbedingung  $\sum_i m_i = 0$ , die ja eine gleiche Anzahl von  $-1$  und  $+1$  Sprüngen erzwingt. Orbitale über einer ungeraden Anzahl von Sektoren existieren, weil im Fall eines ungeraden  $n$  eine Ausnahme zuzulassen ist: genau ein  $0$ -Sprung.

Im weiteren werden wir bei der Sprechweise der Orbitale bleiben, nicht nur, weil ein Kreis die Geschlossenheitsbedingung besser motiviert, sondern auch, weil ein Kreis eine Beziehung zur modularen Arithmetik suggeriert (was durchaus erwünscht ist) und Zusammenhänge mit dem Problem der analytischen Kreisteilung antizipiert.

#### 9.4 DIE VERLORENEN CATALAN-ZAHLEN.

$E_n$  sei die Anzahl der elevierten schwingende Orbitale über  $n$  Sektoren.

$$E_n = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor + 1} \tag{9.3}$$

Dies gilt, denn die Anzahl aller schwingenden Orbitale ist  $n!$  und mit einem einfachen Reflexionsargument wird diese Anzahl um den Faktor  $1/(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$  reduziert. (Wir machten ja bereits im Abschnitt 1.3 die Be-

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
E <sub>n</sub>	1	1	1	3	2	10	5	35	14	126	42	462	132

Tabelle 23 – Anzahl elevierter Orbitale, die Catalan-Zahlen

obachtung, dass  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$  stets Teiler von  $n!$  ist; hier haben wir nun eine kombinatorische Interpretation dieser Relation.) Mit dem mittleren Binomialkoeffizienten  $b_n = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$  lässt sich auch schreiben

$$E_n = \gcd(b_n, b_{n+1}) \quad (n \geq 0). \tag{9.4}$$

Die ersten Werte von  $E_n$  sind in Tabelle 23 aufgeführt.

Aus der Rekursion der schwingenden Fakultät folgt eine Rekursion der  $E_n$ .  $E_0 = 1$  und

$$E_n = E_{n-1} n^{\lfloor n/2 \rfloor} (4/(n+2))^{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (n > 0). \tag{9.5}$$

Die Folge  $E_n$  stellt eine Erweiterung der klassischen Catalan-Zahlen  $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$  dar, die die elevierten Orbitale im Fall gerader Sektoren zählen:  $C_n = E_{2n}$ . Unter den verlorenen Catalan-Zahlen verstehen wir die Anzahl der elevierten Orbitale im Fall ungerader Sektoren, also  $E_{2n+1}$ . Unter Verwendung der Relationen (1.7) und (1.8) finden wir

$$E_{2n} = \frac{(n-1/2)!}{(-1/2)!} \frac{2^{2n}}{(n+1)!}; \quad E_{2n+1} = \frac{(n+1/2)!}{(1/2)!} \frac{2^{2n}}{(n+1)!} \quad (n \geq 0).$$

Man bemerkt, dass  $E_n$  ungerade ist, wenn  $n = 2^k - 1$  oder  $n = 2^k - 2$  ist. Im ersten Fall ist  $E_n = 2^k/2$  und ist daher nach einer Folgerung aus Satz 1 ungerade und im zweiten Fall kann  $E_n$  auch nicht gerade sein, weil sonst  $E_{n+1} = E_n(2^k - 1) = 2^k/2$  gerade wäre, im Widerspruch zum eben Gesagten.

Hingebungsvolle Freunde der Catalan-Zahlen mögen untersuchen, welche der mehr als 66 Interpretationen der Catalan-Zahlen, die sich bei R. P. Stanley [84] finden, einer Erweiterung auf den ungeraden Fall zugänglich sind.

9.5 EINE INTEGRALDARSTELLUNG DER CATALAN-ZAHLEN.

Eine Integraldarstellung der klassischen Catalan-Zahlen wurde von Pen-son und Sixdeniers [69] angegeben, welche sie mit Hilfe der inversen

Mellin Transformation hergeleitet haben. Ihr Vorgehen lässt sich leicht fortführen, um auf folgende Integraldarstellung der verallgemeinerten Catalan-Zahlen zu kommen.

$$E_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^4 \left( x^{2n-1} \left( \frac{(4-x)^2}{x} \right)^{\cos \pi n} \right)^{1/4} dx \quad (9.6)$$

Für die Catalan-Zahlen mit geradem Index (dem klassischen Fall) erhalten wir daraus

$$E_{2n} = C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^4 x^n \frac{(4-x)^{1/2}}{x^{1/2}} dx \quad (9.7)$$

und für Catalan-Zahlen mit ungeradem Index (den verlorenen Catalan-Zahlen) die Integraldarstellung

$$E_{2n+1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^4 x^n \frac{x^{1/2}}{(4-x)^{1/2}} dx. \quad (9.8)$$

Damit hat man mit (9.3) auch eine weitere Integraldarstellung für die schwingende Fakultät auf den natürlichen Zahlen gefunden

$$n! = \frac{n+1 + [n \text{ even}]}{4\pi} \int_0^4 \left( x^{2n-1} \left( \frac{(4-x)^2}{x} \right)^{\cos \pi n} \right)^{1/4} dx. \quad (9.9)$$

## 9.6 DIE REKURSIVE PYRAMIDE DER CATALAN-ZAHLEN.

**Definition 25** Die catalansche Abzählung  $E : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist definiert als  $E_{0,0} = 0$  und

$$E_{n,k} = \frac{k}{n} \binom{n}{k}_2 \quad (n \geq 1, -n \leq k \leq n). \quad (9.10)$$

Ähnlich wie die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}_2$ , bilden auch die verallgemeinerten Catalan-Zahlen eine rekursiven Pyramide (Tabelle 24).

**Satz 26** Die catalansche Abzählung lässt sich durch eine rekursive Pyramide vom catalanischen Typ berechnen. Das Zentrum dieser Pyramide verschwindet ( $E_{n,0} = 0$  für alle  $n$ ) und ihr Nebenzentrum  $E_{n,1}$  sind die verallgemeinerten Catalan-Zahlen  $E_{n,1} = E_{n-1}$ .

n \ k	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
0							0						
1						-1	0	1					
2					-1	-1	0	1	1				
3				-1	-2	-1	0	1	2	1			
4			-1	-3	-2	-3	0	3	2	3	1		
5		-1	-4	-3	-8	-2	0	2	8	3	4	1	
6	-1	-5	-4	-15	-5	-10	0	10	5	15	4	5	1
7	-6	-5	-24	-9	-30	-5	0	5	30	9	24	5	6

Tabelle 24 – Die rekursive Pyramide der Catalan-Zahlen  $E(n,k)$ 

*Beweis:* Wir wählen  $\tau_{n,k} = [n - k \text{ odd}]$  und setzen die Gewichtsfunktion  $w_{i,j} = 1 - [2 \nmid i \text{ und } 2 \nmid j]$ . ( $\tau_{n,k}$  und  $w_{i,j}$  sind also genauso gewählt wie bei den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten zum Index 2.) Die Subdiagonale hat die Gestalt  $a_{n+1,n} = \sum_{0 \leq k \leq n} \tau_{k+1,k}$ , denn  $a_{1,0} = 0 + \tau_{1,0}a_{0,0} + a_{0,1} = \tau_{1,0}$  und mit vollständiger Induktion ist  $a_{n+1,n} = a_{n,n-1} + \tau_{n+1,n}a_{n,n} + a_{n,n+1} = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \tau_{k+1,k} + \tau_{n+1,n}$ . Beweisen wir nun die Gültigkeit der Rekursionsgleichung

$$E_{n,k} = E_{n-1,k-1} + [n - k \text{ odd}] E_{n-1,k} + E_{n-1,k+1}. \quad (9.11)$$

Nach (9.12) ist  $E_{n,n} = 1$  falls  $n > 0$ ,  $E_{n,n-1} = n - 1$  und  $E_{n,0} = 0$ . Wir schreiben wieder  $s_{n,k}$  für den Nenner von  $\binom{n}{k}_2$ .

$$s_{n,k} = \left( \frac{1}{2} (n - k - [n - k \text{ odd}]) \right)! \left( \frac{1}{2} (n + k - [n - k \text{ odd}]) \right)!$$

Aus (9.10) und (8.2) folgt

$$E_{n,k} = \frac{n!}{s_{n,k}} \frac{k}{n} \quad (n > 0). \quad (9.12)$$

Somit ist für  $-n + 2 \leq k \leq n - 2$  die Rekursionsgleichung gleichbedeutend mit

$$\frac{n!}{s_{n,k}} \frac{k}{n} = \frac{(n-1)!}{s_{n-1,k-1}} \frac{k-1}{n-1} + [n - k \text{ odd}] \frac{(n-1)!}{s_{n-1,k}} \frac{k}{n-1} + \frac{(n-1)!}{s_{n-1,k+1}} \frac{k+1}{n-1}.$$

Dies lässt sich umstellen zu

$$\frac{n!}{(n-1)!} \frac{k}{n} = \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k-1}} \frac{k-1}{n-1} + [n-k \text{ odd}] \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k}} \frac{k}{n-1} + \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k+1}} \frac{k+1}{n-1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist  $k$ , aber auch die rechte Seite, weil

$$\begin{aligned} \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k-1}} \frac{k-1}{n-1} &= \left( \frac{n}{2} + \frac{k}{2} - \frac{1}{2} [n-k \text{ odd}] \right) \frac{k-1}{n-1}, \\ [n-k \text{ odd}] \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k}} \frac{k}{n-1} &= [n-k \text{ odd}] \frac{k}{n-1}, \\ \frac{s_{n,k}}{s_{n-1,k+1}} \frac{k+1}{n-1} &= \left( \frac{n}{2} - \frac{k}{2} - \frac{1}{2} [n-k \text{ odd}] \right) \frac{k+1}{n-1}. \end{aligned}$$

## 9.7 KONVOLUTIONSPRODUKTE DER CATALAN-ZAHLEN.

Zum Nachweis, dass die Catalan-Zahlen eine rekursive Pyramide von catalanischen Typ bilden, fehlt noch der Nachweis der Konvolutionsgleichung (8.11). Wir verwenden die in (8.12) erklärte Notation  $\left[ \begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix} \right]$ . Damit schreibt sich die Konvolutionsgleichung

$$\sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n, m+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] E_{n,k} E_{m+1,k} = E_{n+m-1} \quad (n+m > 0). \quad (9.13)$$

Diese Identität hatten wir bereits in ihrer binomischen Form (8.18) angekündigt: für  $n+m > 0$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \left[ \begin{smallmatrix} n, m+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] k^2 \binom{n}{k}_2 \binom{m+1}{k}_2 = \binom{n+m}{1}_2 \frac{n+nm}{n+m}.$$

Denn setzen wir die Definition (9.10) ein, so schreibt sich (9.13)

$$\sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n, m+1 \\ k \end{smallmatrix} \right] \frac{k}{n} \binom{n}{k}_2 \frac{k}{m+1} \binom{m+1}{k}_2 = \frac{1}{n+m} \binom{n+m}{1}_2.$$

Sei  $t_n = (0, E_{n,1}, \dots, E_{n,n}, 0, \dots)$  die  $n$ -te Zeile. Das gewichtete Skalarprodukt der  $n$ -ten Zeile mit der  $m$ -ten Zeile ist

$$t_n t_m = \sum_{k=0}^n \left[ \begin{smallmatrix} n, m \\ k \end{smallmatrix} \right] E_{n,k} E_{m,k}.$$

Zu zeigen ist für  $n > 0$  und  $m \geq 0$   $t_n t_{m+1} = E_{n+m,1}$ . Nun ist

$$t_1 t_{m+1} = \begin{bmatrix} 1, m+1 \\ 1 \end{bmatrix} \binom{1}{1}_2 \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{1}_2 = \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{1}_2 = E_{m+1,1}$$

da  $\binom{1}{1}_2 = 1$  und  $[1, m+1] = 1$  für alle  $m$ . Setzen wir jetzt voraus, dass die Behauptung richtig ist für alle  $i \leq n-1$  und alle  $m \geq 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} t_n t_{m+1} &= \sum_{k=0}^n [n, m+1] E_{n,k} E_{m+1,k} \\ &= \sum_{k=0}^n [n, m+1] (E_{n-1, k-1} + [n-k \text{ odd}] E_{n-1, k} + E_{n-1, k+1}) E_{m+1, k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [n-1, m+2] (E_{m+1, k-1} + [m-k \text{ odd}] E_{m+1, k} + E_{m+1, k+1}) E_{n-1, k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [n-1, m+2] E_{m+2, k} E_{n-1, k} \\ &= t_{n-1} t_{m+2} = E_{n+m, 1} \quad \diamond \end{aligned}$$

### 9.8 SPEZIALFÄLLE DER CATALAN-KONVOLUTION.

Einige einfache Spezialfälle der Konvolutionsgleichung (9.13) sind:

*Spezialfall*  $n \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $m \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ : Diese Parameterersetzung führt auf eine Darstellung der Catalan-Zahlen

$$E_{n-1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil + 1 \\ k \end{bmatrix} E_{\lfloor n/2 \rfloor, k} E_{\lceil n/2 \rceil + 1, k} \quad (n > 0). \quad (9.14)$$

*Spezialfall*  $m \leftarrow n$ : Da  $[n, n+1] = 1$  für alle  $n$  und  $k$ , folgt aus (9.13)

$$\sum_{k=0}^n E_{n,k} E_{n+1, k} = E_{2n-1} \quad (n \geq 1). \quad (9.15)$$

*Spezialfall*  $m \leftarrow n-1$ : Da  $[n, n] = [n+k \text{ even}]$  für alle  $n$  und  $k$ , folgt

$$\sum_{k=0}^n [n+k \text{ even}] E_{n, k}^2 = C_{n-1} \quad (n \geq 1). \quad (9.16)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sum_{k \geq 0} E(n, k)$	0	1	2	4	9	18	40	80	175	350	756

Tabelle 25 – Zeilensumme der Catalan-Pyramide  $\sum_{k \geq 0} E(n, k)$ 

Das heißt, die Catalan-Zahlen mit geradem Index lassen sich als Summe von catalanischen Quadraten schreiben, beispielsweise  $5 = 4 + 1$ ,  $14 = 4 + 9 + 1$ ,  $42 = 25 + 16 + 1$ .

### 9.9 ZEILENSUMMEN IN DER CATALAN-PYRAMIDE.

In diesem Abschnitt wollen wir eine Darstellung der Summe einer Zeile in der Catalan-Pyramide erhalten, und zwar

$$\sum_{k \geq 0} E_{n,k} = \binom{n-1}{0}_2 + \binom{n-1}{1}_2 \quad (n \geq 0). \quad (9.17)$$

Dazu schreiben wir  $\sigma_n = \binom{n}{0}_2 + \binom{n}{1}_2$ . Weil  $\binom{n}{0}_2 = n!$  ist, ist  $\sigma_n = h_n n!$  mit der Hilfsfolge

$$h_n = 1, \frac{2}{1}, 2, \frac{3}{2}, 3, \frac{4}{3}, 4, \dots = 1 + \left( \frac{n + [n \text{ odd}]}{2} \right)^{(-1)^n} \quad (n \geq 0).$$

Aus der Rekursion von  $n!$  folgt die Rekursion von  $h_n n!$ ,

$$\sigma_n = 2\sigma_{n-1} \left( \frac{n(n+3)}{(n+1)^2} \right)^{[n \text{ odd}]} \quad (n \geq 1) \quad (9.18)$$

mit dem Startwert  $\sigma_0 = 1$ . Nun ist aber  $\sigma_{n-1} = h_{n-1} \left[ \frac{n+1}{2} \right] E_{n-1}$ , und so kann man die Zeilensummen in der Catalan-Pyramide auch durch die Catalan-Zahlen selber ausdrücken.

$$\sum_{k \geq 0} E_{n,k} = E_{n,1} \left( \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)^{1+[n \text{ odd}]} \quad (n \geq 0). \quad (9.19)$$

Damit sieht man, dass die Summe der Catalan-Zahlen rechts von der ersten Spalte ( $k > 1$ ) in der Pyramide ein ganzzahliges Vielfaches des

Wertes in der ersten Spalte ist. Definieren wir nun mit der Notation (8.12) die Koeffizienten

$$t_{n,k} = \begin{bmatrix} \lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil + 1 \\ k \end{bmatrix} \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor^{2 - [n \text{ even}]}$$

und setzen in (9.19) die Darstellung (9.14) ein, so erhalten wir

$$\sum_{k \geq 0} E_{n,k} = \sum_{k \geq 0} t_{n,k} E_{\lfloor n/2 \rfloor, k} E_{\lceil n/2 \rceil + 1, k} \quad (n > 1). \quad (9.20)$$

In der Catalan-Pyramide gleicht also die Summe über eine Zeilenhälfte einer gewichteten Konvolutionssumme über dem halben Zeilenindex.

### 9.10 DIE CATALAN-POLYNOME.

Wir definieren die Catalan-Polynome als die Laurent-Polynome, deren Koeffizienten die Elemente der Catalan-Pyramide sind.

**Satz 27** Die zur Catalan-Pyramide assoziierten Polynome sind gegeben durch  $E_0(x) = 0$  und

$$E_n(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-2} \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x} + n - 1\right) \quad (n > 0). \quad (9.21)$$

*Beweis:* Betrachten wir dazu die Polynome, die der erweiterten binomischen Pyramide zugeordnet sind. Wir wissen aus Satz 23, dass gilt

$$\beta_n(x) = \sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 x^k = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n + n \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-1}.$$

Nun ist aber, wie man nachrechnet,

$$E_n(x) = \frac{x}{n} \frac{d}{dx} \beta_n(x), \quad (9.22)$$

und daher ist für  $n > 0$

$$E_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k}_2 x^k = \sum_{k=-n}^n E_{n,k} x^k. \quad \diamond$$

Wegen (9.22) kann man also sagen:

*Die Catalan-Pyramide ist die Ableitung der binomischen Pyramide.*

Aus (9.21) folgt auch unmittelbar eine Rekursion der Catalan-Polynome. Mit der Setzung  $E_0(x) = 0$  und dem Anfangswert  $E_1(x) = x - 1/x$  gilt

$$E_n(x) = E_{n-1}(x) \left( x + \frac{1}{x} \right) \frac{x + 1/x + n - 1}{x + 1/x + n - 2} \quad (n > 1). \quad (9.23)$$

### 9.11 ERZEUGENDE FUNKTIONEN DER CATALAN-ZAHLEN.

Aus unserer Betrachtung der Catalan-Polynome erhalten wir

$$E_n = [z^n] \left( z + \frac{1}{z} \right)^{n-1} \left( z - \frac{1}{z} \right) \left( z + \frac{1}{z} + n \right) \quad (n \geq 0). \quad (9.24)$$

Die gewöhnliche erzeugende Funktion der verallgemeinerten Catalan-Zahlen  $E_n$  ist

$$E_n = [z^n] \left( \frac{2 + b(z)}{\sqrt{1 - 4z^2}} - b(z) \right), \quad b(z) = \frac{z - 1}{2z^2}. \quad (9.25)$$

Die exponentiell erzeugende Funktion erkennt man leicht als

$$E_n = n! [z^n] \left( \left( 1 + \frac{1}{z} \right) I_1(2z) \right). \quad (9.26)$$

Hierbei bezeichnet  $I_1(z)$  die Bessel-Funktion erster Ordnung.

### 9.12 DAS PRODUKT $E_k(n - k)$ .

Ein Punkt auf einem Orbital dessen Höhe 0 ist (d.h. der auf dem Heimorbital liegt), nennen wir einen Nulldurchgang eines Fluges. Jeder Flug besitzt (vom Startpunkt abgesehen) mindestens einen Nulldurchgang, sonst könnte er nicht wieder zurück zum Startpunkt kommen. Bezeichnen wir den *ersten Nulldurchgang* eines Fluges mit  $k$ , so können wir jeden Flug in zwei Teile zerlegen: Den bis zum Nulldurchgang und den restlichen Teil. Der erste Abschnitt ist eine elevierte oder suppressierte

1										1
0	2									2
2	2	2								6
0	4	0	2							6
6	12	4	2	6						30
0	12	0	4	0	4					20
20	60	12	12	12	4	20				140
0	40	0	12	0	8	0	10			70
70	280	40	60	36	24	40	10	70	630	

Tabelle 26 – Zerlegung von  $n!$  nach dem ersten Nulldurchgang.

Bahn, wird also durch die Catalan-Zahl  $E_k$  abgezählt, genauer durch  $2E_k$  wobei der Faktor 2 die beiden möglichen Typen berücksichtigt. Allerdings gibt es eine Ausnahme: Wenn im Fall ungeradzahligter Sektoren die Bahn mit dem sprunglosen Abschnitt beginnt, dann darf dieser natürlich nur einmal gezählt werden, also korrigieren wir zu  $2^{[k>0]}E_k$ .

Die Anzahl möglicher Flugbahnen hinter dem Nulldurchgang wird durch die schwingende Fakultät abgezählt  $(n-k)!$ . Aber auch hier muss noch nachkorrigiert werden: Ein Orbital über einer geraden Anzahl von Sektoren kann niemals in zwei Bahnabschnitte ungerader Länge zerfallen, weil dies entweder gegen die Rückkehrbedingung oder die Ausnahmebedingung (nur *ein* Geradeausflug) verstoßen würde. Dies kann durch die arithmetisierte boolesche Variable  $[n \vee k \text{ odd}]$  berücksichtigt werden.  $[n \vee k \text{ odd}]$  steht für  $n \text{ odd}$  oder  $k \text{ odd}$ . Setzen wir per Konvention noch  $E_{-1} = 1$ , dann können wir die Abzählung über den Nulldurchgang  $k$  von  $0 \dots n-1$  laufen lassen.

Insgesamt erhalten wir so folgende Summendarstellung der schwingenden Fakultät, deren Terme in Beispielen in Tabelle 26 aufgeführt sind.

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{[k>0]} [n \vee k \text{ odd}] E_{k-1} (n-k-1)! = n! \quad (n \geq 1) . \tag{9.27}$$

Eine alternative Darstellung dieser Identität ohne Catalan-Zahlen ist

$$\sum_{k=1}^n \frac{[n \vee (k+1) \text{ odd}]}{k - [k+1 \text{ odd}]} k!(n-k)! = n! \quad (n \geq 1) . \tag{9.28}$$

9.13 SINGULARITÄTEN DER ERZEUGENDEN FUNKTION VON  $C_n$ .

P. Flajolet und R. Sedgewick betrachten in [30] die erzeugende Funktion der Catalan Zahlen. Die folgende Gegenüberstellung schließt daran an.

Die gewöhnliche erzeugende Funktion der verallgemeinerten Catalan Zahlen  $\mathcal{G}(E_n)$  lässt sich schreiben

$$\mathcal{G}(E_n) : z \mapsto \frac{1}{2z} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{z} - \frac{w}{z} - 1 \right), \quad w = \sqrt{1 - (2z)^2}. \quad (9.29)$$

Sie hat in den Punkten  $\pm 1/2$  eine Quadratwurzel-Singularität. Dagegen hat die gewöhnliche erzeugende Funktion der geraden Catalan Zahlen  $\mathcal{G}(C_n)$  eine Quadratwurzel-Singularität im Punkt  $1/4$ .

$$\mathcal{G}(C_n) : z \mapsto \frac{1}{2z} (1 - w), \quad w = \sqrt{1 - 4z} \quad (9.30)$$

Die beiden erzeugenden Funktionen sind in Abbildung 6 gegenübergestellt.  $\mathcal{G}(E_n)$  besitzt zwei Äste während  $\mathcal{G}(C_n)$  nur einen besitzt. Nun sind die Singularitäten der erzeugenden Funktionen von ausschlaggebender Bedeutung bei der asymptotischen Entwicklung ihrer Koeffizienten.

Vergleichen wir daher den einfachsten Fall der asymptotischen Näherungen. Einmal die Stirling-basierte Formel  $\alpha(n) = 4^n/n^{3/2}$ , die auch Flajolet und Sedgewick angeben, mit unserer weiter oben angegebenen Fields-basierten Formel, die wir hier auf den Fall  $E_{2n}$  zurückstutzen:  $\beta(n) = 2^{2n}/(n^{3/2} + n^{1/2})$ . Die relative Effizienz der Formeln zeigt Abbildung 6, in der  $C_n/\alpha(n)$  [blau] und  $C_n/\beta(n)$  [rot] eingetragen sind sowie der asymptotische Wert  $\pi^{-1/2} = 0.564\dots$

## 9.14 ASYMPTOTIK DER CATALAN-ZAHLEN.

Betrachten wir noch die asymptotische Entwicklung der Catalan-Zahlen. Im 4. Band von TAOCP [43, 7.2.1.6.16] findet sich die Formel

$$C_n = \frac{4^n}{n\sqrt{n\pi}} \left( 1 - \frac{9}{8}n^{-1} + \frac{145}{128}n^{-2} - \frac{1155}{1024}n^{-3} + \frac{36939}{32768}n^{-4} + O(n^{-5}) \right) \quad (9.31)$$

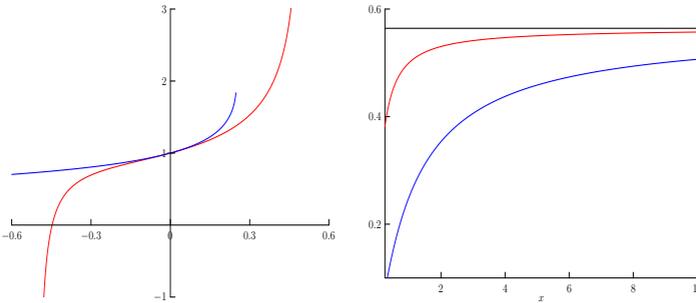


Abbildung 6 – Genauigkeit der Näherung an  $C_n$  (linkes Bild) in Abhängigkeit von den Singularitäten der erzeugenden Funktion (rechtes Bild)

0		1.00010908066
1		1.00010908066
2	2.27294297190	1.00000049478
3		3.00000148434
4	2.07503432970	2.00000002981
5		10.00000014906
6	5.02420644605	5.00000000552
7		35.00000003868
8	14.01591993261	14.00000000195

$C_{\lfloor n/2 \rfloor}$  nach (9.31)     $E_n$  nach (9.32)

Tabelle 27 – Approximationen verallgemeinerter Catalan-Zahlen.

Verwenden wir dagegen unsere ‚Taschenrechnerformel‘ (2.10) mit  $N = 8n + 2$  und

$$T(n) = \frac{4^n}{\sqrt{N\pi/2}} \left( 2 - 2N^{-2} + 21N^{-4} - 671N^{-6} + 45081N^{-8} \right),$$

so zeigt ein direkter Vergleich eine wesentliche höhere Genauigkeit bei etwa gleichem Rechenaufwand. In der Tat gilt  $C_n = \lfloor T(n)/(n+1) \rfloor$  sofern  $n < 31$ . Darüber hinaus liefert die Taschenrechnerformel auch Näherungswerte für die verallgemeinerten Catalan-Zahlen  $E_n$ .

$$E_n = \frac{1}{2} (n+1)^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} T(\lfloor n/2 \rfloor + 1) + O(n^{-17/2}). \quad (9.32)$$

Zur Illustration sind die ersten Werte nach dieser Formel in Tabelle 27 angegeben.

Sogar folgende asymptotische Äquivalenz liefert genauere Werte als (9.31).

$$E_n \sim \frac{2^N}{(n+1)^{[n \text{ even}]} \sqrt{\pi(2N+1)}} \quad (N = n+1 + [n \text{ even}]) \quad (9.33)$$

Insbesondere ergibt sich daraus eine asymptotische Näherung an den Quotienten zweier klassischer Catalan-Zahlen.

$$\frac{C_{n-k}}{C_n} \sim 4^{-k} \frac{n+1/2}{n-k+1/2} \sqrt{\frac{n+5/4}{n-k+5/4}} \quad (9.34)$$

Für den Logarithmus der Catalan-Zahlen liefert (2.8) die asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned} \ln E_n &= \left( n+1 + \frac{(-1)^n}{2} \right) \ln 2 - \ln \sqrt{\pi} - \ln \left( n + \frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{2} \right) \\ &\quad - \frac{(-1)^n}{2} \left( \ln n + \frac{n^{-1}}{2} - \frac{n^{-3}}{12} + \frac{n^{-5}}{10} - O(n^{-7}) \right). \end{aligned}$$

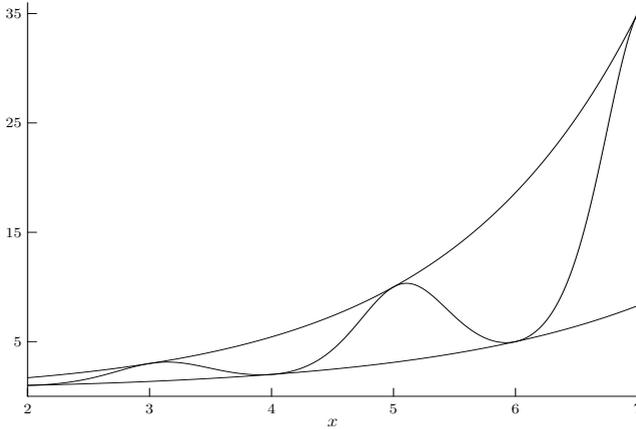
### 9.15 DIE CATALAN-FUNKTION.

Nachdem wir die Catalan-Zahlen auch für ungerades  $n$  definiert haben, liegt es nahe, nach einer allgemeineren Form zu suchen, die auch für komplexes  $z$  erklärt ist, und die gleichzeitig in der Lage ist, kombinatorische Relationen aus dem Diskreten zu bündeln. Wir treffen folgende Wahl:

**Definition 28** Die Catalan-Funktion ist erklärt als

$$E(z) = z! \left( \frac{z! (z+2)!}{z! (z+2)!} \right)^{1/2}. \quad (9.35)$$

Diese Funktion interpoliert die klassischen Catalan-Zahlen an den geraden und die verlorenen Catalan-Zahlen an den ungeraden positiven gan-

Abbildung 7 – Die Catalan-Funktion  $E(x)$ 

zen Zahlen. Unter  $z^{1/2}$  verstehen wir dabei den Hauptzweig der Quadratwurzel.

$$E_n = \frac{n! \lfloor n/2 \rfloor!}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor!} = \frac{n'}{\lfloor (n+2)/2 \rfloor!} = \sqrt{n!n!} \sqrt{\frac{(n+2)!}{(n+2)!}} = E(n) .$$

In unserem Zusammenhang interessiert hauptsächlich der Fall eines reellen  $x > -1$ . Unter dieser Voraussetzung gilt auch

$$E(x) = x! \left( \frac{x!}{x!} \frac{(x+2)!}{(x+2)!} \right)^{1/2} \quad (x > -1) . \quad (9.36)$$

Weiter ist offenbar in diesem Fall gleichwertig zur Definition (9.35)

$$E(x) = 2x! \frac{(x+1)^{\cos(\pi x)/2-1/2}}{(x+2)^{\cos(\pi x)/2+1/2}} \quad (x > -1) . \quad (9.37)$$

Wir bemerken – beispielsweise, und um die Gelegenheit zu nutzen, noch einmal dankbar zu Euler hinüber zuwinken – wie nahtlos diese Darstellung sich an die Produktdarstellung der schwingenden Fakultät (1.29) anfügt.

## 9.16 SCHRANKEN DER CATALAN-FUNKTION.

Unsere Definition von  $E(x)$  erlaubt es, bereits erzielte Ergebnisse über die reelle schwingende Fakultät direkt in Aussagen über die Catalan-Funktion umzuformulieren. Aus den Schranken der schwingenden Fakultät (2.12) folgen so entsprechende Schranken für die Catalan-Funktion

$$\left( \left( \frac{x}{2} \right)!^2 \left( \frac{x+2}{2} \right) \right)^{-1} \leq \frac{E(x)}{x!} \leq \left( \left( \frac{x-1}{2} \right)!^2 \left( \frac{x+1}{2} \right) \right)^{-1} \quad (x \geq 3/2).$$

Abbildung 7 zeigt die reelle Funktion  $E(x)$  mit diesen Schranken. Übersichtlicher ist die Inklusion

$$\frac{x!}{x/2+1} \leq E(x) \leq \frac{x!}{x/2+1/2} \quad (x > -1). \quad (9.38)$$

Denn schreiben wir sie in der äquivalenten Form  $x+1 \leq \frac{2x!}{E(x)} \leq x+2$ , so folgt die Behauptung aus

$$\frac{2x!}{E(x)} = \left( \frac{(x+2)^{\cos(\pi x)+1}}{(x+1)^{\cos(\pi x)-1}} \right)^{1/2} \quad (x > -1). \quad (9.39)$$

Eine Betrachtung der Schranken (2.7) für die schwingende Fakultät führt unter anderem auf folgende einfache Schranken für ganzzahlige Argumente.

$$\left( \frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right)^{-3/2} \leq E_n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \leq \left( \frac{n}{2} + 1 \right)^{-1} \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right)^{-1/2} \quad (n \geq 0, n \text{ even}),$$

$$\left( \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right)^{1/2} \leq E_n \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \leq \left( \frac{n}{2} + \frac{3}{4} \right)^{-1/2} \quad (n \geq 1, n \text{ odd}).$$

9.17 HYPERGEOMETRISCHE DARSTELLUNGEN VON  $E_n$ .

Ein zweites Beispiel dafür, wie sich Ergebnisse über die schwingende Fakultät in Aussagen über die Catalan-Funktion übersetzen lassen, sind die hypergeometrischen Darstellungen der verallgemeinerten Catalan-Zahlen, die sich direkt aus (9.3) und den entsprechenden Darstellungen

der schwingenden Fakultät in Tabelle F ergeben. Die Tabelle F zeigt 14 solcher Darstellungen und steht in der Formelsammlung am Anfang des Buches.

Dabei setzen wir  $n \geq 1$  voraus und verwenden wieder die Abkürzung  $\eta = [n \text{ odd}]$ . Diejenigen hypergeometrischen Identitäten, die auf endliche Summen führen, lassen sich auch als binomische Summen darstellen. Drei Beispiele sind, entsprechend den Identitäten (PL), (RD1) und (RD4):

$$\sum_{k=0}^n 2^{n-\eta} \binom{-n/2 + \eta/2 - 1 + k}{k} \binom{-\eta - 1/2 + k}{k} = E_n \quad (9.40)$$

$$\frac{2}{n - \eta + 2} \sum_{k=0}^n 2^{n-k-\eta} \binom{2k}{k} \binom{-n - 1 + \eta + k}{k} n^\eta = E_n \quad (9.41)$$

$$\frac{2}{n - \eta + 2} \sum_{k=0}^n 2^{n-k-\eta} \binom{2k}{k} \binom{-n - 1 + k}{k} \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^\eta = E_n \quad (9.42)$$

### 9.18 ALLGEMEINE BINOMIAL- UND CATALAN-FUNKTION.

Die *verallgemeinerte Binomialfunktion* (zum Index 2) definieren wir als

$$\binom{z}{w}_2 = z! \left( \frac{(z-w)\lambda(z+w)\lambda}{(z-w)!(z+w)!} \right)^{1/2}. \quad (9.43)$$

Dabei ist  $u^{1/2}$  der Hauptzweig der Quadratwurzel mit  $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ . Unter der *verallgemeinerten Catalan-Funktion* verstehen wir

$$E(z, w) = \frac{w}{z} \binom{z}{w}_2 \quad (z \neq 0). \quad (9.44)$$

Diese beiden Definitionen können alle entsprechenden Definitionen an früheren Stellen ersetzen, denn sie umfassen sie. So ist beispielsweise die Catalan-Funktion

$$E(x) = E(x+1, 1) = \frac{1}{x+1} \binom{x+1}{1}_2 = x! \left( \frac{x\lambda(x+2)\lambda}{x!(x+2)!} \right)^{1/2}. \quad (9.45)$$

Ist  $w = 0$ , dann ist  $\binom{x}{0}_2 = x!$ . Für  $z = 0$  wird der Ausdruck  $\binom{0}{x}_2$  etwa für reelles  $x$ ,  $-1 < x < 1$ , dargestellt durch

$$\binom{0}{x}_2 = \frac{\left( \left( \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right)} \right) \left( \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{x}{2}\right)} \right) \right)^{\cos(\pi x)/2}}{\left( \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{x}{2}\right) \right)^{1/2}}. \quad (9.46)$$

Andererseits kann man wegen  $\binom{1}{2}!_0 x = (((-x)! x!) / ((-x)! x!))^{1/2}$  auch die Reflexionsgleichungen der schwingenden und der monotonen Fakultät anwenden und erhält

$$\binom{0}{x}_2 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin \pi x}{x} \right)^{1/2} \left( \frac{\tan \pi x/2}{x/2} \right)^{(\cos \pi x)/2} \quad (-1 < x < 1).$$

An der Stelle  $x = 0$  ist dabei durch den Grenzwert zu ergänzen. Wir bemerken, dass sich diese Funktion in einer Umgebung der 0 (etwa  $-0.19 \leq x \leq 0.19$ ) durch  $\exp(-3.228x^2)$  bis auf einen Fehler kleiner  $6 \times 10^{-5}$  approximieren lässt.

Schließlich wird  $\binom{x}{x}_2$  für reelles  $x > -1/2$  dargestellt durch

$$\binom{x}{x}_2 = x! \left( \frac{(2x)!}{(2x)!} \right)^{1/2} = \left( \frac{x!}{(x-1/2)!} \right)^{1/2 - \cos(2\pi x)/2} \quad \left( x > -\frac{1}{2} \right).$$

Die notationellen Vorteile, die  $\binom{x}{y}_2$  mit sich bringt, werden schnell deutlich, wenn man versucht sie durch die Gammafunktion darzustellen, so wie in der nächsten Gleichung.

$$\begin{aligned} \binom{x}{y}_2 &= \Gamma(x+1) \frac{\left( \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + 1\right)} \right)^{\cos(\pi(x-y))/2}}{\left( \Gamma\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + 1\right) \right)^{1/2}} \\ &\quad \times \frac{\left( \frac{\Gamma\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1\right)} \right)^{\cos(\pi(x+y))/2}}{\left( \Gamma\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 1\right) \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (9.47)$$

Zum Schluss wollen wir noch zeigen, wie aus (9.43) für ganzzahlige Argumente die Definition (8.2) folgt. Für  $n \geq 0$ ,  $-n \leq k \leq n$  ist

$$\left( \frac{(n-k)! (n+k)!}{(n-k)! (n+k)!} \right)^{1/2} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2} (n-k - [n-k \text{ odd}]) \right)!^{-1} \\ \times \left( \frac{1}{2} (n+k - [n+k \text{ odd}]) \right)!^{-1} \end{cases} .$$

Dies folgt aus

$$\left( \frac{(n \pm k)!}{(n \pm k)!} \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2} (n \pm k - [n \pm k \text{ odd}]) \right)! ,$$

und dies gilt, weil die komplexe schwingende Fakultät auf den nicht-negativen ganzen Zahlen mit der Ur-Definition der schwingenden Fakultät (1.1) zusammenfällt,  $n! / n! = \lfloor n/2 \rfloor!^2$ .

Damit sind wir an den Ausgangspunkt unserer Betrachtung in Kapitel 1 zurückgekehrt. Am Ende des Kapitels 1 hatten wir eine Verallgemeinerung der schwingenden Fakultät eingeführt (1.58). Vermählen wir diese mit Definition (9.43), so erhalten wir die Definition eines verallgemeinerten Binomialkoeffizienten zum Index  $n$ .

$$\binom{z}{w}_n = z! \left( \frac{\mathcal{S}_n(z-w) \mathcal{S}_n(z+w)}{(z-w)! (z+w)!} \right)^{1/n} \quad (9.48)$$

10.1 DIE SCHWINGENDE  $q$ -FAKULTÄT.

Die  $q$ -Fakultät ist definiert als

$$n!_q = 1(1+q)(1+q+q^2) \cdots (1+q+\cdots+q^{n-1}) \quad (10.1)$$

wobei wir unter  $q$  eine reelle Zahl verstehen, von der, wenn notwendig, verlangt wird  $|q| < 1$ . Damit definieren wir die *schwingende  $q$ -Fakultät* in vollständiger Analogie zu (1) als

$$n\lambda_q = \frac{n!_q}{(\lfloor n/2 \rfloor!_q)^2} \quad (10.2)$$

Da  $n!_q$  für  $q \rightarrow 1$  in  $n!$  übergeht, ist die Konsistenzrelation  $n\lambda_q \rightarrow n\lambda$  für  $q \rightarrow 1$  sichergestellt. Eine Reihe von weiteren Darstellungen kann leicht gezeigt werden. Schreiben wir etwa  $[n]_q = (1 - q^n)/(1 - q)$ , so ist

$$n\lambda_q = \left( \prod_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^n [k]_q \right) / \left( \prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} [k]_q \right) \quad (n > 0) \quad (10.3)$$

Verwenden wir dagegen den  $q$ -Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}_q = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - q^{n-i}}{1 - q^{i+1}} \quad (10.4)$$

zur Darstellung, so kann man mit  $\eta = [n \text{ odd}]$  schreiben

$$n\lambda_q = \binom{n-\eta}{(n-\eta)/2}_q \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)^\eta \quad (10.5)$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1									
2	1	1								
3	1	2	2	1						
4	1	1	2	1	1					
5	1	2	4	5	6	5	4	2	1	
6	1	1	2	3	3	3	3	2	1	1

Tabelle 28 – Die Koeffizienten der schwingenden q-Polynome

## 10.2 DIE SCHWINGENDEN q-POLYNOME.

Interessanter ist jedoch eine Darstellung mittels der zyklotomischen Polynome, die definiert sind als [88]

$$\Phi_n(x) = \prod_{1 \leq j \leq n} (x - \zeta_n^j)^{[j \perp n]}$$

wobei  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$  die  $n$ -te Einheitswurzel ist und  $j \perp n$  bedeutet, dass  $j$  teilerfremd zu  $n$  ist.

Da die  $q$ -Fakultät folgende Faktorisierung besitzt

$$n!_q = \prod_{k=2}^n (\Phi_n(q))^{[n/k]}, \quad (10.6)$$

erhält man mit (10.3) eine Darstellung, die es rechtfertigt, von  $n\lambda_q$  auch von den *schwingenden q-Polynomen* zu sprechen

$$n\lambda_q = \prod_{k=2}^n (\Phi_n(q))^{[n/k] - 2[n/(2k)]} \quad (10.7)$$

Aus einem Satz von Chen und Hou [15, Theorem 8] über die minimale Anzahl von irreduziblen Faktoren von  $q$ -Multinomialkoeffizienten kann man folgern, dass  $n\lambda_q$  mindestens  $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$  irreduzible Faktoren besitzt.

Eine rekursive Definition der schwingenden  $q$ -Polynome ist gegeben durch  $0\lambda_q = 1$  und für  $n > 0$  durch

$$n\lambda_q = (n-1)\lambda_q \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right) \left( \frac{1-q}{1-q^{n/2}} \right)^{2[n \text{ even}]} \quad (10.8)$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition (10.2).

Die ersten schwingenden  $q$ -Polynome sind  $0\lambda_q = 1$ ,  $1\lambda_q = 1$ ,  $2\lambda_q = 1 + q$ ,  $3\lambda_q = 1 + 2q + 2q^2 + q^3$ . In Tabelle 28 sind die Koeffizienten von  $n\lambda_q$  für  $1 \leq n \leq 6$  angegeben, welche wir mit  $\check{I}_n(k)$  bezeichnen und auf deren kombinatorische Deutung wir noch eingehen werden. Man bemerke aber jetzt schon, dass die Koeffizienten in Tabelle 28 zur schwingenden Fakultät im gleichen Verhältnis stehen wie die Inversionszahlen  $I_n(k)$  [59] zur monotonen Fakultät.

### 10.3 SCHWINGENDE WÖRTER UND INVERSIONEN.

Ein *schwingendes Wort* mit  $n$  Buchstaben ist ein Wort  $w = w_1 w_2 \cdots w_n$  über dem Alphabet  $\{-1, 0, 1\}$ , dessen Buchstaben  $B(w)$  eine Multimenge folgenden Typs bilden

$$B_n = \left\{ (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}, 0^{[n \text{ odd}]}, 1^{\lfloor n/2 \rfloor} \right\}.$$

In dieser symbolischen Schreibweise ist der Exponent als Vielfachheit des Baselements in der Multimenge zu verstehen. Beispiel:

$$B_5 = \{-1, -1, 0, 1, 1\}.$$

Mit  $\Psi_n$  sei die Menge aller schwingenden Wörter mit  $n$  Elementen bezeichnet. Die Anzahl der Inversionen eines Worts  $w \in \Psi_n$  definieren wir als

$$\text{inv}(w) = \text{card} \left\{ (i, j) \mid i < j \text{ und } w_i > w_j \right\}.$$

Betrachten wir nun die Polynome.

$$p_n(q) = \sum_{\omega \in \Psi_n} q^{\text{inv}(\omega)} \quad (10.9)$$

In Anlehnung an die Notation von D. E. Knuth [41] bezeichnen wir  $[q^k] p_n$ , den Koeffizienten von  $q^k$  des Polynoms  $p_n$ , mit  $\check{I}_n(k)$ . Damit ist

$$\check{I}_n(k) = \text{card} \{w \in \Psi_n \mid \text{inv}(w) = k\}.$$

Die Aussage ist nun, dass die so definierten Polynome gerade die schwingenden Polynome sind.

**Satz 29** Die erzeugende Funktion für die Inversions-Statistik über den schwingenden Wörtern  $\Psi_n$  ist

$$n\lambda_q = \sum_{w \in \Psi_n} q^{\text{inv}(w)}.$$

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall eines Theorems von L. Carlitz [11]. Mit der Definition

$$[n]!_q = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)$$

besagt dieser, dass

$$\sum_{k \geq 0} I_\tau(k) x^k = \frac{[k_1 + \dots + k_n]!_q}{[k_1]!_q \dots [k_n]!_q},$$

wobei unter  $\tau$  der Typ einer Zerlegung von  $n$  zu verstehen ist,  $\tau = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ ,  $k_i \geq 0$  mit  $\sum_i k_i = n$  und unter  $I_\tau(k)$  die Anzahl der Wörter vom Typ  $\tau$  mit genau  $k$  Inversionen. In unserem Fall ist  $\tau = (\lfloor n/2 \rfloor, n \bmod 2, \lfloor n/2 \rfloor)$  und  $I_\tau(k) = \tilde{I}_n(k)$ . Zu zeigen ist

$$n\lambda_q = \frac{[n]!_q}{[\lfloor n/2 \rfloor]!_q [n \bmod 2]!_q [\lfloor n/2 \rfloor]!_q}.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition (10.2) und der Beziehung

$$n!_q = (-1)^n \frac{[n]!_q}{(q-1)^n}. \quad \diamond$$

Wir merken noch an, dass der Grad des Polynoms  $n\lambda_q$  gegeben ist durch

$$\deg(n\lambda_q) = \lfloor n/2 \rfloor^2 + (n-1) [n \text{ odd}].$$

Bisweilen codieren wir schwingende Worte in der *balancierten ternären Notation* [39, S.191]. Dabei verwenden wir die Symbole  $\bar{1}$  für  $-1$  und  $1$  für  $+1$  sowie das Symbol  $0$  und sprechen dann auch von ternären Zeichenketten, oder *Tritstrings*. Tabelle 29 zeigt alle schwingenden Worte der Länge  $n$  in dieser Darstellung für  $1 \leq n \leq 4$ .

$$\begin{aligned} & \{ \underline{0} \} \\ & \{ \bar{1}1, \underline{1}\bar{1} \} \\ & \{ 0\bar{1}1, \underline{01}\bar{1}, \bar{1}01, \underline{10}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}0, \underline{1}\bar{1}0 \} \\ & \{ \bar{1}\bar{1}\bar{1}1, \underline{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}1, \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}, \underline{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}, \bar{1}\bar{1}\bar{1}1 \} \end{aligned}$$

Tabelle 29 – Schwingende Worte als Tritstrings

Schwingenden Orbitale stehen über die Folge ihrer Steuerimpulse in eindeutiger Beziehung zu den schwingenden Wörtern. Die in der Tabelle hervorgehobenen Wörter korrespondieren dabei zu den elevierten Orbitalen. Solche Wörter sind formal dadurch charakterisiert, dass kein Anfangsabschnitt mehr  $\bar{1}$ sen als  $1$ sen enthält.

#### 10.4 DIE SCHWINGENDEN SYMMETRISCHEN $q$ -POLYNOME.

Wir merken an, dass man  $\bar{I}_n(k)$  auch als Koeffizienten von Laurent-Polynomen deuten kann. Dazu führt man die *symmetrische  $q$ -Fakultät* ein als

$$\begin{aligned} n!_{\langle q \rangle} &= q^0(q + q^{-1})(q^2 + q^0 + q^{-2})(q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}) \\ &\quad \dots (q^{n-1} + q^{n-3} + \dots + q^{3-n} + q^{1-n}) \end{aligned} \quad (10.10)$$

und definiert die *schwingende symmetrische  $q$ -Fakultät* analog zu (1.1) als

$$n\lambda_{\langle q \rangle} = \frac{n!_{\langle q \rangle}}{(\lfloor n/2 \rfloor!_{\langle q \rangle})^2} \quad (10.11)$$

#### 10.5 DIE ORBITALPOLYNOME.

Mit  $\omega(i) \in \{-1, 0, 1\}$  bezeichnen wir den  $i$ -ten Steuerimpuls des Orbitals  $\omega$ . Weiter sei  $\Omega_n$  die Menge der *schwingenden Orbitale* über  $n$  Sektoren. Das *Integral eines Orbitals*  $\omega \in \Omega_n$  definieren wir als

$$\text{int}(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq i \leq k} \omega(i).$$

Anschaulich beschreibt das Integral die Differenz zwischen der Fläche, die unter der Umlaufbahn und über dem Heimatorbital und der Fläche,

$n \backslash k$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
0							1						
1							1						
2						1	0	1					
3					1	2	0	2	1				
4			1	0	1	0	2	0	1	0	1		
5	1	2	2	2	3	2	6	2	3	2	2	2	1

Tabelle 30 – Die Orbitalzahlen

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b_n$	1	1	0	0	2	6	0	6	8	36	0	88	58

Tabelle 31 – Anzahl balancierter Orbitale.

die über der Umlaufbahn und unter dem Heimatorbital liegt. Damit können wir den interessierenden Begriff einführen, die Orbitalpolynome.

$$\phi_n(q) = \sum_{\omega \in \Omega_n} q^{\text{int}(\omega)} \quad (10.12)$$

Beispiele:  $\phi_0(q) = 1$ ,  $\phi_1(q) = 1$ ,  $\phi_2(q) = q + 1/q$ ,  $\phi_3(q) = q^2 + 2q + 2/q + 1/q^2$ .

Der Koeffizienten von  $q^k$  des Polynoms  $\phi_n$  gibt also gerade die Anzahl der Orbitale über  $n$  Sektoren an, deren Integral  $k$  ist.

$$[q^k] \phi_n = \text{card} \{ \omega \in \Omega_n \mid \text{int}(\omega) = k \}$$

Wir nennen diese Koeffizienten die *Orbitalzahlen*  $O_n(k)$  und haben die ersten in Tabelle 30 angegeben. Von besonderem Interesse ist dabei das Zentrum dieses Dreiecks, das die Anzahl der Orbitale angibt, deren Integral 0 ist. Wir nennen solche Orbitale *balancierte Orbitale* und notieren ihre Anzahl mit  $b_n = [q^0] \phi_n$ . Tabelle 31 führt einige dieser Werte auf.

In welchem Verhältnis stehen die schwingenden  $q$ -Polynome zu den Orbitalpolynomen? Im Fall  $n$  gerade sind die Koeffizienten der schwingenden Polynome dieselben wie die der Orbitalpolynome (allerdings von anderen Potenzen). Für diesen Fall haben wir also eine weitere kombinatorische Interpretation der schwingenden  $q$ -Koeffizienten gefunden. Im Fall  $n$  ungerade unterscheiden sie sich allerdings.

10.6 DIE KOMPLEXE SCHWINGENDE  $q$ -FAKULTÄT.

Man kann die  $q$ -Form der Gammafunktion einführen als (vgl. [4])

$$\Gamma_q(z) = (1 - q)^{1-z} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 - q^{j+1}}{1 - q^{j+z}} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\})$$

Es gilt  $\lim_{q \uparrow 1} \Gamma_q(z) = \Gamma(z)$ . Damit kann man das  $q$ -Analogon zu der verallgemeinerten schwingenden Fakultät angeben. Dazu ersetzt man in der Darstellung der Umrechnungsformel (1.13)

$$z! = z! \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)^{\cos \pi z - 1}}{\Gamma(z/2 + 1)^{\cos \pi z + 1}}$$

$\cos z\pi$  durch  $C(z) = \Gamma^2(1/2) / (\Gamma(1/2 + z)\Gamma(1/2 - z))$  (eulerscher Ergänzungssatz von 1749).

$$z! = \Gamma(z + 1) \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)^{C(z) - 1}}{\Gamma(z/2 + 1)^{C(z) + 1}} \tag{10.13}$$

In dieser Darstellung ist die schwingende Fakultät vollständig durch die Gammafunktion ausgedrückt. Substituieren wir in dieser Formel jedes Vorkommenis von  $\Gamma$  durch  $\Gamma_q$ , so erhalten wir das  $q$ -Analogon von  $z!$ , das wir mit  $z!_q$  bezeichnen. Die Konsistenzrelation  $\lim_{q \uparrow 1} z!_q = z!$  ist mit (10.13) leicht zu sehen.

10.7 DIE BINOMIALE  $q$ -PYRAMIDE.

Den verallgemeinerten  $q$ -Binomialkoeffizienten (in seiner symmetrischen Form) definieren wir mit der  $q$ -Fakultät (10.1) als Verallgemeinerung von (8.2). Dazu sei  $\tau(n) = (n - [n \text{ odd}])/2$ .

$$\binom{n}{k}_{2;q} = \frac{n!_q}{\tau(n - k)!_q \tau(n + k)!_q} \tag{10.14}$$

Der Fall  $k = 0$  gibt die schwingende  $q$ -Fakultät zurück.

$$n!_q = \binom{n}{0}_{2;q}.$$

Der Anfang dieser *binomischen q-Pyramide* ist in Tabelle (32) angeführt, wegen der offenkundigen Symmetrie  $\binom{n}{-k}_{2;q} = \binom{n}{k}_{2;q}$  allerdings nur der rechte Flügel.

### 10.8 DIE q-CATALAN-PYRAMIDE.

Die *verallgemeinerten q-Catalan-Zahlen* definieren wir mit den verallgemeinerten q-Binomialkoeffizienten (10.14) als Verallgemeinerung von (8.2).  $E_{0,0}(q) = 0$  und

$$E_{n,k}(q) = \frac{[k]_q}{[n]_q} \binom{n}{k}_{2;q} \quad (n \geq 1, -n \leq k \leq n). \quad (10.15)$$

Unter der *q-Klammer* verstehen wir  $[n]_q = (1 - q^n)/(1 - q)$ . Der rechte Flügel dieser *q-Catalan-Pyramide* ist in Tabelle (33) angeführt. Eine Konsequenz der Symmetrie der binomischen Pyramide  $\binom{n}{-k}_2 = \binom{n}{k}_2$  ist die Symmetriebeziehung

$$E_{n,-k}(q) = -q^{-k} E_{n,k}(q) \quad (k > 0).$$

Der Fall  $k = 1$  gibt uns die *q-Catalan-Zahlen*  $E_{n-1}(q) = E_{n,1}(q)$ .

Die Folge der  $E_n(q)$  mit  $n \geq 1$  heben wir hervor:

$$1, 1, 1, q^2 + q + 1, q^2 + 1, q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1, q^6 + q^4 + q^3 + q^2 + 1, \dots$$

### 10.9 DIE q-CATALAN-FUNKTION.

In Analogie zu (9.35) definieren wir die *q-Catalan-Funktion*

$$E_q(z) = z!_q \left( \frac{z!_q (z+2)!_q}{z!_q (z+2)!_q} \right)^{1/2}. \quad (10.16)$$

$n \setminus k$	0	1	2
0	1		
1	1	1	
2	$q+1$	$q+1$	1
3	$(q+1)(q^2+q+1)$	$q^2+q+1$	$q^2+q+1$
4	$(q^2+1)(q^2+q+1)$	$(q^3+q^2+q+1)(q^2+q+1)$	$q^3+q^2+q+1$

Tabelle 32 – Die rechte Seite der binominalen  $q$ -Pyramide.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	0				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	$q+1$	1	
4	0	$q^2+q+1$	$q+1$	$q^2+q+1$	1
5	0	$q^2+1$	$(q^3+q^2+q+1)(q+1)$	$q^2+q+1$	$q^3+q^2+q+1$

Tabelle 33 – Die rechte Seite der  $q$ -Catalan-Pyramide.

## VERBÄNDE DER ORBITALEN

---

### 11.1 EINE LINEARE ORDNUNG DER ORBITALE.

Ein Orbital  $\mathcal{O}$  über  $n$  Sektoren sei gegeben durch die Folge seiner Steuerimpulse, dargestellt als Liste von Werten aus  $\{\bar{1}, 0, 1\}$ . Interpretiert man die Werte der Liste als Exponenten auf den ersten  $n$  Primzahlen, so kann man dem Orbital das Produkt dieser so potenzierten Primzahlen zuordnen. Man erhält auf diese Weise eine Abbildung der Orbitale in die rationalen Zahlen. Ein Beispiel:

$$\mathcal{O} = [\bar{1}, 1, 0, 1, \bar{1}] \mapsto 2^{-1} \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^{-1} = \frac{21}{22}$$

Wir bezeichnen diese rationale Zahl als das *Primorial* von  $\mathcal{O}$ , in Zeichen  $\mathbb{P}(\mathcal{O})$ . Klar ist, dass zwei verschiedene Orbitale auch verschiedene Primorials besitzen und dass man aus einem Primorial das ursprüngliche Orbital eindeutig wiedergewinnen kann.

Damit können wir nun eine totale Ordnung auf der Menge der Orbitale definieren:

$$\mathcal{O} < \mathcal{P} \iff \mathbb{P}(\mathcal{O}) < \mathbb{P}(\mathcal{P}).$$

Man kann diese Ordnung als eine quantitative Erweiterung unserer Klassifikation der Orbitale in elevierte, oszillierende und supprimierte auffassen. Deutet man ein Orbital als einen Rundflug und das zugeordnete Primorial als eine Flugnummer, so kann man sagen: Wenn man auf einem *Rundflug* möglichst *hoch* steigen will, so wähle man Flüge mit kleiner *Flugnummer* (nahe bei 0 gelegen), will man das Heimatorbital aus der Nähe von *oben und unten* betrachten, so wähle man Rundflüge mit Flugnummern nahe bei der 1, und wenn man das Zentrum aller Orbitale besichtigen möchte, dann wähle man Flüge mit möglichst großer Flugnummer.

Etwas mathematischer betrachtet bemerkt man hier eine weitere Variation des Themas, Primzahlenprodukte zueinander ins Verhältnis zu

setzen. Für vorgelegtes  $n$  wird im Null- und Einselement der Ordnung das Produkt der Primzahlen  $p_k$  mit  $0 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor$  verglichen mit dem Produkt der Primzahlen  $p_k$  mit  $\lfloor n/2 \rfloor < k \leq n$ . Dazwischen liegen alle weiteren schlichten Primzahlenprodukte aus diesem Bereich.

Die Abbildungen 5, 13 und 12 sind, von links nach rechts und von oben nach unten gelesen, nach dieser Ordnung sortiert.

### 11.2 ORBITALE UND KOMBINATIONEN.

Der Zusammenhang zwischen Orbitalen und Kombinationen ist einfach: Orbitale lassen sich als  $(\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil)$ -Kombinationen auffassen. Betrachten wir dazu zuerst den Fall eines geraden  $n$ . Dann können wir jeder Folge von Steuerimpulsen  $s$  eine binäre Zeichenkette  $a$  zuordnen. Diese Zuordnung ist gegeben durch

$$s_1 \cdots s_n \mapsto a_{n-1} \cdots a_0; \quad \bar{1} \mapsto 1 \text{ und } 1 \mapsto 0.$$

Aus dieser Liste ergibt sich, ob ein Element einer  $n$ -elementigen Menge *ausgewählt* ist oder nicht.

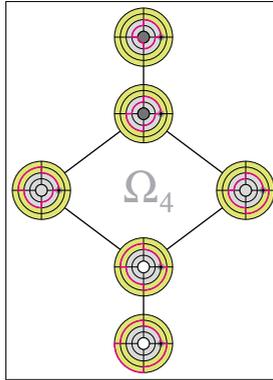
Etwas anders ist der Fall, wenn  $n$  ungerade ist. Dann ist eine Folge von Steuerimpulsen als eine *Kombination über einer punktierten Menge* zu interpretieren. Zur Darstellung kann eine ternäre Zeichenkette  $t$  verwendet werden, mit folgender Zuordnung

$$s_1 \cdots s_n \mapsto t_{n-1} \cdots t_0; \quad \bar{1} \mapsto 1, 1 \mapsto 0 \text{ und } 0 \mapsto 2.$$

Das durch 2 herausgehobene (eindeutige) Element in der *punktierten Kombination* wird als *ausgewählt und markiert* angesehen.

### 11.3 DER ORBITALVERBAND.

Eine lineare Ordnung wird dem Beziehungsreichtum innerhalb der Menge der Orbitale nicht gerecht. Deshalb strukturieren wir die Orbitale in einem nichtlinearen Verband. Von zwei Orbitalen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{P}$  über  $n$  Sektoren sagen wir  $\mathcal{P}$  *liegt unterhalb von*  $\mathcal{O}$ , in Zeichen  $\mathcal{P} \preceq \mathcal{O}$ , wenn die Bahnhöhe von  $\mathcal{O}$  über jedem Sektor größer oder gleich der Bahnhöhe von  $\mathcal{P}$  ist. Aber das bedarf noch der Präzisierung.

Abbildung 8 – Der Orbitalverband  $\Omega_4$ .

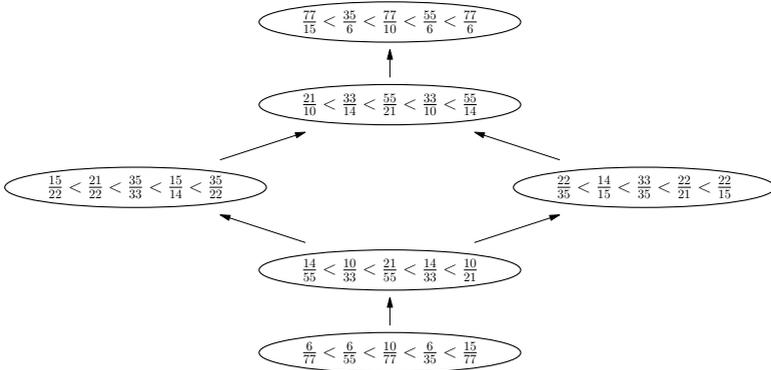
Ist  $n$  eine gerade Zahl, so wird durch diese Ordnung sogar ein Verband definiert. Das heißt, man kann zwei Orbitalen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{P}$  eindeutig ein Orbital  $\mathcal{O} \vee \mathcal{P}$  zuordnen, welches das kleinste Orbital ist, das größer oder gleich  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{P}$  ist.  $\mathcal{O} \vee \mathcal{P}$  besitzt auf jedem Sektor die größere der Bahnhöhen der beiden Orbitale. Ebenso kann man den Orbitalen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{P}$  ein Orbital  $\mathcal{O} \wedge \mathcal{P}$  zuordnen, welches das größte Orbital ist, das kleiner oder gleich  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{P}$  ist.  $\mathcal{O} \wedge \mathcal{P}$  besitzt auf jedem Sektor die kleinere der beiden Bahnhöhen von  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{P}$ .

Ist  $n > 1$  eine ungerade Zahl, dann ist die Situation komplizierter. Wir ordnen in diesem Fall einem Orbital  $\mathcal{O}$  zunächst das Orbital  $\mathcal{O}^*$  aus  $\Omega_{n-1}$  zu, das aus  $\mathcal{O}$  durch Streichen der 0 aus der Liste der Steuerimpulse entsteht. Ist  $\mathcal{P}^* \neq \mathcal{O}^*$ , dann setzen wir  $\mathcal{P} \preceq \mathcal{O}$  als gleichbedeutend mit  $\mathcal{P}^* \preceq \mathcal{O}^*$ ; ist dagegen  $\mathcal{P}^* = \mathcal{O}^*$ , dann ordnen wir  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{O}$  gemäß ihrem Primorial  $\mathbb{P}(\mathcal{P})$  und  $\mathbb{P}(\mathcal{O})$  an.

In Abbildung 8 zeigt den Orbitalverband  $\Omega_4$ , wobei die Orbitale durch ihre Bahnen dargestellt sind. Abbildung 9 zeigt das Hasse-Diagramm des Orbitalverbandes  $\Omega_5$ , wobei ein Orbital durch sein Primorial repräsentiert wird.

#### 11.4 DIE ERZEUGUNG VON ORBITALEN.

Für unsere Zwecke liegt der Gewinn der Interpretation von Orbitalen als spezielle Kombinationen in erster Linie darin, dass wir bei der *Erzeugung von Orbitalen* nun aus dem großen Fundus von Algorithmen schöpfen

Abbildung 9 – Der Orbitalverband  $\Omega_5$ .

können, die für die Erzeugung von Kombinationen existieren. Grundsätzlich können wir uns dabei auf den Fall eines geraden  $n$  beschränken, denn eine punktierte Kombination geht aus einer gewöhnlichen Kombination hervor, indem man das gekennzeichnete Element an jeder möglichen Stelle einfügt. So kann man sich die Erzeugung von  $\Omega_5$  aus  $\Omega_4$  etwa so vorstellen:

1100		1100–	110–0	11–00	1–100	–1100
1010		1010–	101–0	10–10	1–010	–1010
1001	→	1001–	100–1	10–01	1–001	–1001
0110		0110–	011–0	01–10	0–110	–0110
0101		0101–	010–1	01–01	0–101	–0101
0011		0011–	001–1	00–11	0–011	–0011

Dieser Schritt ist der *Permutationsschritt*, da er vollkommen analog ist zu der Art, wie man die Menge der  $n$ -Permutationen aus der Menge der  $(n-1)$ -Permutationen gewinnen kann. Wir sehen also, dass die Hierarchie der Orbitale erzeugt wird im Wechsel von Kombinationsschritten und Permutationsschritten. Dies ist die kombinatorische Sicht auf unsere schon früher analytisch gemachte Beobachtung, dass sich die schwingende Fakultät wie ein *Hybrid* aus Fakultät und Binomialkoeffizient verhält.

Fassen wir kurz zusammen, was wir über die Erzeugung von Orbitalen wissen.

- Die Erzeugung *aller Orbitale* lässt sich auf die Erzeugung von Kombinationen zurückspielen, mit der kleinen zusätzlichen Abwandlung, die wir gerade betrachtet haben. Bezüglich Kombinationen

verweisen wir auf D. E. Knuth's TAOCP [42, 7.2.1.3], insbesondere auf die Algorithmen L und T, mit denen sich für gerades  $n$  die Folge der Steuerimpulse erzeugen lassen.

- Die Erzeugung der *elevierten Orbitale* ist im Fall eines geraden  $n$  identisch mit der Erzeugung binärer Bäume. Im Fall einer ungeraden Anzahl von Sektoren genügen kleine Einfügungen in die bekannten Algorithmen. Zur Erzeugung binärer Bäume sei auf [43, 7.2.1.6] verwiesen, insbesondere auf die Algorithmen P und B. Die Erzeugung *supprimierter Orbitale* ist damit auch abgedeckt.
- *Eratosthenische Orbitale* können zum Beispiel durch eine Erweiterung eines Algorithmus von J. L. Rémy [71] erzeugt werden, siehe auch [43, 7.2.1.6].

## 11.5 ERATOSTHENISCHE ORBITALE.

Die eratosthenische Fakultät wurde in (1.13) eingeführt als die erste Primzahlableitung der natürlichen Zahlen. Die kombinatorische Bedeutung dieser Zahlen wollen wir jetzt betrachten. Die eratosthenische Fakultät zählt Orbitale in einer erweiterten Klasse von Orbitalsystemen, den *dekorierten Orbitalsystemen*.

In diesen ist eine eindeutige Kennzeichnung einer Teilmenge der Bahnen gegeben, konventionell etwa durch eine Nummerierung der Bahnen, anschaulich aber durch eine eindeutige Färbung der Bahnen aus einer festen Farbpalette. Ein *eleviertes eratosthenisches Orbitalsystem* ist ein dekoriertes Orbitalsystem, in dem die elevierten Bahnen gekennzeichnet sind. Ein *eleviertes eratosthenisches Orbital* ist ein eleviertes Orbital in einem elevierten eratosthenischen Orbitalsystem. Analoge Definitionen gelten für den supprimierten Fall. Ein *eratosthenisches Orbital* ist dann entweder ein eleviertes oder ein supprimiertes eratosthenisches Orbital.

Waren bis jetzt die Bahnen eines Orbitalsystems nur die Schemen im Hintergrund, vor denen die Folgen der Steuerimpulse ihre Interpretation fanden, so ist das jetzt nicht mehr der Fall. Die Bahn eines Teilchens ist nun untrennbar vom Gesamtzustand (der Färbung) des Orbitalsystems. Man mache sich etwa klar, dass zwei elevierte eratosthenische Orbitale selbst dann verschieden sein können, wenn beide die selbe Folge an Steuerimpulsen haben und ihre Bahnabschnitte die gleiche Farbgebung besitzen!

Die Aussage ist nun, dass die erasthenische Fakultät die elevierten erasthenischen Orbitale abzählt. Denn es gibt  $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)!$  Möglichkeiten, die Bahnen der elevierten Orbitale durch die Zahlen 0 bis  $\lfloor n/2 \rfloor$  zu nummerieren, und so erhalten wir

$$(\lfloor n/2 \rfloor + 1)! E_n = n! \lfloor n/2 \rfloor! = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!} = n' \quad \diamond \quad (11.1)$$

Die selbe Aussage gilt natürlich für supprimierte erasthenische Orbitale. Wir merken an, dass, wenn wir uns der Sprache binärer Bäume bedienen, wir den Fall sogenannter *dekorierte binärer Bäume* betrachten würden, allerdings zum Preis geringerer Allgemeinheit. Eine solche Darstellung findet sich bei D. E. Knuth [43, 7.2.1.6], der dort auch den bemerkenswerten Algorithmus von J. L. Rémy [71] bespricht, welcher sich auch auf das hier besprochene Szenarium erweitern lässt.

Der Zusammenhang zwischen den Catalan-Zahlen und der erasthenischen Fakultät wird noch deutlicher, wenn man das Verhältnis der entsprechenden Funktionen betrachtet

$$E(z) \left( \frac{z}{2} + 1 \right)!^{(\cos(\pi z) + 1)/2} = z' \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \right)!^{(\cos(\pi z) - 1)/2}. \quad (11.2)$$

Diese Identität lässt sich als eine *Umrechnungsformel* zwischen der Catalan-Funktion und der erasthenischen Fakultät deuten, welche in vollständiger Analogie zu unserer Umrechnungsformel zwischen den Fakultäten steht (1.13).

### 11.6 WIE VERSTECKT MAN EINEN SCHATZ IN EINEM BAUM?

Nun, als erstes konstruiert man einen Baum, und wir wollen uns dabei beschränken auf planare Wurzelbäume, die aus  $n$  inneren Knoten mit genau zwei Nachfolgern bestehen, also auf *binäre Bäume*. Wir bezeichnen die Menge dieser Bäume mit  $B_n$ . Unter einem *Knoten* verstehen wir unterschiedslos einen inneren Knoten oder einen äußeren Knoten (welcher häufig Blatt genannt wird). Die Menge der Knoten eines Baums aus  $B_n$  sei  $K_n$ .

Haben wir nun einen solchen Baum, so können wir unseren Schatz in einem Knoten des Baums verstecken. Auf wie viele verschiedene Weisen?

Die Anzahl der binären Bäume mit  $n$  inneren Knoten ist wohlbekannt  $C_n = E_{2n}$ . Die Anzahl der inneren Knoten ist  $n$ , die Anzahl der äußeren

Knoten  $n + 1$ . Also ist die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten einen Schatz in einem binären  $n$ -Baum zu verstecken

$$V_n = \text{card}(B_n) \text{card}(K_n) = E_{2n}(2n + 1) = E_{2n+1} .$$

Mit anderen Worten: Die verallgemeinerten Catalan-Zahlen zählen im Wechsel die binären Bäume und die Anzahl aller Knoten dieser binären Bäume ab. Dieses Resultat ist nicht unmittelbar evident nach der Definition der verallgemeinerten Catalan-Zahlen als Anzahl der elevierten Orbitale.

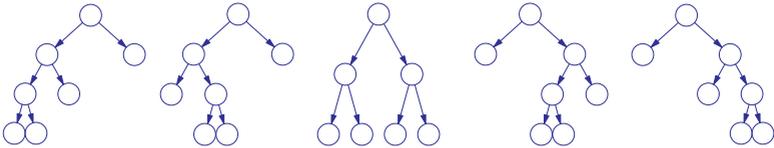


Abbildung 10 – 35 Verstecke in 5 binären 3-Bäumen.

### 11.7 FARBIGE ORBITALSYSTEME UND VERKETTETE ORBITALE.

In diesem Abschnitt stellen wir die Frage nach den kombinatorischen Beziehungen zwischen den Sektoren eines Orbitalsystems und den Orbitalbahnen. Führen wir dazu einige Sprechweisen ein.

Ein *farbiges Orbitalssystem* ist ein Orbitalssystem, indem alle Sektoren gekennzeichnet sind durch eine Farbe aus einer festen Palette von  $n$  Farben, so dass keine zwei Sektoren die selbe Farbe haben (abgekürzt:  $FOS_n$ ). Ein *Farborbital* ist ein Orbital in einem farbigem Orbitalssystem.

Eine *eratosthenische Schwingung* ist ein Paar, bestehend aus einem elevierten eratosthenischen Orbital und einem supprimierten eratosthenischen Orbital über der selben Anzahl von Sektoren. Die entsprechenden eratosthenischen Orbitalssysteme denkt man sich dabei superponiert und die Orbitale hintereinander durchlaufen – ein einfacher Fall einer *Orbitalkette*. Die Menge aller eratosthenischen Schwingungen nennen wir ein *schwingendes Orbitalssystem* (kurz:  $SOS_n$ ). Der Index  $n$  bezeichnet dabei stets die Anzahl der Sektoren.

Die Frage lautet nun: Wie viele verschiedene Farborbitale bzw. eratosthenische Schwingungen gibt es? Sie ist nun leicht zu beantworten. Sei  $F_n$  eine Palette mit  $n$  Farben und bezeichne  $EO_n$  ein eratosthenisches

Orbitalsystem, dann gilt

$$\text{card}(\text{FOS}_n) = \text{card}(\Omega_n \times F_n) = \text{card}(\Omega_n) \text{card}(F_n) = n \wr n! ,$$

$$\text{card}(\text{SOS}_n) = \text{card}(\text{EO}_n \times \text{EO}_n) = (E_n (\lfloor n/2 \rfloor + 1)!)^2 .$$

Führen wir für die *orbitale Fakultät* die Bezeichnung  $n^\circ = n \wr n!$  ein, so schreibt sich die in (1.42) bewiesene Identität  $n' = \sqrt{n \wr n!}$  als  $n^\circ = (n')^2$ . Auf der anderen Seite gilt für  $n'$  auch die in (11.1) bewiesene Identität  $n' = E_n (\lfloor n/2 \rfloor + 1)!$ . Damit folgt

$$\text{card}(\text{FOS}_n) = n^\circ = \text{card}(\text{SOS}_n) . \tag{11.3}$$

**Satz 30** *Man hat genauso viele Möglichkeiten auf eratosthenischen Bahnen zweimal um das Orbitalzentrum zu fliegen wie man Möglichkeiten hat, einmal auf einer beliebigen Bahn über verschiedenfarbige Sektoren zu fliegen.*

Tabelle 35 zeigt einige Werte dieser Abzählungen für kleines  $n$ . Hier sieht man die schwingende Fakultät, die eratosthenische Fakultät, die orbitale Fakultät und die verallgemeinerten Catalan-Zahlen gemeinsam am Werk. Zur Berechnung von  $n^\circ$  für größere Werte von  $n$  bedient man sich des in Kapitel 4 beschriebenen Algorithmus (4.4).

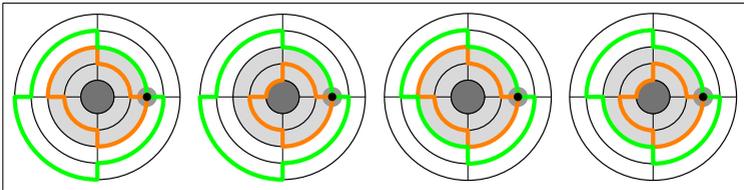


Abbildung 11 – Eratosthenische Schwingungen über  $\langle -2, -1, 0, 1, 2 \rangle$

Abbildung 11 zeigt eratosthenische Orbitale über den durch, sagen wir,  $\langle -2, -1, 0, 1, 2 \rangle$  abgezählten Kreisbahnen. Es erweist sich bei der graphischen Darstellung als Vorteil, die supprimierten Orbitale im *Rückwärtsgang* zu durchfliegen, pardon, die Konvention einzuführen, elevierten Orbitalen einen mathematisch positiven Durchlaufsinne und supprimierten Orbitalen einen mathematisch negativen Durchlaufsinne zu geben.

## 11.8 KOLLISIONEN UND DAS DUAL EINES ORBITALS.

Eine interessante Frage bei der Betrachtung von Orbitalen ist die Frage nach *Kollisionen*. Dabei verstehen wir unter einer Kollision zweier Orbitale  $\omega_1$  und  $\omega_2$  den Umstand, dass  $\omega_1$  einen Sektor  $\sigma_k$  auf der selben Bahnhöhe durchläuft wie das Orbital  $\omega_2$ ,  $h_{\omega_1}(\sigma_k) = h_{\omega_2}(\sigma_k)$ . Zur Untersuchung dieser Frage führen wir einige Begriffe ein.

Auf der Menge der Steuerimpulse  $S = \{\bar{1}, 0, 1\}$  sei die Abbildung  $\bar{\cdot} : S \rightarrow S$  gegeben durch die Zuordnung  $\bar{1} \mapsto 1, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto \bar{1}$ .

Ist nun  $\omega = [s_1, s_2, \dots, s_n]^p$  ein gerichtetes Orbital, d. h.  $s_i$  ist ein Element von  $S$  und  $p$ , die (*Dreh-*)*Richtung* des Orbitals, ist ein Element aus  $\{\odot, \ominus\}$ . Dann nennen wir  $\omega^* = [\bar{s}_n, \bar{s}_{n-1}, \dots, \bar{s}_1]^q$  das zu  $\omega$  *duale Orbital*, wenn  $q$  der zu  $p$  entgegengesetzte Drehsinn ist. Das heißt, startet  $\omega$  im mathematisch positiven Sinn aus dem Hafen, so startet  $\omega^*$  im mathematisch negativen Sinn und umgekehrt. Das Dual von

$$\omega = [-+-0++-]^{\odot} \quad \text{ist} \quad \omega^* = [+--0+-+]^{\ominus},$$

wobei wir die Schreibweise nochmals komprimiert haben.

**Satz 31** *Ist  $\omega$  ein gerichtetes Orbital über einer geraden Anzahl von Sektoren, so gibt es mit seinem dualen Orbital  $\omega^*$  keine Kollision. Ist  $\omega$  ein gerichtetes Orbital über einer ungeraden Anzahl von Sektoren, so gibt es mit seinem dualen Orbital  $\omega^*$  genau dann eine Kollision, wenn sie auf der Ausnahmestrecke fliegen.*

*Beweis:* Wir nummerieren die Bahnen im Orbitalsystem nach ihrer Höhe relativ zur Bahn des Hafens, das heißt durch  $\langle -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m \rangle$ . Die Sektoren stellen wir uns im positiven Drehsinn durch  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  durchnummeriert vor. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass  $\omega$  positiv orientiert ist.

Sei nun die Anzahl der Sektoren gerade. Nach dem ersten Sprung kann sich das Teilchen im Sektor 1 auf den Bahnen  $-1, +1$ , nach dem zweiten Sprung im Sektor 2 auf den Bahnen  $-2, 0, +2$  und nach dem  $k$ -ten Sprung im Sektor  $k$  auf den Bahnen  $-k, -k+2, \dots, k-2, +k$  befinden, wobei die durch  $\dots$  bezeichneten Bahnen in 2-er Schritten zu durchlaufen sind. Damit sieht man, dass sich das Teilchen nach  $k$  Sprüngen genau dann auf einer geraden beziehungsweise ungeraden Bahn befindet, wenn es sich in einem Sektor mit gerader beziehungsweise ungerader Nummer befindet.

Beim dualen Orbital  $\omega^*$  liegen die Dinge genau umgekehrt. Nach dem ersten Sprung befindet sich das Teilchen im (geraden) Sektor  $n - 2$  auf den Bahnen  $-1$  oder  $+1$ , etc., so dass es sich nach  $k$  Sprüngen im Sektor  $n - k - 1$  befindet auf einer Bahn mit ungerader Nummer, wenn die Sektorennummer gerade ist, und auf einer Bahn mit gerader Nummer, wenn die Sektorennummer ungerade ist. Damit ist es unmöglich, dass die beiden Orbitale in einem Sektor den selben Bahnabschnitt durchlaufen – sie sind durch die Parität getrennt und es kommt zu keiner Kollision.

Ist nun die Anzahl der Sektoren ungerade. Ist der Geradeausflug des Orbitals  $\omega$  im Sektor  $k$ , so ist der Geradeausflug des dualen Orbitals  $\omega^*$  im Sektor  $n - 1 - (n - k - 1) = k$ . Hier kommt es zur Kollision. Dies ist aber der einzige Sektor, in dem das möglich ist. Denn schneidet man diesen Sektor heraus, so fügt sich der Rest zu einem Orbitalssystem mit einer geraden Anzahl von Sektoren, in dem eine Kollision wie gesehen nicht möglich ist.

Steuerimpulse $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$	Binäre Kette $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$	Kombination $c_3 c_2 c_1$	Primorial $\mathbb{P}(s_1 \dots s_6)$
111 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	000111	210	30/1001
11 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	001011	310	42/715
11 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	001101	320	66/455
1 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	010011	410	70/429
11 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	001110	321	78/385
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	100011	510	105/286
1 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	010101	420	110/273
1 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	010110	421	130/231
1 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	011001	430	154/195
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	100101	520	165/182
1 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	011010	431	182/165
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	100110	521	195/154
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	101001	530	231/130
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	101010	531	273/110
1 $\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	011100	432	286/105
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	110001	540	385/78
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	101100	532	429/70
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	110010	541	455/66
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	110100	542	715/42
$\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	111000	543	1001/30

Tabelle 34 – Orbitale über 6 Sektoren als (3,3)-Kombinationen.

n	0	1	2	3	4	5
$n^{\circ}$	1	1	4	36	144	3600
card(FOS <sub>n</sub> )	1 · 1	1 · 1	2 · 2	6 · 6	6 · 24	30 · 120
card(SOS <sub>n</sub> )	$(1 \cdot 1)^2$	$(1 \cdot 1)^2$	$(1 \cdot 2)^2$	$(3 \cdot 2)^2$	$(2 \cdot 6)^2$	$(10 \cdot 6)^2$

Tabelle 35 – Abzählung farbiger und schwingender Orbitalsysteme



Teil IV

ANHANG

# A

## BALLOT-, FINE-, MOTZKIN-, SCHRÖDER-ZAHLEN

---

### A.1 DIE CATALANISCHE BALLOT-REKURSION.

Betrachten wir folgendes Dreieck, welches das Dreieck der Ballot-Zahlen verallgemeinert, wie es etwa bei Knuth [43, 7.2.1.6.22] zu finden ist. Die Bezeichnungen lehnen sich an diese Darstellung an.

$\mathcal{E}_{p0}$	1										
$\mathcal{E}_{p1}$	0	1									
$\mathcal{E}_{p2}$	1	0	1								
$\mathcal{E}_{p3}$	0	2	0	3							
$\mathcal{E}_{p4}$	1	0	2	0	2						
$\mathcal{E}_{p5}$	0	3	0	8	0	10					
$\mathcal{E}_{p6}$	1	0	3	0	5	0	5				
$\mathcal{E}_{p7}$	0	4	0	15	0	30	0	35			
$\mathcal{E}_{p8}$	1	0	4	0	9	0	14	0	14		
$\mathcal{E}_{p9}$	0	5	0	24	0	63	0	112	0	126	
$\mathcal{E}_{pq}$	$\mathcal{E}_{0q}$	$\mathcal{E}_{1q}$	$\mathcal{E}_{2q}$	$\mathcal{E}_{3q}$	$\mathcal{E}_{4q}$	$\mathcal{E}_{5q}$	$\mathcal{E}_{6q}$	$\mathcal{E}_{7q}$	$\mathcal{E}_{8q}$	$\mathcal{E}_{9q}$	

Nennen wir diese Zahlen  $\mathcal{E}_{pq}$ . Ist die Parität von  $p$  und  $q$  verschieden, dann sind sie 0. Sie besitzen folgende Rekursion:  $\mathcal{E}_{00} = 1$  und

$$\mathcal{E}_{pq} = \mathcal{E}_{(p-2)q} + [q \text{ odd}] \mathcal{E}_{(p-1)(q-1)} + \mathcal{E}_{p(q-2)} \quad \text{falls } 0 \leq p \leq q \neq 0;$$

und  $\mathcal{E}_{pq} = 0$  falls  $p < 0$  oder  $p > q$ . Mit anderen Worten, betrachtet man ein kleines Teildreieck der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} & & c \\ & b & 0 \\ a & 0 & a + [b] + c \end{array}$$

so ist die rechte untere Ecke die Summe der linken Seite, wobei das mittlere  $b$  nur dann aufgenommen wird, wenn die Grundlinie einen ungeraden Index hat.

Nun zur allgemeinen Formel. Mit der Setzung  $\binom{n}{-1} = 0$  und der Abkürzung  $\alpha_{pq} = [p + q \text{ even}] (\lfloor p/2 \rfloor + \lfloor q/2 \rfloor + 1)^{[q \text{ odd}]}$  ist

$$\varepsilon_{pq} = \alpha_{pq} \left( \binom{\lfloor p/2 \rfloor + \lfloor q/2 \rfloor}{\lfloor p/2 \rfloor} - \binom{\lfloor p/2 \rfloor + \lfloor q/2 \rfloor}{\lfloor p/2 \rfloor - 1} \right). \quad (\text{A.1})$$

Dies kann man alternativ schreiben

$$\varepsilon_{pq} = \alpha_{pq} \frac{(q-p)/2 + 1}{\lfloor q/2 \rfloor + 1} \binom{\lfloor p/2 \rfloor + \lfloor q/2 \rfloor}{\lfloor p/2 \rfloor}. \quad (\text{A.2})$$

Oder mit Fallunterscheidung:

$$\varepsilon_{pq} = \begin{cases} 0 & \text{falls } p + q \text{ odd;} \\ \frac{(p+q)(q-p+2)}{2q+2} \binom{(p+q-2)/2}{(p-1)/2} & \text{sonst, falls } q \text{ odd;} \\ \frac{q-p+2}{q+2} \binom{(p+q)/2}{p/2} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Ein Vergleich mit der catalanischen Zahlenpyramide zeigt, dass die Ballot-Zahlen nur eine andere Darstellung dieser Pyramide sind. Denn setzt man  $p = n - k$  und  $q = n + k - 2$ , so sieht man unmittelbar, dass die nicht verschwindenden  $\varepsilon_{pq}$  der gleichen Rekursion genügen (und den gleichen Anfangswerten) wie die verallgemeinerten Catalan-Zahlen  $E(n, k)$  (9.11). Und in diesem Fall gilt  $\varepsilon_{(n-k), (n+k-2)} = E(n, k)$ .

## A.2 DIE VERALLGEMEINERTEN FINE-ZAHLEN.

Die *Fine-Zahlen* sind definiert als

$$F_n = \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(2n-2k)\lambda}{2n-2k+2}. \quad (\text{A.4})$$

$$F_n \equiv 1, 0, 1, 2, 6, 18, 57, 186, 622, 2120, \dots \quad (n \geq 0).$$

Die folgende Summe zieht sich in sich zusammen, zum Wert  $E_{2n}$ .

$$\frac{(2n)\lambda}{n+1} = 2 \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(2n-2k)\lambda}{2n-2k+2} + \sum_{k=0}^{n-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(2n-2k-2)\lambda}{2n-2k} \quad (\text{A.5})$$

								1
							1	1
						1	2	1
				1	3	3	3	
			1	4	6	12	2	
		1	5	10	30	10	10	
	1	6	15	60	30	60	5	
1	7	21	105	70	210	35	35	
1	8	28	168	140	560	140	280	14

Tabelle 36 – Binomische Zerlegung der Motzkin-Zahlen.

Damit haben wir folgende bekannte Identität erkannt

$$C_n = 2F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2) . \tag{A.6}$$

Das Gegenstück zu (A.5) stellt  $E_{2n+1}$  dar:

$$\frac{(2n+1)!}{n+1} = 2 \sum_{k=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(2n-2k+1)!}{2n-2k+2} + \sum_{k=0}^{n-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{(2n-2k-1)!}{2n-2k} . \tag{A.7}$$

Die verallgemeinerten Fine-Zahlen führen wir durch die Gleichungen (A.5) und (A.7) ein, zuzüglich eines Skalierungsfaktors von  $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ .

$$V_n \equiv 1, 3, 0, 0, 4, 20, 16, 120, 96, 888, 576, 6504, 3648, \dots \quad (n \geq 0)$$

Die klassischen Fine-Zahlen erhält man daraus als  $F_n = 2^{-n}V_{2n}$ . Der Zusammenhang mit den (verallgemeinerten) Catalan-Zahlen ist nun

$$E_n = 2^{1-\lfloor n/2 \rfloor} (V_n + V_{n-2}) \quad (n \geq 2) . \tag{A.8}$$

### A.3 VERALLGEMEINERTE MOTZKIN-ZAHLEN.

Die klassischen Motzkin-Zahlen sind definiert als folgende binomische Summe der ‚geraden‘ Catalan-Zahlen  $E_{2k}$ ,

$$M_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} E_{2k} .$$

Mit den verallgemeinerten Catalan-Zahlen  $E_k$  kann man gleichzeitig feiner unterscheiden und einfacher sagen: „Die Motzkin-Zahlen *sind* die binomische Summe der Catalan-Zahlen.“ Die Definitionen sind:

$$\begin{aligned} M_n^* &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} E_k ; & 1, 2, 4, 10, 25, 66, 177, 484, \dots \\ M_n^e &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} E_k \text{ [k even] } ; & 1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, \dots \\ M_n^o &= \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} E_k \text{ [k odd] } ; & 0, 1, 2, 6, 16, 45, 126, 357, \dots \end{aligned}$$

Die Zahlen  $M_n^*$  nennen wir *verallgemeinerte Motzkin-Zahlen*. Der gerade Fall stimmt mit dem klassischen Fall überein,  $M_n = M_n^e$ . Zur Kombinatorik der Motzkin-Zahlen verweisen wir auf [30], wo sie ausführlich dargestellt wird. Bisweilen wird die erste Differenz dieser Zahlenfolgen unter dem Namen *verallgemeinerte Ballot-Zahlen* geführt.

$$b_n^* = 1, 2, 6, 15, 41, 111, 307, 855, \dots$$

$$b_n^e = 0, 1, 2, 5, 12, 30, 76, 196, \dots$$

$$b_n^o = 1, 1, 4, 10, 29, 81, 231, 659, \dots$$

#### A.4 VERALLGEMEINERTE RIORDAN-ZAHLEN.

Die klassischen Riordan-Zahlen sind definiert als  $R_0 = 1$  und

$$R_n = M_{n-1} - R_{n-1} \quad (n > 0).$$

In vollständiger Analogie werden nun die verallgemeinerten Riordan-Zahlen  $R_n^*$  eingeführt als  $R_0^* = 1$  und

$$R_n^* = M_{n-1}^* - R_{n-1}^* \quad (n > 0).$$

Von Interesse sind auch die komplementären Riordan-Zahlen

$$R_n^c = R_n^* - R_n.$$

Die komplementären Riordan-Zahlen stehen unter anderem in Beziehung zu einer von D. P. Robbins vorgeschlagenen Formel für den Grad

der verallgemeinerten Heron Polynome. Eine explizite Darstellung, die keinen Bezug auf die Riordan-Zahlen macht, ist

$$R_n^c = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left( (k+1) \left( \frac{k+1}{2} \right)^{k \bmod 2} - 2^k \right).$$

Die Anfangswerte der Riordan-Folgen sind:

$$R_n = 1, 0, 1, 1, 3, 6, 15, 36, 91, \dots$$

$$R_n^c = 0, 0, 1, 1, 5, 11, 34, 92, 265, \dots$$

$$R_n^* = 1, 0, 2, 2, 8, 17, 49, 128, 356, \dots$$

**A.5 DIE KLASSISCHEN SCHRÖDER-ZAHLEN.**

Für die *Schröder-Zahlen* findet man zwei verschiedene Wertefolgen in der Literatur:  $S_n = 1, 2, 6, 22, 90, 394, \dots$  und  $S_n = 1, 1, 3, 11, 45, 197, \dots$  ( $n \geq 0$ ). Abgesehen vom Wert für  $n = 0$  ist die zweite Folge die Hälfte der ersten. Unser Zugang zeigt, wie diese beiden Definitionen zusammenhängen.

$$S_n^* = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} E_{2k}; \quad 1, 2, 6, 22, 90, 394, \dots$$

$$S_n^e = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} E_{2k} [k \text{ even}]; \quad 1, 1, 3, 11, 45, 197, \dots$$

$$S_n^o = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} E_{2k} [k \text{ odd}]; \quad 0, 1, 3, 11, 45, 197, \dots$$

Das Summendreieck der Schröder-Zahlen hebt die dabei verwendeten Summanden heraus, zum Beispiel

$$S_6^e = 132 + 630 + 140 + 1 = 903, \quad S_6^o = 462 + 420 + 21 = 903.$$

1							
1	1						
2	3	1					
5	10	6	1				
14	35	30	10	1			
42	126	140	70	15	1		
132	462	630	420	140	21	1	
429	1716	2772	2310	1050	252	28	1

Zur Kombinatorik der Schröder-Zahlen vergleiche man zum Beispiel D. E. Knuth [43, 7.2.1.6, Ex.66]. Knuth verwendet dort die  $S_n^o$  Spielart

1	1	1	3	2	10	5	35	14
1	2	3	12	10	60	35	280	126
1	3	6	30	30	210	140	1260	630
1	4	10	60	70	560	420	4200	2310
1	5	15	105	140	1260	1050	11550	6930
1	6	21	168	252	2520	2310	27720	18018
1	7	28	252	420	4620	4620	60060	42042
1	8	36	360	660	7920	8580	120120	90090

Tabelle 37 – Das Schröder-Tableau:  $\binom{n+k}{k} E_k$ .

der Zahlen. Bezüglich der ‚großen Schröder-Zahlen‘, wie die  $S_n^*$  auch genannt werden, vergleiche man P. Flajolet und R. Sedgewick [30, VII.4.18].

#### A.6 DAS SCHRÖDER-TABLEAU.

Eine naheliegende formale Verallgemeinerung der Schröder-Zahlen ist

$$\begin{aligned}
 S_n^* &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k} E_k ; & 1, 3, 10, 75, 266, \dots \\
 S_n^e &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k} E_k [k \text{ even}] ; & 1, 1, 7, 11, 156, \dots \\
 S_n^o &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k} E_k [k \text{ odd}] ; & 0, 2, 3, 64, 110, \dots
 \end{aligned}$$

Das *Schröder-Tableau*  $\binom{n+k}{k} E_k$  (vgl. Tabelle 37) enthält das obige Summendreieck der Schröder-Zahlen, wobei die Diagonalen des Summendreiecks in Spalten des Tableau übergehen.

#### A.7 DAS SCHWINGENDE TABLEAU.

Analog zur formalen Struktur der Schröder-Zahlen können wir ähnliche Zahlenfolgen betrachten, in denen die Catalan-Zahlen durch die schwingende Fakultät ersetzt ist.

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} (2k)! ; & 1, 3, 13, 63, 321, 1683, \dots \\
 \tau_n &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{k} k! ; & 1, 3, 16, 145, 666, 8701, \dots
 \end{aligned}$$

Das Analogon zum Schröder-Tableau ist das *schwingende Tableau*  $\binom{n+k}{k} k!$  (vgl. Tabelle 38).

1	1	2	6	6	30	20	140	70
1	2	6	24	30	180	140	1120	630
1	3	12	60	90	630	560	5040	3150
1	4	20	120	210	1680	1680	16800	11550
1	5	30	210	420	3780	4200	46200	34650
1	6	42	336	756	7560	9240	110880	90090
1	7	56	504	1260	13860	18480	240240	210210
1	8	72	720	1980	23760	34320	480480	450450

Tabelle 38 – Das schwingende Tableau  $\binom{n+k}{k} k!$ .

Liest man das schwingende Tableau als Dreieck, das heißt die Antidiagonalen beginnend am linken Rand des Tableaus, so erhält man ein Zahlendreieck, dessen exponentiell erzeugende Funktion gegeben ist durch

$$\text{egf}(t, x) = \exp(t) I_0(2tx)(1 + tx).$$

Äquivalent dazu ist die Darstellung durch Polynome

$$S_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} k! x^k.$$

Substituiert man in diesen Polynomen  $x^k$  durch  $1/\binom{k}{2} + 1$  so erhält man die verallgemeinerten Motzkin Zahlen.

$$1 = 1; 1 + 1 = 2; 1 + 2 + 1 = 4; 1 + 3 + 3 + 3 = 10; 1 + 4 + 6 + 12 + 2 = 25; \dots$$

Wir sehen hier genau die Darstellung aus Tabelle 36 auftauchen.

#### A.8 STIRLING-DARSTELLUNG DER CATALAN-ZAHLEN.

Die eratosthenische Fakultät lässt sich für  $n \geq 0$  nach (1.52) mit den vorzeichenlosen stirlingschen Zyklenzahlen  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  darstellen als

$$n' = \sum_{k=0}^b \left[ \begin{smallmatrix} b \\ k \end{smallmatrix} \right] a^k, \text{ wobei } a = \lceil n/2 + 1/2 \rceil, b = \lfloor n/2 + 1/2 \rfloor.$$

Aus (11.1) wird damit

$$E_n = \left( \sum_{k=0}^b \begin{bmatrix} b \\ k \end{bmatrix} a^k \right) / \left( \sum_{k=0}^a \begin{bmatrix} a \\ k \end{bmatrix} \right) \quad (n \geq 0). \quad (\text{A.9})$$

Beispielsweise ist für  $n = 7$

$$E_7 = \frac{0 \cdot 4^0 + 6 \cdot 4^1 + 11 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^4}{0 + 6 + 11 + 6 + 1} = \frac{840}{24}.$$

Wir laden den Leser noch zu den Übungsaufgaben (B.2) ein, wo sich folgende Darstellung findet, mit gewissen Zahlen  $\eta(n, j)$ .

$$E_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{k \leq j \leq n} \frac{(-1)^{k+j}}{j!} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \eta(n, j).$$

#### A.9 DIE ORBITALE FAKULTÄT ALS SUMME.

Mit der Abkürzung

$$\delta_n = \left( \frac{1}{n+1} \right)^{[n \text{ even}]} \left( \frac{n+1}{2} \right)^{[n \text{ odd}]}$$

definieren wir die *Omegazahlen*  $\omega(n, k)$  für  $n \geq 0$  und  $k \geq 1$  mit den Bessel-Funktionen  $I_0$  und  $I_1$ , deren  $n$ -te Ableitung wir im Punkt 0 betrachten,

$$\omega(n, k) = \delta_n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx} (I_0(2kx) + (2kx + 1)I_1(2kx)). \quad (\text{A.10})$$

Wir ergänzen die Definition um den Rand  $\omega(n, 0) = [n = 0]$ .

Damit lässt sich die orbitale Fakultät schreiben als alternierende binomische Summe

$$n^\circ = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \omega(n, k). \quad (\text{A.11})$$

Diese Darstellung ist das Gegenstück zu der bekannten Darstellung der Fakultät als alternierende binomische Summe

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n.$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	8	18	32	50	72
3	0	6	48	162	384	750	1296
4	0	6	96	486	1536	3750	7776
5	0	30	960	7290	30720	93750	233280
6	0	20	1280	14580	81920	312500	933120

Tabelle 39 – Die Omega Zahlen  $\omega(n, k)$ 

Hervorzuheben ist die Diagonale des  $\omega$ -Zahlenfeldes,

$$\omega(n, n) = 1, 1, 8, 162, 1536, 93750, 933120, \dots$$

und die Folge

$$\omega(n, n) - n^{\circlearrowleft} = 0, 0, 4, 126, 1392, 90150, 918720, \dots$$

## ÜBUNGSAUFGABEN.

---

Einige der folgenden Probleme stehen im Zusammenhang mit bekannten Vermutungen und können selber als Vermutungen angesehen werden.

### B.1 DIE PRIMFAKULTÄTS-UNGLEICHUNG.

Sei  $u_0 = 1, u_1 = 1, u_2 = 1/2$  und für  $n > 2$  ist  $u_n$  definiert durch:

Falls  $n$  odd dann falls  $n$  prim dann  $u_n = \frac{1}{n}$  sonst  $u_n = n$ ;

Falls  $n$  even dann falls  $\frac{n}{2}$  prim dann  $u_n = n$  sonst  $u_n = \frac{4}{n}$ .

Man studiere die Folge der partiellen Produkte von  $u_n$ , gegeben durch

$$U_n = U_{n-1} u_n \quad (n > 0) \text{ und } U_0 = 1.$$

Man beweise oder widerlege

$$\text{Zähler } U_n < \text{Nenner } U_n \quad (n \geq 40).$$

Allgemeiner gebe man ein minimales  $\alpha$  an, so dass gilt

$$\text{Compositorial}(\lfloor n/2 \rfloor, n) < \text{Factorial}(1, \lfloor n/2 \rfloor) \text{Primorial}(\lfloor n/2 \rfloor, n)^\alpha.$$

### B.2 INKLUSION DER LOUISA-ZAHLEN.

Man zeige die folgende Inklusion der Louisa-Zahlen  $\mathcal{L}(n)$  ohne Verwendung des Primzahlsatzes.

$$\lfloor n/3 \rfloor! \leq \mathcal{L}(n) \leq \lfloor n/2 \rfloor! \quad (n \geq 285).$$

**B.3 DIE ANZAHL DER PRIMFAKTOREN VON  $n!$  UND  $\text{lcm } n$ .**

Sei  $\Omega(n!)$  die Anzahl *aller* Primfaktoren der schwingenden Fakultät  $n!$  und  $\lg n$  der Logarithmus zur Basis 2. Man zeige oder widerlege

$$\left\lfloor \frac{n}{\lg(n/2)} + n^{1/6} \right\rfloor \leq \Omega(n!) \leq \left\lfloor \frac{n}{\lg(n/2)} + n^{1/2} \right\rfloor \quad (n \geq 25).$$

**B.4 EIN SCHWINGENDER PRIMZAHLTTEST.**

Man gebe alle Ausnahmen kleiner  $10^{15}$  an von folgender Aussage

$$n > 1 \text{ ist prim} \iff n \text{ teilt } (n-1)! - (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Nach R. Crandall, K. Dilcher und C. Pomerance [17] sind die einzigen Wieferich-Primzahlen kleiner  $4 \times 10^{12}$   $p = 1093$  und  $p = 3511$ . Nach P. Ribenboim [72, p. 237] wurden auch in späteren Suchen keine weiteren Wieferich-Primzahlen unterhalb von  $2,5 \times 10^{15}$  gefunden.

**B.5 DIE TSCHEBYSCHEW-FUNKTION  $\psi$ .**

Man gebe für die Tschebyschew-Funktion  $\psi$  eine Schranke  $C$  an, für welche die Aussage

$$|\psi(n) - n| \leq n^{1/2} + \ln(n+1)/2 + \ln(\pi/2)/2 \quad (2 \leq n \leq C)$$

gültig ist, aber falsch für  $n > C$ .

**B.6 EINE INKLUSION VON  $2^n$ .**

Man zeige oder widerlege, dass für alle  $n > 26$  ein  $k > 0$  existiert, so dass

$$3^k \lfloor 2^n/3^k \rfloor < 2^n < 3^k \left( \lfloor 2^n/3^k \rfloor + 1 \right).$$

**B.7 KONVOLUTORISCHE DREIECKE.**

Sei eine Folge  $\alpha(n)$ ,  $n \geq 0$  gegeben, dann nennen wir  $\alpha$  einen *multiplikativen Erzeuger* der Folge  $f$ , wenn  $f$  rekursiv definiert ist durch  $f(0) = \alpha(0)$

und für  $n > 0$  als  $f(n) = f(n-1)\alpha(n)$ . Diese Definition lässt sich auf den Fall einer zwei-parametrischen Folge  $F(n, k)$  ausdehnen, wenn man verlangt  $F(0, k) = \alpha(0)$  für alle  $k$ ,  $F(n, 0) = 0$  für  $n > 0$ ,  $F(n, 1) = F(n-1, 1)\alpha(n)$  und für  $n > 0$ ,  $k > 1$  setzt

$$F(n, k) = \sum_{j=1}^{n-k+1} F(j, 1)F(n-j, k-1).$$

Wegen dieser Rekursion nennen wir  $F(n, k)$  das *konvolutorische Dreieck* von  $f$ , erzeugt durch  $\alpha$ .

Wir setzen in den nächsten 4 Beispiele voraus, dass für den multiplikativen Erzeuger  $\alpha(0) = 1$  gesetzt ist. Wählt man dann für  $n > 0$  als multiplikativen Erzeuger die Folge

- $\sigma(n) = n^{[n \text{ odd}]}(4/n)^{[n \text{ even}]}$ ,

so erzeugt  $\sigma$  die Folge  $n!$  und das zugeordnete konvolutorische Dreieck bezeichnen wir als das *schwingende Dreieck*  $(n, k)!$ .

Das *faktorielle Dreieck*  $(n, k)!$  ist analog definiert mit der erzeugenden Folge der Fakultät

- $\gamma(n) = n$

Das *eratosthenische Dreieck*  $\varepsilon(n, k)$  wird erzeugt durch

- $\varepsilon(n) = n^{[n \text{ odd}]}2^{[n \text{ even}]}$ .

Wählen wir dagegen als erzeugende Folge

- $\eta(n) = n^{[n \text{ odd}]}(4/(n+2))^{[n \text{ even}]}$ ,

so erhalten wir das *catalanische Dreieck*  $\eta(n, k)$ .

Wir bezeichnen mit  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  die vorzeichenlosen Stirling-Zyklen-Zahlen.

**A.** Man zeige die Summendarstellung des Quadrates der eratosthenischen Fakultät

$$n!^2 = \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq j \leq n-k} \frac{(-1)^{n-j+k}}{n^j} \left[ \begin{smallmatrix} n-j \\ k \end{smallmatrix} \right] (n, n-j)! \quad (\text{B.1})$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	2	1				
3	0	6	4	1			
4	0	6	16	6	1		
5	0	30	36	30	8	1	
6	0	20	120	98	48	10	1

Tabelle 40 – Das schwingende Dreieck  $(n, k)$

und für die verallgemeinerten Catalan-Zahlen

$$E_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \sum_{k \leq j \leq n} \frac{(-1)^{k+j}}{j!} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix} \eta(n, j) . \tag{B.2}$$

**B.** Man gebe ähnliche Summendarstellungen für die schwingende und die monotone Fakultät an.

**C.** Man formuliere und beweise einen Satz, der diese Beispiele unter einen Hut bringt.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	2	1				
3	0	6	4	1			
4	0	24	16	6	1		
5	0	120	72	30	8	1	
6	0	720	372	152	48	10	1

Tabelle 41 – Das faktorielle Dreieck  $(n, k)!$

**D.** Betrachte die  $k$ -ten Diagonalen im schwingenden Dreieck

$$d_n^{(k)} = \langle (n, n - k) \rangle : n, k \geq 0, k \text{ fest} ;$$

$$d_n^{(0)} = 1, 1, 1, \dots ; d_n^{(1)} = 2, 4, 6, \dots ; d_n^{(2)} = 6, 16, 30, \dots$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	2	1				
3	0	6	4	1			
4	0	12	16	6	1		
5	0	60	48	30	8	1	
6	0	120	204	116	48	10	1

Tabelle 42 – Das erastostenische Dreieck  $\epsilon(n, k)$

Zeige: Die  $k$ -te Differenzenfolge der  $k$ -ten Diagonalen  $d_n^{(k)}$  in der Matrix der schwingenden Koeffizienten hat den konstanten Wert  $2^k$ .

**B.8 SCHWINGENDE DARSTELLUNGEN VON FUNKTIONEN.**

Die schwingende Darstellung einer reellen oder komplexen Funktion ist gegeben durch eine Folge  $a_n$ , dergestalt dass gilt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Man zeige: Der einfachste Fall,  $a_n = 1$ , führt auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{4}{y^2} (y + \sqrt{y}(x + y) \arcsin(\frac{x}{2})), \text{ wobei } y = 4 - x^2. \quad (\text{B.3})$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	3	2	1				
4	0	2	7	3	1			
5	0	10	10	12	4	1		
6	0	5	33	25	18	5	1	

Tabelle 43 – Das catalanische Dreieck  $\eta(n, k)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} F\left(\frac{1,2}{3/2} \middle| \frac{x^2}{4}\right) + \frac{x^3}{6} F\left(\frac{1,2}{5/2} \middle| \frac{x^2}{4}\right) \quad (\text{B.4})$$

Zusatz: Man bestimme

$$C_0 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}, \quad C_1 = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Wähle für  $a_n$  den Erzeuger des erasthenischen Dreiecks und zeige:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{[n \text{ even}]} n^{[n \text{ odd}]} \frac{x^n}{n!} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{1+x/2}{1-x/2}} - \frac{x}{2} \quad (|x| < 2). \quad (\text{B.5})$$

*Beweis:* Zum einen ist (vgl. dazu [8, p.384])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n \binom{2n}{n}} = \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{1-(x/2)^2}} \times \frac{x}{2},$$

und analog findet man das ungerade Gegenstück

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2(n+1) \binom{2n+1}{n+1}} = \frac{\arcsin(x/2)}{\sqrt{1-(x/2)^2}} - \frac{x}{2}.$$

Stellt man diese beiden Gleichungen mit der schwingenden Fakultät dar,  $2n \binom{2n}{n} = 2n(2n)!$  sowie  $2(n+1) \binom{2n+1}{n+1} = 2(2n+1)!$ , und addiert die Gleichungen, so folgt die Behauptung.

### B.9 INKLUSION DER SCHWINGENDEN HARMONISCHEN.

Man zeige für  $z \geq 0$

$$\frac{1}{2} \Psi\left(\frac{z}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} \Psi\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right) \leq \log\left(\frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{z + \log 2}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

und leite daraus eine Inklusion von  $\tilde{H}(z)$  her. (Vergleiche Abbildung 2.)

				1					
				1					
			1	0	1				
			2	2	2				
		1	0	4	0	1			
		3	6	12	6	3			
	1	0	9	0	9	0	1		
	4	12	36	36	36	12	4		
1	0	16	0	36	0	16	0	1	
5	20	80	120	180	120	80	20	5	

Tabelle 44 – Die schwingende Fakultät nach Formel 8.14.

**B.10 EINE SUMMENDARSTELLUNG DER SCHWINGENDEN FAKULTÄT.**

Man gebe eine kombinatorische Interpretation der Einträge der Tabelle 44 an, deren Zeilen sich zur schwingenden Fakultät summieren.

**B.11 ASYMPTOTIK DER SCHWINGENDEN HARMONISCHEN.**

$$\tilde{H}(z) = \ln 2 - \frac{1}{4} \cos(\pi z) \left( \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{z^6} + \frac{17}{4z^8} \right) + O\left(\frac{1}{z^{10}}\right)$$

**B.12 ASYMPTOTIK DER LOGARITHMISCHEN ABLEITUNG VON  $z!$ .**

$$\Xi(z) = \tilde{H}(z) + \frac{\pi}{4} \sin(\pi z) \left( 2 \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{5z^5} - \frac{17}{28z^7} \right) + O\left(\frac{1}{z^9}\right)$$

**B.13 VERSCHIEDENE PRIMFAKTOREN VON  $n!$ .**

Zeige:  $n!$  hat mindestens  $\frac{n}{2} \frac{\log 2}{\log n}$  verschiedene Primfaktoren,

$$\omega(n!) \geq \frac{n}{2} \frac{\log 2}{\log n}.$$

Beweis: Nach Satz 1 ist  $p^{\ell_p(n)} \leq n$ , und daher

$$n^{\omega(n)} \geq n \geq 2^{n/2} = n^{\frac{n}{2} \frac{\log 2}{\log n}} \quad \diamond$$

Daraus folgt, dass  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \pi(x)/(x/\log x) \geq (\log 2)/2$ .

#### B.14 ERZEUGENDE FUNKTION DER ERATOSTHENISCHEN FAKULTÄT.

Man zeige, dass die exponentiell erzeugende Funktion der erastosthenischen Fakultät gegeben ist durch

$$n' = n! [z^n] (1 + z) \exp(z^2).$$

#### B.15 DREI KOMBINATORISCHE FOLGEN.

$$C_n = \text{lcm}\{1, 2, \dots, n\} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

Man zeige, dass  $C_n$  für alle  $n \geq 0$  eine ganze Zahl ist. Die Folge beginnt

$$C_n = 1, 2, 5, 16, 34, 172, 175, 1228, 2468, 7408, \dots$$

Man bestimme eine kombinatorische Bedeutung von  $C_n$  sowie der beiden folgenden Folgen:

$$A_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \tag{B.6}$$

$$A_n = 1, 2, 5, 16, 68, 344, 2100, 14736, 118464, \dots \tag{B.7}$$

$$B_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \tag{B.8}$$

$$B_n = 1, 0, 1, 2, 12, 56, 372, 2568, 21120, 189504, \dots \tag{B.9}$$

**B.16 SPEZIELLE WERTE DER SCHWINGENDEN Q-POLYNOME.**

Der ungerade Anteil von  $n\lambda_q$  ist definiert als

$$U(n\lambda_q) = 2^{-\ell_2(n\lambda_q)} n\lambda_q.$$

Hierbei bezeichne  $\ell_2(n\lambda_q)$  die höchste Potenz der 2, welche  $n\lambda_q$  teilt.  
Zeige:

$$U(n\lambda_{1/2}) = 2^{-\varepsilon(n)} n\lambda_{1/2}, \quad \text{wobei } \varepsilon(n) = \lfloor (n+1)/2 \rfloor^2 - [n \text{ odd}].$$

Man gebe eine kombinatorische Interpretation von  $U(n\lambda_{1/2})$  an.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$U(n\lambda_{1/2})$	1	1	3	21	35	1085	1395	177165	200787

Tabelle 45 – Der ungerade Anteil von  $n\lambda_{1/2}$

**B.17 EIN PRIMZAHLENKRITERIUM MIT CATALAN-ZAHLEN.**

Gilt folgendes Primzahlenkriterium, das die monotone Fakultät, die verallgemeinerten Catalan-Zahlen und die schwingende Fakultät zusammenbringt?

$$\lfloor n/2 \rfloor + 1 \text{ ist genau dann eine Primzahl, wenn gilt} \\ (n-1)! \bmod \sum_{k \geq 0} E_{n,k} = (n-1)!.$$

**B.18 INTERPRETATION EINER BINOMISCHEN FORMEL.**

Man gebe eine kombinatorische Interpretation der Folge  $u_0, u_1, \dots$  an, für die gilt

$$n\lambda = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k.$$

## B.19 SPEZIELLE FOLGEN VERALLGEMEINERTER LOUISA ZAHLEN

- Man betrachte die Zahlen

$$L_n = \mathcal{L}_n^{(1)}(n) \text{ und } L_n^* = \mathcal{L}_1^{(0)}(n) / \mathcal{L}_n^{(1)}(n) ,$$

oder anders ausgedrückt, die Zerlegung  $\text{lcm } n = L_n L_n^*$ .

Die Folgen beginnen so ( $n \geq 0$ ):

$$L_n = 1, 1, 2, 6, 6, 30, 10, 70, 70, 210, 42, 462, 462, 6006, \dots$$

$$L_n^* = 1, 1, 1, 1, 2, 2, 6, 6, 12, 12, 60, 60, 60, 60, 420, 420, \dots$$

- Zeige: Die Folgen  $\mathcal{L}_m^{(r)}(n)$  mit festem  $r$  und festem  $n$  werden stationär und der stationäre Wert wird spätestens für  $m = \lceil n/2 \rceil$  erreicht.
- Zeige, dass  $L_n$  quadratfrei ist.
- Untersuche die Frage, für welche  $n$  gilt  $L_n^* > L_n$ .
- Zeige mit der Definition 6.23 folgende Identität

$$\frac{\mathcal{L}_3^{(0)}(n)}{\mathcal{L}_3^{(2)}(n)} = \mathcal{L}_3^*(n) .$$

## B.20 LOUISA-ZAHLEN UND TEILERFUNKTIONEN

Man zeige mit der Konstanten  $C = (1 - \log(2)) / \log 2$

$$\log \mathcal{L}(n) \sim C \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (-1)^{k+1} . \quad (\text{B.10})$$

Wenn  $d_{m,k}(n)$  die Anzahl der Teiler von  $n$  bezeichnet, die kongruent zu  $k \pmod{m}$  sind, dann gilt [6, exercise 2.27].

$$\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor (-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^n (d_{2,1}(k) - d_{2,0}(k)) .$$

**B.21 FOR HACKERS ONLY.**

Verifiziere (vgl. dazu [20]):

$$\log \mathcal{L}(10^{16}) = 3068528182332698,723062015566\dots$$

Man bemerke, dass der asymptotische Wert

$$10^{16}(1 - \ln 2) = 3068528194400565, \dots$$

fast 8,5 gültige Dezimalstellen liefert.

**B.22 GIVE PEACE A CHANCE!**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)!} \text{ce!}$$

**B.23 SCHRANKEN FÜR  $2^n \lambda$ .**

Zeige: Sei  $p$  eine Primzahl. Dann gilt:

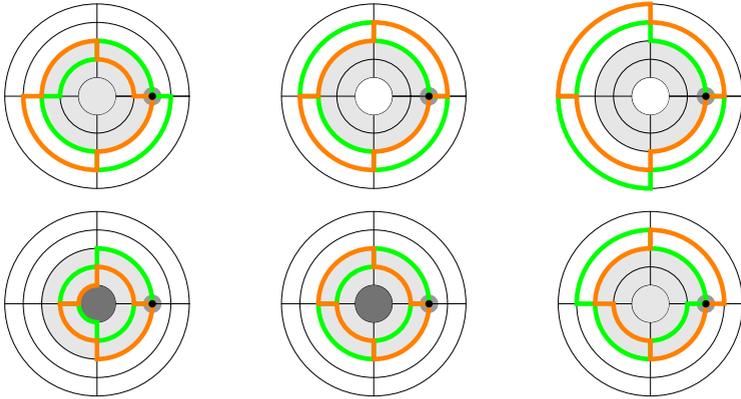
$$p \mid (2^n) \lambda \implies p \leq 2^n \quad (n \geq 1)$$

Daraus folgt:

$$\prod_{2^{n-1} < p \leq 2^n} p \leq (2^n) \lambda \leq 4^n$$

**B.24 ORBITALKETTEN**

Welche Eigenschaften von Orbitalen lassen sich aus der folgenden graphischen Darstellung herauslesen?



**B.25 TEILBARKEITSRELATIONEN.**

Man überzeuge sich von der Gültigkeit der folgenden Teilbarkeitsrelationen.

$n_j$	$ $	$n!$	$;$	$n'$	$ $	$n!$	$;$
$n_l$	$ $	$n!$	$;$	$n_l$	$ $	$n'$	$;$
$\mathcal{L}(n)$	$ $	$n!$	$;$	$n_l$	$ $	$\text{lcm } n$	$;$
$n_j n_l$	$ $	$n!$	$;$	$\mathcal{L}(n)$	$ $	$\text{lcm } n$	$;$
$\text{lcm } n$	$ $	$n!$	$;$	$E_n$	$ $	$\text{lcm } n$	$;$
$\text{lcm } n$	$ $	$n_j n_l$	$;$	$n_j$	$\nmid$	$\text{lcm } n$	$;$
$\text{lcm } n$	$ $	$n'$	$;$	$n!$	$\nmid$	$\text{lcm } n$	$.$

$$P_n = \prod_{1 < k \leq \lfloor n/2 \rfloor} k \prod_{\substack{\lfloor n/2 \rfloor < p \leq n \\ p \text{ prim}}} p. \quad \text{Gilt } P_n \text{ teilt } n' ?$$

**B.26 PELL-ZAHLEN ALS SUMME VON FIBONACCI-ZAHLEN.**

Man zeige, dass für die Spaltensummen der verallgemeinerten Fibonacci-Zahlen gilt:

$$\sum_{r \geq 1} F_n^{(r)} = [n \text{ odd}] \quad (n < 0),$$

$$\sum_{r \geq 1} F_{n+1}^{(r)} = \sum \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} \quad (n \geq 0).$$

Hier läuft die Summe auf der rechten Seite über alle nichtnegativen ganzen Zahlen  $i, j, k$ , für die gilt  $i + j + 2k = n + 1$ .

### B.27 REKURSION FÜR EIN SCHWINGENDES PRODUKT.

$$\tau(x) = \prod_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor$$

Man zeige:  $\tau(n)$  besitzt eine einfache Rekursion  $\tau(n) = \omega_n \tau(n-1)$  mit dem Rekursionsanfang  $\tau(1) = 1$ . Ist  $n$  ungerade, so ist  $\omega_n = 1$ , sonst sucht man das kleinste  $k = 1, 2, \dots$ , für das  $n \bmod 2^{k+1} = 2^k$  gilt. Dann ist  $\omega_n = 2^{(k+1)k/2 - 2} n^{2-k}$ .

### B.28 EINE NÄHERUNG AN GAMMAQUOTIENTEN.

Man zeige, dass folgender Quotient zweier Gammawerte die drei angegebenen Näherungen besitzt und bestimme die allgemeine Formel.

$$\frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{z}} \frac{\sqrt{2}(12z-1)}{\sqrt{z}(12z+2)} \frac{\sqrt{2}(288z^2-24z+1)}{\sqrt{z}(288z^2+48z+4)}, \dots$$

### B.29 EINE NÄHERUNG AN DEN ZENTRALEN BINOMIALKOEFFIZIENTEN.

Man zeige folgende asymptotische Entwicklung von  $\binom{2n}{n}$ .

$$\binom{2n}{n} = 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left( \left( \frac{1200n^4 + 50n^2 - 3}{1200n^4 + 350n^2 - 3} \right)^n + O(n^{-5}) \right)$$

**B.30 EINE BINOMISCHE SUMME.**

Das Nebenzentrum der binomischen Pyramide  $\binom{n}{1}_2$  lässt sich darstellen, für  $n > 0$  und mit  $\varepsilon = [n \text{ even}]$ , als

$$\binom{n}{1}_2 = \frac{n^{1+\varepsilon}}{n+1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-k-\varepsilon} \binom{2k}{k} \binom{-n+k}{k} (k+1)^{-\varepsilon}$$

**B.31 BINOMISCHE TRANSFORMATION.**

Suche nach einer geschlossenen Formel für die binomisch transformierte Folge der schwingenden Fakultät (8.27) und diskutiere in diesem Zusammenhang den Algorithmus von Petkovšek [79].

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = [z^n] \frac{1-z-4z^2}{((1+z)(1-3z))^{3/2}}$$

**B.32 MAXIMUM DER ZEILEN DER q-PYRAMIDE.**

Man gebe eine explizite Formel für das Maximum der Zeilen der q-Pyramide an,  $M_{q,n} = \max([q^n] n!_q)$ .

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M_{q,n}$	1	1	2	2	6	3	17	8	56	20	185	58

Tabelle 46 – Zeilenmaximum der q-Pyramide

**B.33 MULTISWING(N,K).**

Die schwingenden Fakultät 9.1 lässt sich in natürlicher Weise verallgemeinern zu dem Multinomialkoeffizienten

$$(n, k)_! = \binom{n}{[n/k], \dots, [n/k], n \bmod k}.$$

In der Formel ist  $[n/k]$   $k$ -mal zu nehmen. Es ist naheliegend diesen Multinomialkoeffizienten *Multiswing*( $n, k$ ) zu nennen. Man gebe eine kombinatorische Interpretation von *Multiswing*( $n, k$ ) an.

Das resultierende Tableau beginnt wie folgt.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 2, 6, 6, 30, 20, 140, 70, 630  
 1, 1, 1, 6, 24, 60, 90, 630, 2520, 1680  
 1, 1, 1, 1, 24, 120, 360, 840, 2520, 22680  
 1, 1, 1, 1, 1, 120, 720, 2520, 6720, 15120  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 720, 5040, 20160, 60480  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5040, 40320, 181440  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 40320, 362880  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 362880  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1  
 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

**B.34 GOLDEN SERIES**

Zeige: Sei  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$  der goldene Schnitt und die Folge  $a_n = (-[n \text{ even}])^{[n/2]} n^{-3}$  gegeben. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} = \int_0^{\log \alpha} x \log(2 \sinh x) dx.$$

Weiter sei  $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$  und die Folge  $b_n = [n \text{ even}] (\alpha^n + \beta^n) n^{-2}$  gegeben. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} = \frac{\pi^2}{20}.$$

Man vergleiche dazu Formel (1.57) und [10], [78].

**B.35 SWINGING SERIES.**

Man implementiere die Berechnung von  $\zeta(3)$ ,  $\pi$  und der catalanschen Konstanten mit schwingenden Reihen.

**B.36 DARSTELLUNG VON  $n!$ .**

Man zeige die Darstellung der schwingenden Fakultät

$$n! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{N}\right)^{[n \text{ even}]} \frac{\Gamma(N/2 + 1)}{\Gamma(N/2 + 1/2)} \quad (N = n + [n \text{ even}]).$$

**B.37 EINE INKLUSION DER CATALAN-ZAHLEN.**

Definiere

$$I(n, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^k x^n \sqrt{\frac{k-x}{x}} dx,$$

$$J(n, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^k x^n \sqrt{\frac{x}{k-x}} dx.$$

Bezeichne  $\mathfrak{N} a$  den Zähler von  $a$  (*numerator of*). Betrachte die Folgen

$$g(n) = [n \text{ even}] \mathfrak{N} I(\lfloor n/2 \rfloor, 1) + [n \text{ odd}] \mathfrak{N} J(\lfloor n/2 \rfloor, 1),$$

$$h(n, k) = [n \text{ even}] \frac{\mathfrak{N} I(\lfloor n/2 \rfloor, k)}{\mathfrak{N} I(\lfloor n/2 \rfloor, 1)} + [n \text{ odd}] \frac{\mathfrak{N} J(\lfloor n/2 \rfloor, k)}{\mathfrak{N} J(\lfloor n/2 \rfloor, 1)}.$$

Die ersten Werte sind ( $n \geq 0$ ):

$$g(n) = 1, 1, 1, 3, 1, 5, 5, 35, 7, 63, 21, 231, 33, 429, 429, 6435, 715, \dots$$

$$h(n, 4) = 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, \dots$$

Beweise:  $h(n, 4)$  besteht nur aus Potenzen der 2. Man gebe eine Interpretation an für  $h(n, 4)$  und  $4^{n+1}([ \text{even} ] I(\lfloor n/2 \rfloor, 1) + [ \text{odd} ] J(\lfloor n/2 \rfloor, 1))$

Zeige: Die verallgemeinerten Catalan-Zahlen schreiben sich

$$E_n = g(n)h(n, 4).$$

Bestimme  $\varepsilon(n)$  so, dass die Inklusion gilt

$$g(n) \leq E_n \leq 2^{\varepsilon(n)} g(n).$$

Zeige: Wenn  $n = 2^m - 2$  oder  $n = 2^m - 1$  ist, dann kann man  $\varepsilon(n) = 0$  wählen. Beweise oder widerlege: Für  $n > 1$  gilt: wenn  $2^k \leq n < 2^{k+1}$  dann kann man  $\varepsilon(n) = k - 1$  wählen.

### B.38 BERECHNUNG DES MITTLEREN BINOMIALKOEFFIZIENTEN.

Man betrachte das Zahlenfeld  $P_{n,k}$  in Tabelle 47. Es lässt sich rekursiv so beschreiben:  $P_{0,k} = [k = 0]$ . Angenommen,  $n > 0$  und alle Zeilen  $< n$  sind bereits berechnet:

- Ist  $n$  ungerade, so übernehme man die Zeile  $n - 1$  und hänge  $P_{n, \lceil n/2 \rceil} = \sum_k P_{n-1, k}$  an.
- Ist  $n$  gerade, dann setze man  $P_{n,k} = P_{n,k-1} + P_{n-1,k}$  (wobei  $P_{n,-1} = 0$  vereinbart ist).

Auf diese Weise erhält man

$$P_{n, \lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{[n \text{ odd}]}_2 = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad (n \geq 0)$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2			
3	1	2	3		
4	1	3	6		
5	1	3	6	10	
6	1	4	10	20	
7	1	4	10	20	35

Tabelle 47 – Berechnung des mittleren Binomialkoeffizienten

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$	1	1	2	3	6	10	20	35	70	126	252

Tabelle 48 – Die mittleren Koeffizienten der Pascal-Pyramide.

$$\binom{\pi/\sqrt{2}}{\gamma}_2 = 2,71\dots \quad \text{Es hätte ja sein können ;-)).}$$

**B.39 ZUR KOMBINATORIK DER FINE-ZAHLEN.**

Zeige die kombinatorische Interpretation der Fine-Zahlen,  $F_n = \text{card}(\mathcal{F}_n)$ , wobei

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \begin{array}{l} r_0 r_1 r_2 \cdots r_n \\ r_i \in \mathbb{Z} \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \leq r_{i+1} \leq r_i + 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n-1 \\ r_1 = 0, r_n = 0 \\ 00 \text{ keine Teilfolge von } r_0 r_2 \cdots r_n \end{array} \right. \right\}$$

Beispiel:  $\{0000, 0010, 0100, 0110, 0120\} \supseteq \{0110, 0120\} = \mathcal{F}_3$ .  
 (Vergleiche dazu [29], [73].)

**B.40 DIE SCHWINGENDEN BERNOULLI-ZAHLEN.**

Man betrachte die durch folgenden Ausdruck gegebenen Zahlenfolgen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tilde{B}(n)$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{71}{120}$	$-\frac{109}{48}$	$\frac{3467}{3024}$	$-\frac{5225}{864}$	$\frac{118237}{51840}$

Tabelle 49 – Schwingende Bernoulli-Zahlen

$\frac{(-1)^n}{\alpha(n)}$	$\alpha(2)$	$\alpha(1)$	0	0	0	...	0
	$\alpha(3)$	$\alpha(2)$	$\alpha(1)$	0	0	...	0
	$\alpha(4)$	$\alpha(3)$	$\alpha(2)$	$\alpha(1)$	0	...	0
	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
	$\alpha(n-2)$	$\ddots$	$\ddots$	$\alpha(3)$	$\alpha(2)$	$\alpha(1)$	0
	$\alpha(n-1)$	$\alpha(n-2)$	$\ddots$	$\ddots$	$\alpha(3)$	$\alpha(2)$	$\alpha(1)$
	$\alpha(n)$	$\alpha(n-1)$	$\alpha(n-2)$	$\ddots$	$\ddots$	$\alpha(3)$	$\alpha(2)$

Ist hier  $\alpha(n) = 1/n!$ , so wird die Folge der Bernoulli-Zahlen  $B(n)$  erzeugt. Ist dagegen  $\alpha(n) = 1/n!$ , so werden die *schwingenden Bernoulli-Zahlen*  $\tilde{B}(n)$  generiert.

Man studiere diese Folge und setze  $\tilde{B}(n)$  analytisch fort, zum Beispiel mit der Methode von S. C. Woon [90].

Sind die Vorzeichen von  $B(n)$  und  $\tilde{B}(n)$  sinnvoll gewählt? Es ist klar, dass auf diese Frage obige Definition *per se* keine Antwort geben kann, genauso wenig wie ein Blick in das *Handbook of Mathematical Functions*, sondern allein eine Reflexion über die systematische Bedeutung dieser Zahlen, die sich hier aus der Relation zu der riemannschen Zetafunktion ergibt. (Vgl. dazu auch [56].)

**B.41 KOEFFIZIENTEN DER Q-POLYNOME.**

Man gebe eine Rekursion der Koeffizienten der q-Polynome an.

# C

## EIN WERKSTATTGESPRÄCH MIT DEM AUTOR

---

**Q:** Der englische Titel deiner Arbeit lautet: „*Swing, divide and conquer the factorial and the lcm*{1, 2, ..., n}“. Was bedeutet dabei eigentlich der Begriff *swing*?

**A:** Verschiedenes. Jedenfalls: nicht langweilig monoton! (*lacht*).

Vielleicht: das gegeneinander Abwägen zweier Größen innerhalb einer gewissen Bandbreite.

**Q:** Zum Beispiel?

**A:** Die für das Studium der Primzahlenverteilung interessanten Louisa-Zahlen. Sie schreiben sich

$$\mathcal{L}(n) = \prod_{1 \leq k \leq n} k^{\langle k/n \rangle} V(k).$$

$V(k)$  ist dabei eine Primzahl oder 1. Und das Symbol  $\langle k/x \rangle$  bedeutet

$$\langle k/x \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \leq k \leq \lfloor x/2 \rfloor; \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\langle k/x \rangle$  könnte man auch als  $\text{sign}(\cos(\pi k/x))$  definieren. Und der Cosinus ist ja wohl der Prototyp einer schwingenden Funktion. Aber dies ist *zusammen zu sehen mit divide and conquer*.

Hier drückt sich das aus in der Zerlegung des Intervalls  $1..x$  in die zwei Hälften  $1.. \lfloor x/2 \rfloor$  und  $\lfloor x/2 \rfloor ..x$ . Die Produkte der ganzen Zahlen in diesen Intervallen  $\prod_{1 \leq k \leq m} k$  werden dabei miteinander verglichen, wobei man die Faktoren noch nach dem Typ ihrer Primzahlendarstellung mit  $V(k)$  gewichtet.

**Q:** Und ohne Gewichtung?

**A:** Schwingen die Zahlen um so mehr! (*lacht*). Dann erhalten wir die *schwingende Fakultät*  $n!$ , die definiert ist als

$$n! = \prod_{1 \leq k \leq n} k^{-\langle k/n \rangle}.$$

Diese Zahlen spielen eine interessante Rolle in der Kombinatorik. Man kann sie auffassen als einen Hybrid zwischen der klassischen monotonen Fakultät und der Mittelsenkrechten in einem symmetrisch angeordneten Pascalschen Dreieck.

**Q:** Das sind ganze Zahlen?

**A:** Erst einmal ja. Sie lassen sich auch so schreiben

$$n! = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(n/2 + 1/2)}{\Gamma(n/2 + 1)} \right)^{(-1)^n}.$$

In dieser Darstellung hindert uns nichts daran,  $n$  als komplexe Größe,  $z$  zu interpretieren

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \right)^{\cos z\pi},$$

wobei man  $(-1)^z$  dann durch  $\cos z\pi$  ersetzt. Damit hat man sie sozusagen schwingenden fortgesetzt.

**Q:** Wow, das sieht gut aus! Geht das auch mit den Louisa-Zahlen?

**A:** Gute Frage! Versuchen wir es einmal:

$$\mathcal{L}(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^z} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \right)^{-\cos z\pi} \prod_{1 \leq k \leq z} V(k)$$

Wir sehen das Problem: Es ist nicht klar, wie man  $\prod_{1 \leq k \leq z} V(k)$  zu einer stetigen oder gar analytischen Funktion fortsetzen kann.

Aber man kann Folgendes machen: Fordert man nicht mehr, dass die komplexe Funktion  $\mathcal{L}(z)$  die Zahlen  $\mathcal{L}(n)$  interpoliert (so wie das die Funktion  $z!$  mit den Zahlen  $n!$  macht), sondern nur approximiert, dann kann man den problematischen Faktor  $\prod_{1 \leq k \leq z} V(k)$  durch seinen asymptotischen Wert ersetzen. Zum Glück ist dies eine einfache und wohlbekannte Funktion:  $e^z$ . Wir erhalten dann

$$\tilde{\mathcal{L}}(z) = \sqrt{\pi} \left( \frac{e}{2} \right)^z \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \right)^{-\cos z\pi}.$$

**Q:** Diese Funktion  $V(n)$ , wie ist die denn genau definiert?

**A:**  $V(n)$  gibt an, ob  $n$  eine Primzahlpotenz ist. Wenn  $n$  durch genau eine Primzahl teilbar ist, dann ist  $V(n)$  diese Primzahl, andernfalls ist  $V(n) = 1$ . In der Zahlentheorie ist es üblich, mit dem Logarithmus von  $V(n)$  zu arbeiten. Dies schreibt sich dann  $\Lambda(n) = \ln V(n)$ , und ist unter dem Namen *Von-Mangoldt-Funktion* bekannt.

**Q:** *Schwingt auch die Von-Mangoldt-Funktion?*

**A:** Nicht wirklich. Nicht alles schwingt, leider. Aber eine typische schwingende Zerlegung ist

$$k[\lfloor n \text{ odd} \rfloor] + k[\lfloor n \text{ even} \rfloor] = k.$$

Und sie führt auf eine weitere interessante Darstellung der schwingenden Fakultät und den Louisa-Zahlen, welche die zahlentheoretische Dualität zwischen beiden prägnant zum Ausdruck bringt.

$$\begin{aligned} \ln n! &= \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ odd}] \\ \ln \mathcal{L}(n) &= \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) [\lfloor n/k \rfloor \text{ even}] \end{aligned}$$

**Q:** *Das ist der Teil „Divide and swing ... the lcm{1, 2, ..., n}“ im Titel deiner Arbeit.*

**A:** Genau.  $\text{lcm}\{1, 2, \dots, n\}$  bedeutet dabei das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, n$ . Dieser Teil lässt sich zusammenfassen als

$$\text{lcm}\{1, 2, \dots, n\} = \prod_{1 \leq k \leq n} V(k) = n! \mathcal{L}(n).$$

Diese Zerlegung bekommt insbesondere dadurch Bedeutung, dass der Logarithmus von  $\text{lcm}\{1, 2, \dots, n\}$  eine zentrale Funktion in der Zahlentheorie ist: die sogenannte tschebyschowsche  $\psi$ -Funktion. Mit ihr nimmt die letzte Formel die Gestalt an

$$\psi(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) = \ln n! + \ln \mathcal{L}(n).$$

Mit der  $\psi$ -Funktion kann man das berühmteste und schwierigste Problem der heutigen Mathematik formulieren, die riemannsche Hypothese. Durch diese Zerlegung wird, wenn man so will, auch die riemannsche Hypothese in zwei Teile zerlegt, in einen Teil, der sich als leicht behandelbar erweist und einen Teil, der den harten Kern des Problems ausmacht.

Und dieser harte Kern lässt sich beschreiben als die Frage: Wie verhalten sich die Louisa-Zahlen für sehr große Werte?

$$\mathcal{L}(n) = e^n / 2^n + ? \quad (n \rightarrow \infty)$$

Wenn man dies wüsste, wüsste man auch mehr darüber, wie sich die Primzahlen verteilen, wenn diese sehr weit draußen auf der Zahlengeraden liegen.

**Q:** Aber warum sollte man dem Rechnen mit  $\ln \mathcal{L}(n)$  den Vorzug geben gegenüber dem Rechnen mit  $\psi(n) = \ln \text{lcm}(n)$ ?

**A:** Weil man dann weniger rechnen muss! Aus zwei Gründen. Zum einen: Betrachten wir noch einmal obige Darstellung von  $\ln \mathcal{L}(n)$ .

$$\ln \mathcal{L}(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda(k) \llbracket \lfloor n/k \rfloor \text{ even} \rrbracket$$

Nun bemerkt man, dass für  $k > \lfloor n/2 \rfloor$  die Bedingung  $\llbracket \lfloor n/k \rfloor \text{ even} \rrbracket$  nie erfüllt ist, das heißt es gilt auch

$$\ln \mathcal{L}(n) = \sum_{1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor} \Lambda(k) \llbracket \lfloor n/k \rfloor \text{ even} \rrbracket .$$

Und zum zweiten: Der Logarithmus der schwingenden Fakultät  $\ln z!$  lässt sich (mit einer asymptotischen Formel ähnlich der stirlingschen Formel) effizient berechnen. Beides zusammen gibt ein effizientes Verfahren zur Berechnung der  $\psi$ -Funktion:  $\psi(n) = \ln n! + \ln \mathcal{L}(n)$ . Aber man kann noch einen Schritt weitergehen: Man kann all die Relationen, für die der Zahlentheoretiker die  $\psi$ -Funktion verwendet, direkt umwandeln in Relationen, welche nur auf die Louisa-Zahlen Bezug nehmen. Insgesamt ergibt sich damit eine Vereinfachung und oftmals auch eine Präzisierung.

**Q:** Zurück zur gewöhnlichen Fakultätsfunktion  $n!$ . Monoton und langweilig?

**A:** Sie ist sogar schrecklich monoton, logarithmisch monoton. Aber langweilig ist sie nicht. Das liegt zum Teil daran, dass man sie mit der schwingenden Fakultät sehr gut zerlegen kann. Dazu muss man nur bemerken, dass mit

$$n\lambda = \prod_{1 \leq k \leq n} k^{-\langle k/n \rangle}$$

die Fakultät sich schreiben lässt als

$$n! = \lfloor n/2 \rfloor!^2 n\lambda.$$

**Q:** Hat diese Zerlegung irgendeinen praktischen Wert?

**A:** Oh ja! Sie hat gleich drei rechnerisch wertvolle Eigenschaften. Zum einen ist sie eine *Rekursion über die Hälfte*, das heißt, sie lässt sich in  $\lfloor \log_2(n) \rfloor$  Schritten berechnen, und der Wert von  $\lfloor n/2 \rfloor!$  geht im Quadrat ein, was auch günstig ist, weil  $n^2$  sich schneller berechnen lässt als  $n \times n$ . Und als drittes kommt hinzu:  $n\lambda$  berechnet man am Besten über ihre Primzahlzerlegung, und diese hat bei  $n\lambda$  eine besonders einfache Gestalt. So kann man beispielsweise  $62!$  so berechnen:

$$62! = (((((1)^2 3)^2 7)^2 15)^2 31)^2 62\lambda$$

Mit anderen Worten: Diese Formel ist des Hackers Freund!

**Q:** Ist das die einzige Verbindung zwischen monotoner und schwingender Fakultät?

**A:** Nein. Wenn wir zum Beispiel das duale Verhältnis zwischen schwingender Fakultät und den Louisa-Zahlen ernst nehmen, dann sollte man in obiger Formel  $n\lambda$  gegen  $\mathcal{L}(n)$  tauschen können und eine weitere interessante Größe finden. Sie ist rekursiv definiert als  $0_j = 1$  und

$$n_j = \lfloor n/2 \rfloor_j^2 \mathcal{L}(n).$$

Ich habe  $n_j$  die *Cofakultät* genannt. Mit ihr erhalten wir unmittelbar folgende Identitäten:

$$n\lambda = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!^2} \quad \text{lcm } n = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!^2} \mathcal{L}(n), \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{L}(n) = \frac{n_j}{\lfloor n/2 \rfloor_j^2} \quad \text{lcm } n = \frac{n_j}{\lfloor n/2 \rfloor_j^2} n\lambda. \quad (\text{C.2})$$

Diese Gleichungen eröffnen ein weites Feld des Studiums.

**Q:** *Du gibst auch Anwendungen der schwingenden Fakultät in der Kombinatorik an. Was schwingt denn da?*

**A:** Sehr vieles. In der Kombinatorik werden Konfigurationen abgezählt. Im einfachsten – und wichtigsten – Fall hängen diese von einem einzigen Parameter ab, nämlich einer natürlichen Zahl  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Die Existenz und die Anzahl vieler Konfigurationen hängt nun oftmals sehr sensibel davon ab, ob  $n$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. Eine Konsequenz davon ist, dass die Anzahl der Konfigurationen nicht notwendig monoton zunimmt.

**Q:** *Kannst du mir ein Beispiel geben?*

**A:** Orbitale. Das sind geschlossene Ketten konzentrischer Kreisabschnitte mit unterschiedlichen Radien, die in  $n$  Sektoren liegen. Hier siehst du einige Beispiele: [Abbildung 13](#) und [Abbildung 12](#).

Es ist aber anschaulicher, sich die Orbitale als einen dynamischen Vorgang vorzustellen. Dann hat man eine Schar konzentrischer Kreisbahnen, und ein *Raumschiff*, das auf diesen Bahnen läuft und auf einer von ihnen seinen *Hafen* hat, von der aus es startet, und in die es nach jedem Umlauf wieder zurückkehren muss.

Die Umlaufebene ist dabei in  $n$  Sektoren geteilt, und an jeder Sektorengrenze wechselt das Raumschiff zur nächstgelegenen inneren oder äußeren Bahn. Ausnahmsweise darf es an einer Sektorengrenze auch auf seiner Bahn bleiben, aber dies höchstens einmal.

Die Frage ist nun: Auf wie viele verschiedene Weisen kann unter diesen Bedingungen Captain Kirk seine Patrouillenfahrten durchführen?

**Q:** *Ok. Es geht also um die Anzahl dieser Orbitale. Und diese Anzahl schwingt?*

**A:** Ja. Betrachte dazu diese anmutige Funktion: [Abbildung 7](#). Sie interpoliert die Anzahl dieser *schwingenden Orbitale*.

**Q:** *Nice. Aber vielleicht sind schwingende Orbitale eine eher esoterische Anwendung?*

**A:** Diese anschauliche Interpretation ist es vielleicht. Der eigentliche *Catch* dabei ist aber, dass die Anzahl der Orbitale über  $n$  Sektoren,  $n$  geradzahlig, die *Catalan-Zahlen* sind – und diese Zahlen sind ubiquitär in der Mathematik und Informatik. Sie gehören zu den am meisten gebrauchten und untersuchten Zahlen überhaupt.

**Q:** *Du sprichst auch von den ‚verlorenen Catalan-Zahlen‘?*

**A:** Ja. Darunter verstehe ich die Anzahl der Orbitale über  $n$  Sektoren, wenn  $n$  ungerade ist. Diese Zahlen hat man bisher nicht beachtet.

**Q:** *Ist ja unglaublich! Wie kommt das?*

**A:** Vielleicht durch den Einfluss der Informatiker, die vor lauter binären Bäumen den mathematischen Wald nicht sehen? (*lacht*)

Betrachten wir mal diese beiden Integrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^4 x^n \sqrt{\frac{4-x}{x}} dx$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^4 x^n \sqrt{\frac{x}{4-x}} dx$$

Beides sind Lösungen in einer bekannten mathematischen Problemklasse (von hausdorffschen Momentproblemen, aber das spielt hier keine Rolle) und ich sehe nicht, was für einen *Mathematiker* die Betrachtung des einen Problems, oder dessen Lösung, gegenüber dem anderen auszeichnen sollte. Sobald nun ein Mathematiker sieht, dass man beide Probleme in einem Aufwasch behandeln kann (und das ist offenkundig), so wird er nicht zögern, dies auch zu tun.

**Q:** *Und was hat das jetzt mit den Catalan-Zahlen zu tun?*

**A:** Aber das sind die Catalan-Zahlen! Das erste Integral ist eine Darstellung der klassischen Catalan-Zahlen und das zweite Integral eine Darstellung der ‚verlorenen Catalan-Zahlen‘. Es sind die Catalan-Zahlen, nur eben nicht in der üblichen Notation und in der Beschreibung *à la mode!* Dass für eine *besondere Klasse von Anwendern* der Mathematik seit der Mitte des 20. Jahrhunderts die einen Zahlen mehr im Vordergrund stehen als die anderen, ist für die Sicht des Mathematikers unerheblich. Und nicht nur das: Theodor Fontane schrieb einmal: *Man sieht nur, was man weiß*. Vielleicht sind die Informatiker nur die Opfer der Blindheit der Mathematiker. (*lacht*)

**Q:** *Du sprichst auch viel von Binomialkoeffizienten. Warum?*

Das pascalsche Dreieck hat eine große Schwester, die binomiale Pyramide. Sieh hier: Abbildung 14. Und diese ist eng verwandt mit der catalanschen Pyramide. Denn bis auf einen Faktor, der jetzt hier keine

Rolle spielt, sind die klassischen Catalan-Zahlen gegeben durch einen Binomialkoeffizienten, der auch ein Trinomialkoeffizient ist

$$\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n, 0, n}.$$

Hier wird offensichtlich eine Menge mit einer geraden Anzahl von Elementen zu Grunde gelegt. Befreit man sich von dieser Voraussetzung, betrachtet man Grundmengen mit beliebiger Anzahl, so kann man die Anzahl der betrachteten kombinatorischen Konfigurationen so beschreiben:

$$n! = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor, [n \text{ odd}], \lfloor n/2 \rfloor}$$

Diese Formel leistet im Fall eines geraden  $n$  dasselbe wie der Binomialkoeffizient, ist aber auch im Fall eines ungeraden  $n$  anwendbar. Das ist die Grundidee. Daher als Tipp: Wann immer du in einer Formel  $\binom{2n}{n}$  siehst, ersetze diesen Ausdruck durch  $n!$  und passe den Rest der Formel sensibel an. Du wirst dich nun oft eines größeren Reichtums an Zusammenhängen erfreuen können.

**Q:** Cool! Kannst du auch dafür ein Beispiel geben?

**A:** Gern. Die klassische Reed-Dawson-Identität ist

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} = [n \text{ even}] n!$$

Sie lässt sich mit Hilfe der schwingenden Fakultät verallgemeinern zur *schwingenden Reed-Dawson-Identität*. Darunter verstehe ich

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k 2^{n-k} \binom{n}{k} \binom{2k}{k} \binom{n-k+2}{2} = n!.$$

**Q:** Danke für das beschwingte Gespräch!

**A:** Well, some things are even, some things are odd. Let them all swing!

(Dieses Interview führte Louisa Maria Luschny am 20. Oktober 2005 mit dem Autor.)

---

$$\mathcal{L}_k(n) = \prod_{1 \leq j \leq \lfloor n/k \rfloor} (e^{\wedge(j)})^{[k \mid \lfloor n/j \rfloor]}$$

---

*Louisa-Zahlen*

---



SCHWINGENDE ORBITALSYSTEME

---

Die folgenden Diagramme von schwingenden Orbitalssystemen wurden mit dem Programm *Asymptote* [36] und der Funktionsbibliothek *Orbital.asy* [55] des Autors erstellt. Das Programm ist frei erhältlich genauso wie die Bibliothek, die unter der Creative Commons (CC-BY-SA 3.0) Lizenz steht und im Internet über die Homepage dieses Buches (siehe letzte Seite) abrufbar ist.

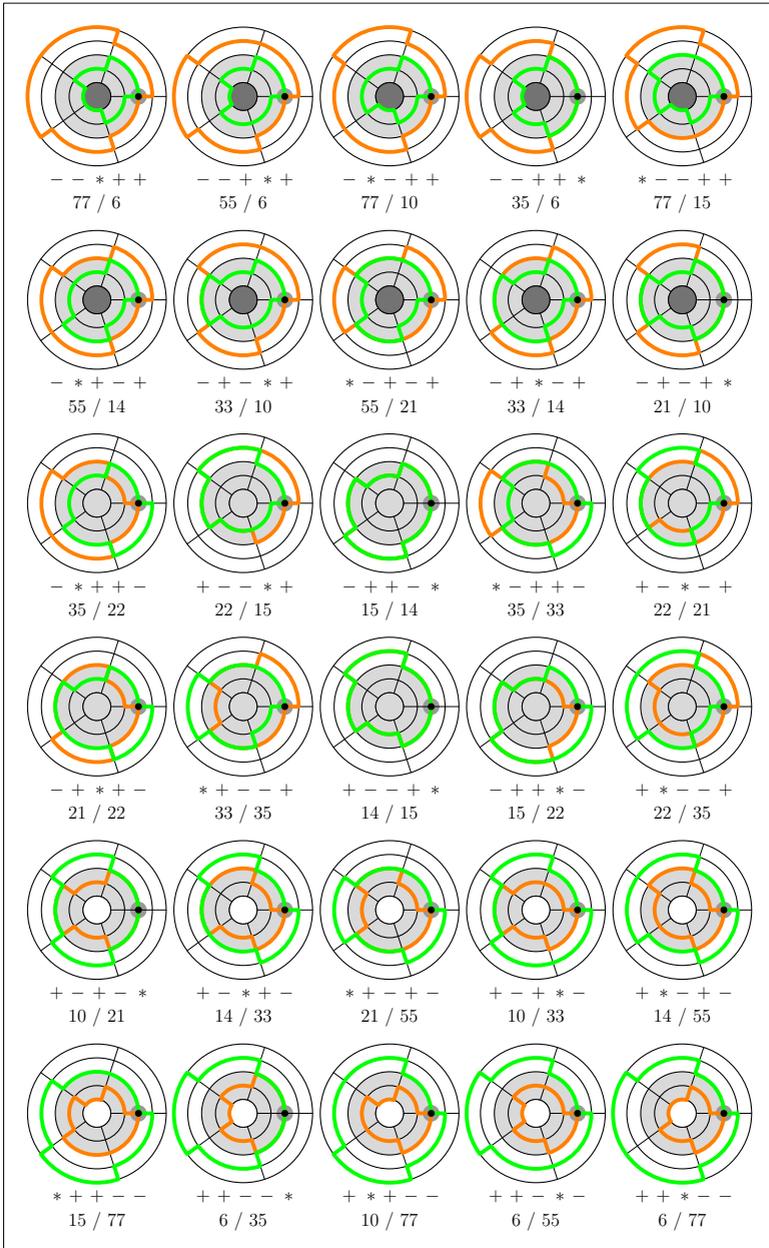


Abbildung 12 – Schwingende Orbitale über 5 Sektoren

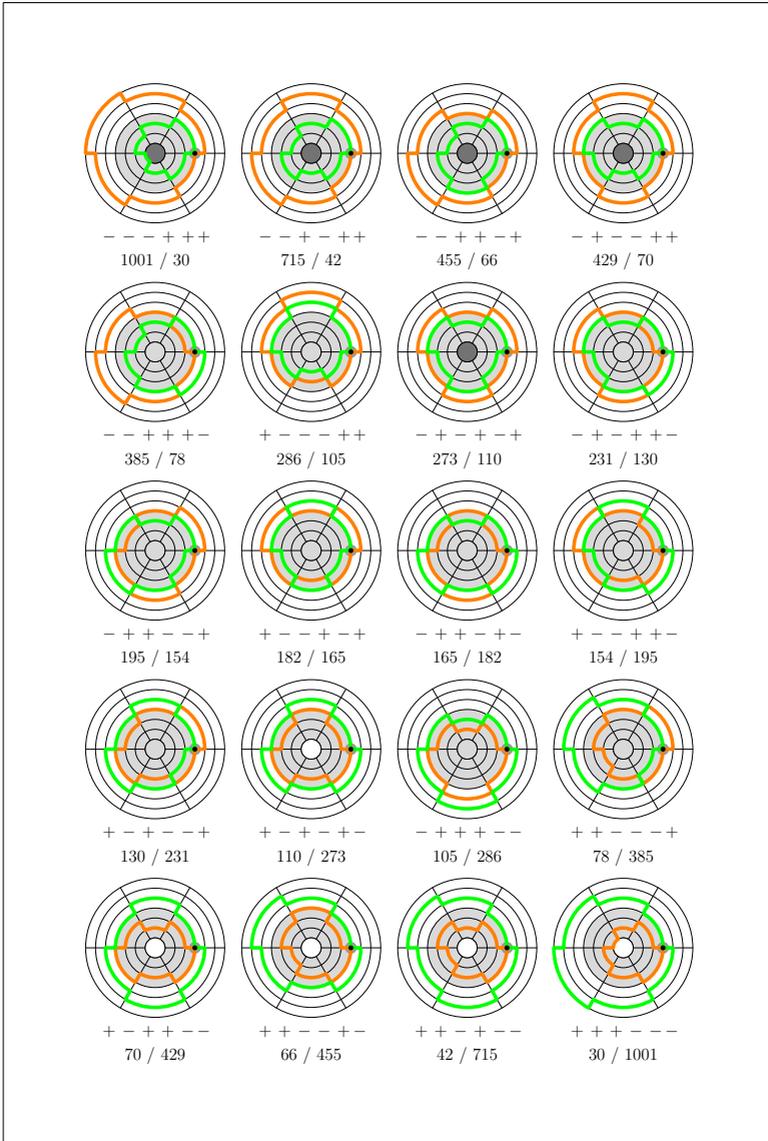


Abbildung 13 – Schwingende Orbitale über 6 Sektoren

# E

## FUNKTIONSGRAPHEN

---

Die Graphen der Funktionen  $\binom{x}{y}_2$  und  $E(x, y)$  sind ästhetisch sehr reizvolle Objekte, die auf den nächsten Seiten dargestellt werden.

Der Graph der verallgemeinerten binomischen Funktion  $\binom{x}{y}_2$  stellt sich als Hügellandschaft dar.

Der Graph der verallgemeinerten Catalan-Funktion  $E(x, y)$  ist dagegen, ebenso wie das catalanische Zahlendreieck, von dem eigentümlichen Nulldurchgang in seiner Mitte geprägt und zeigt eine dolomitenartige Ausprägung seines Graphen.

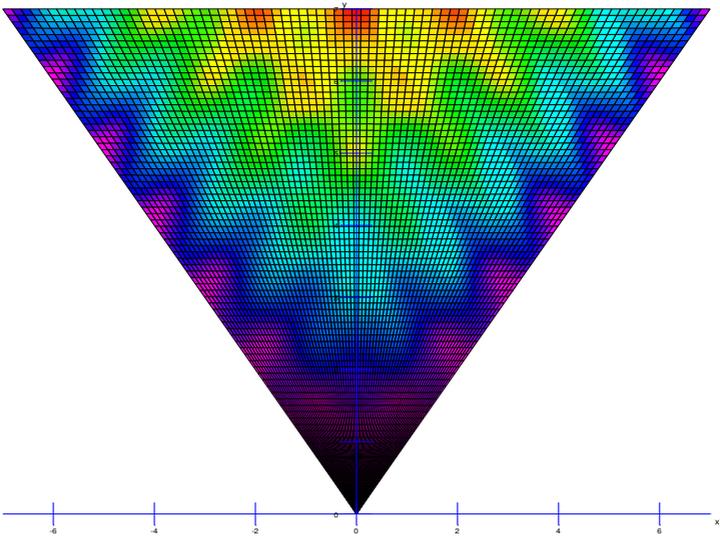


Abbildung 14 – LogBinom2,  $x$ - $y$  Ebene, binomisches Dreieck

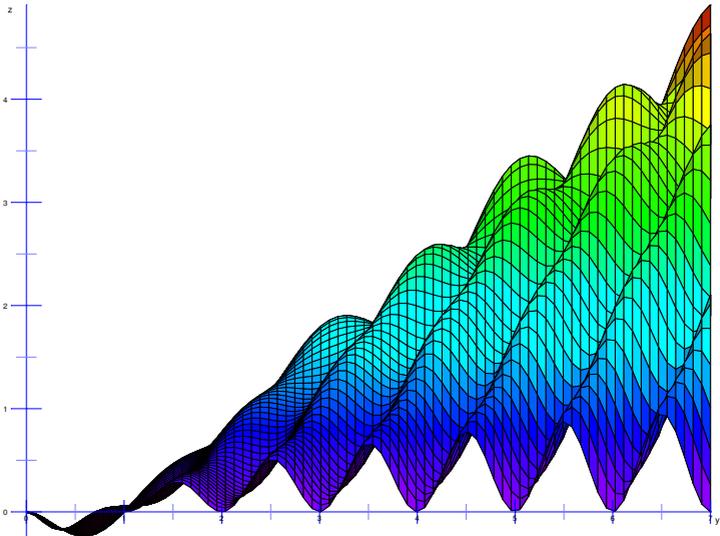


Abbildung 15 – LogBinom2,  $y$ - $z$  Ebene, binomische Wellen

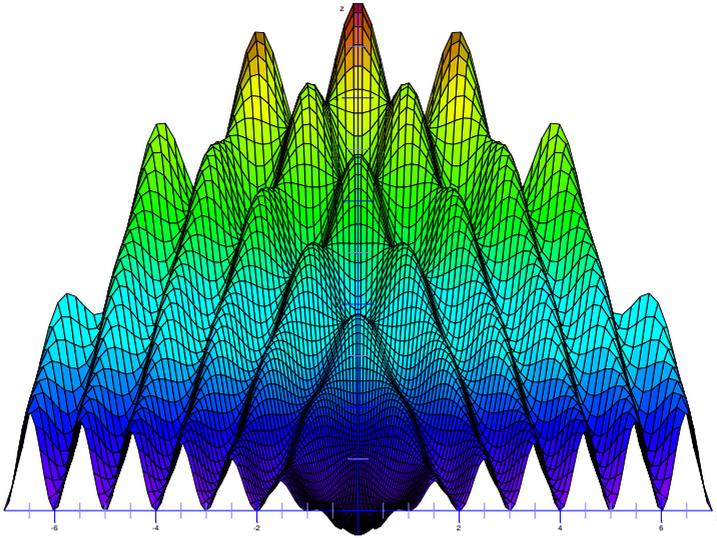


Abbildung 16 – LogBinom2, x-z Ebene, binomische Hügel

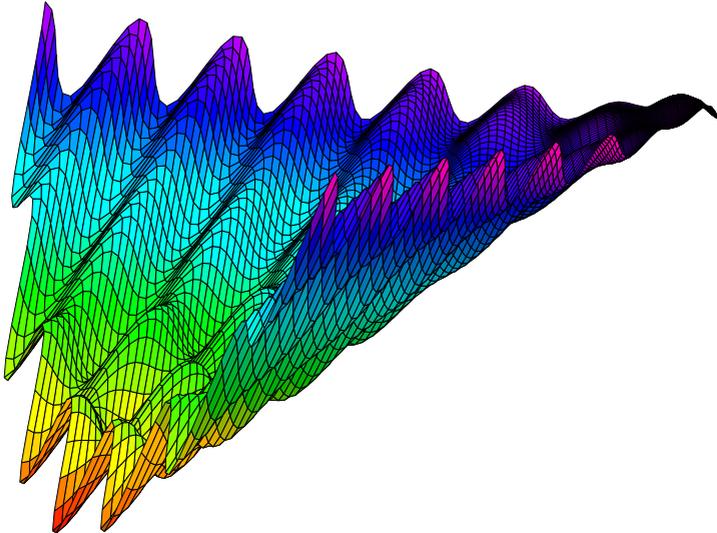
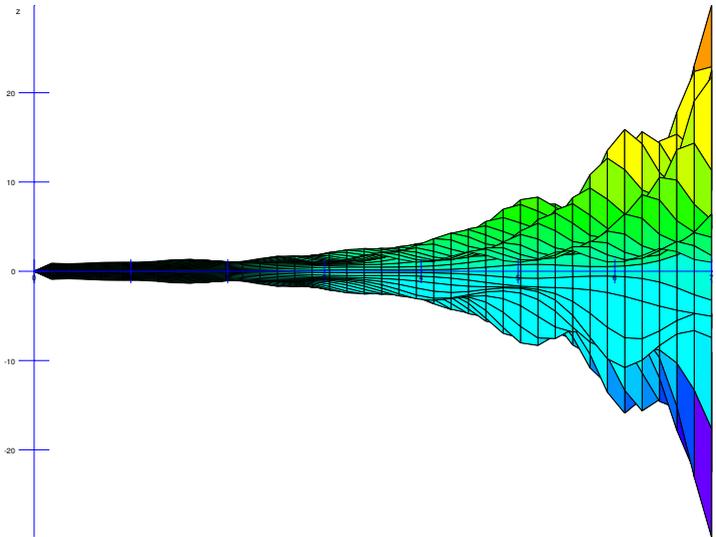
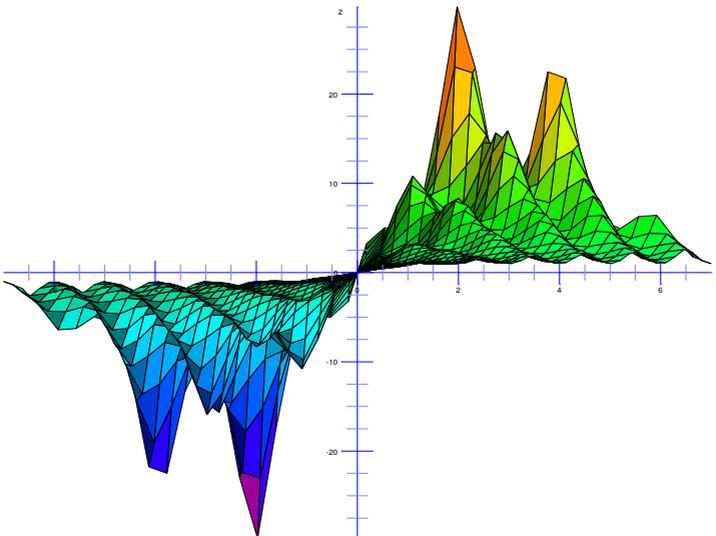


Abbildung 17 – LogBinom2, Perspektive, binomischer Kondor

Abbildung 18 – Catalan  $y$ - $z$  Ebene, Catalan-SpitzeAbbildung 19 – Catalan  $x$ - $z$  Ebene, Catalan-Berge



## FORMELSAMMLUNG

## DIE SCHWINGENDE FAKULTÄT.

$$n! = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!^2} \quad 1.1$$

$$z! = \frac{2^z}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Gamma(z/2 + 1/2)}{\Gamma(z/2 + 1)} \right)^{\cos z\pi} \quad 1.10$$

$$S_n(z) = \Gamma(z+1) \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+k}{n} + \frac{1}{n}\right)^{\exp(2\pi i(z+k)/n) - 1} \quad 1.58$$

## DIE LOUISA-ZAHLEN.

$$\mathcal{L}(n) = \frac{\text{lcm } n}{n!} \quad 6.2$$

$$\mathcal{L}_m(n) = \prod_{1 \leq k \leq \lfloor n/m \rfloor} \left( e^{\wedge(k)} \right)^{\lfloor m \lfloor n/k \rfloor \rfloor} \quad 6.23$$

$$\mathcal{L}_m^{(r)}(n) = \prod_{p \leq n, p \text{ prim}} p^{\sum_{k \geq 1} \lfloor \lfloor np^{-k} \rfloor \bmod m = r \rfloor} \quad 6.22$$

## VERALLGEMEINERTE BINOMIALKOEFFIZIENTEN.

$$\binom{n}{k}_2 = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}(n-k - \lfloor n-k \text{ odd} \rfloor)\right)! \left(\frac{1}{2}(n+k - \lfloor n+k \text{ odd} \rfloor)\right)!} \quad 8.2$$

$$\binom{z}{w}_2 = z! \left( \frac{(z-w)! (z+w)!}{(z-w)! (z+w)!} \right)^{1/2} \quad 9.43$$

$$\binom{z}{w}_n = z! \left( \frac{S_n(z-w) S_n(z+w)}{(z-w)! (z+w)!} \right)^{1/n} \quad 9.48$$

## VERALLGEMEINERTE CATALAN-ZAHLEN.

$$E(z, w) = \frac{w}{z} \binom{z}{w}_2 \quad 9.44$$

$$E(x) = E(x+1, 1) \quad 9.45$$

$$E_n = E(n) = n! / (\lfloor n/2 \rfloor + 1) \quad 9.3$$

## DIE ERATOSTHENISCHE FAKULTÄT.

$$n' = \frac{n!}{\lfloor n/2 \rfloor!}$$

$$z' = \sqrt{z! z!} \quad 1.42$$

## DIE COFAKULTÄT UND DIE STERNEFAKULTÄT.

$$n_i = \lfloor n/2 \rfloor_i^2 \mathcal{L}(n) \quad 6.5$$

$$n_* = n! n_i$$

## DIE ALTERNIERENDE FAKULTÄT.

$$n \updownarrow = 1 \frac{1}{2} 3 \frac{1}{4} 5 \frac{1}{6} 7 \dots n^{(-1)^{(n+1)}}$$

$$z \updownarrow = \frac{z!}{2^z} 2^{(1 - \cos(z\pi))/2} \quad 2.19$$

## DIE UNGERADE, GERADE UND DOPPELTE FAKULTÄT.

$$1^{\overline{\overline{}}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \quad 3.15$$

$$2^{\overline{\overline{}}} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \quad 3.15$$

$$z^{\overline{\overline{}}} = z(z+2)(z+4) \dots (z+2(n-1)) \quad 3.15$$

## DIE SCHWINGENDE HARMONISCHE FUNKTION.

$$\tilde{H}_n = \sum_{0 \leq k < n} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad 1.34$$

$$\tilde{H}(z) = \log 2 + \frac{1}{2} \cos \pi z \left( \Psi \left( \frac{z+1}{2} \right) - \Psi \left( \frac{z+2}{2} \right) \right) \quad 1.38$$

DIE ABLEITUNG VON  $n!$ .

$$n! = \frac{1}{2} \left( \prod_{0 \leq k < n} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{(-1)^k} \right) \left( \sum_{0 \leq k < n} (-1)^k \frac{2}{k+1} \right) \quad 1.36$$

POLYNOME MIT  $p_n(1) = n!$ 

$$R_n(x) = 2^n \left( \frac{n}{2} \right)^{[n \text{ odd}]} F \left( -n + [n \text{ odd}], 1/2 \middle| 2x \right) \quad 3.22$$

$$T_n(x) = 2^n \left( \frac{n}{2} \right)^{[n \text{ odd}]} {}_x F \left( -n + [n \text{ odd}], 1/2 \middle| 2x \right) \quad 3.22$$

$$S_n(x) = 2^n \left( \frac{n+1}{2} \right)^{[n \text{ odd}]} F \left( -n, 1/2 \middle| 1 + [n \text{ odd}] \middle| 2x \right) \quad 3.26$$

SCHWINGENDE POLYNOME,  $[z^0] = n!$ 

$$\sum_{k=-n}^n \binom{n}{k}_2 x^k = \left( x + \frac{1}{x} \right)^n + n \left( x + \frac{1}{x} \right)^{n-1} \quad 8.22$$

VERALLGEMEINERTE  $q$ -BINOMIALKOEFFIZIENTEN

$$\binom{n}{k}_{2,q} = \frac{n!_q}{\tau(n-k)!_q \tau(n+k)!_q} \quad 10.14$$

SCHWINGENDE  $q$ -POLYNOME

$$n!_q = (n-1)!_q \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right) \left( \frac{1-q}{1-q^{n/2}} \right)^{2[n \text{ even}]} \quad 10.8$$

SYMMETRISCHE  $q$ -FAKULTÄT

$$n!_{\langle q \rangle} = q^0 (q + q^{-1}) (q^2 + q^0 + q^{-2}) (q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}) \dots (q^{n-1} + q^{n-3} + \dots + q^{3-n} + q^{1-n}) \quad 10.10$$

SYMMETRISCHE SCHWINGENDE  $q$ -FAKULTÄT

$$n!_{\langle q \rangle} = n!_{\langle q \rangle} \left( [n/2]!_{\langle q \rangle} \right)^{-2} \quad 10.11$$

CATALAN-POLYNOME  $E_n(x)$ 

$$\sum_{k=-n}^n E_{n,k} x^k = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-2} \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{1}{x} + n - 1\right) \quad 9.21$$

VERALLGEMEINERTE  $q$ -CATALAN-POLYNOME

$$E_{n,k}(q) = \frac{[k]_q}{[n]_q} \binom{n}{k}_{2;q} \quad 10.15$$

 $q$ -CATALAN-ZAHLEN

$$E_{n-1}(q) = E_{n,1}(q) \quad 10.8$$

HYPERGEOMETRISCHE DARSTELLUNGEN VON  $n\zeta$ .

$\eta = [n \text{ odd}] \text{ UND } n > 0$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1\right)^{\eta-1/2} \left(\frac{n}{2}\right)^{\eta-1/2} 2^n \pi^{-1/2} \quad (\text{BI})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} n, n/2 + 1/2, 1 \\ n + 1, n/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1\right)^{\eta-1/2} 2^n \pi^{-\eta} \quad (\text{CL})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} n, n/2 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| -1\right)^{2\eta-1} \left(\frac{4^n}{\pi}\right)^\eta \quad (\text{KI})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} n/2, 1/2 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1\right)^{2\eta-1} 2^n \pi^{-\eta} \quad (\text{KT1})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} n, 1 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right)^{2\eta-1} 2^n \pi^{-\eta} \quad (\text{KT2})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n/2 + \eta/2, 1/2 - \eta \\ 1 \end{matrix} \middle| 1\right) 2^{n-\eta} \quad (\text{PL})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n + \eta, n + 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) 2^{n-\eta} n^\eta (-1)^{n/2-\eta/2} \quad (\text{L1})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n + \eta, -n + \eta \\ 1 \end{matrix} \middle| -1\right) n^\eta (-1)^{n/2-\eta/2} \quad (\text{L2})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} n + 1 + \eta, n + 1 + \eta \\ 1 \end{matrix} \middle| -1\right) 2^{2n+1} \\ \times (n + 1)^\eta (-1)^{n/2+\eta/2} \quad (\text{L3})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n - \eta, n + \eta \\ 2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) 2^{n+1-\eta} \\ \times (n + 1)^\eta (n + \eta - 1) (-1)^{n/2+\eta/2+1} \quad (\text{GB})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n + \eta, 1/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) 2^{n-\eta} n^\eta \quad (\text{RD1})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n + \eta, 1/2 \\ 2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) 2^{n-\eta} n^\eta \quad (\text{RD2})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n, -n - 1, 1/2 \\ -n - 2, 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) 2^{n-1} (n + 2) \quad (\text{RD3})$$

$$n\zeta = F\left(\begin{matrix} -n, 1/2 \\ 1 + \eta \end{matrix} \middle| \frac{1}{2}\right) (-2)^{n-\eta} (n + 1)^\eta \quad (\text{RD4})$$

## HYPERGEOMETRISCHE DARSTELLUNGEN DER CATALAN-ZAHLEN.

 $\eta = [n \text{ odd}]$  UND  $n > 0$ 

$$E_n = \left( F \left( \begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \left( \frac{n}{2} \right) \right)^{\eta-1/2} \frac{2^{n+1}}{n-\eta+2} \pi^{-1/2} \quad (\text{BI})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} n, n/2 + 1/2, 1 \\ n+1, n/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right)^{\eta-1/2} \frac{2^{n+1}}{n-\eta+2} \pi^{-\eta} \quad (\text{CL})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} n, n/2 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| -1 \right)^{2\eta-1} \left( \frac{4^n}{\pi} \right)^\eta \frac{2}{n-\eta+2} \quad (\text{KI})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} n/2, 1/2 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right)^{2\eta-1} \frac{2^{n+1}}{n-\eta+2} \pi^{-\eta} \quad (\text{KT1})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} n, 1 \\ n/2 + 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right)^{2\eta-1} \frac{2^n}{n-\eta+2} \pi^{-\eta} \quad (\text{KT2})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n/2 + \eta/2, 1/2 - \eta \\ 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \frac{2^{n+1-\eta}}{n-\eta+2} \quad (\text{PL})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n + \eta, n + 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) \frac{n^\eta 2^{n+1-\eta}}{n-\eta+2} (-1)^{n/2-\eta/2} \quad (\text{L1})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n + \eta, -n + \eta \\ 1 \end{matrix} \middle| -1 \right) \frac{2n^\eta}{n-\eta+2} (-1)^{n/2-\eta/2} \quad (\text{L2})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} n+1 + \eta, n+1 + \eta \\ 1 \end{matrix} \middle| -1 \right) 4^{n+1} \\ \times \frac{(n+1)^\eta}{n-\eta+2} (-1)^{n/2+\eta/2} \quad (\text{L3})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n - \eta, n + \eta \\ 2 \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} \right) 2^{n+2} (2n+2)^\eta \\ \times \frac{n + \eta - 1}{n-\eta+2} (-1)^{n/2+\eta/2+1} \quad (\text{GB})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n + \eta, 1/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| 2 \right) 2^n n^\eta \frac{2-\eta}{n-\eta+2} \quad (\text{RD1})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n + \eta, 1/2 \\ 2 \end{matrix} \middle| 2 \right) 2^n n^\eta \frac{2-\eta}{n-\eta+2} \quad (\text{RD2})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n, -n-1, 1/2 \\ -n-2, 1 \end{matrix} \middle| 2 \right) 2^n \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^\eta \quad (\text{RD3})$$

$$E_n = F \left( \begin{matrix} -n, 1/2 \\ 1 + \eta \end{matrix} \middle| 2 \right) 2^n \left( \frac{n}{2} + 1 \right)^{\eta-1} \quad (\text{RD4})$$

VERZEICHNIS DER FOLGEN IN DER OEIS

---

Die Hinweise auf Folgen in der *Online Encyclopedia of Integer Sequences* sind näherungsweise zu verstehen. Bisweilen unterscheidet sich der Startindex (offset) oder einer der ersten Terme von unseren Definitionen.

## G.1 SCHWINGENDE FAKULTÄT UND LCM

In der folgenden Tabelle benützen wir die Abkürzungen

$$\text{lcm } n = \text{lcm}\{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$P_k(n) = \prod \{p : p \text{ prim und } \lfloor n/(k+1) \rfloor < p \leq \lfloor n/k \rfloor\}$$

$$x^{\overline{n}} = x(x+2)(x+4) \cdots (x+2(n-1)) \quad (n > 0)$$

wobei zusätzlich  $x^{\overline{0}} = 1$  gesetzt ist.

A000142	$n!$	1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880
A056040	$n\lambda$	1, 1, 2, 6, 6, 30, 20, 140, 70, 630, 252, 2772
A000984	$(2n)\lambda$	1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620
A002457	$(2n+1)\lambda$	1, 6, 30, 140, 630, 2772, 12012, 51480
A163590	odd part of $n\lambda$	1, 1, 1, 3, 3, 15, 5, 35, 35, 315, 63, 693, 231
A060632	even part of $n\lambda$	1, 1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 2, 2, 4
A163641	radical of $n\lambda$	1, 1, 2, 6, 6, 30, 10, 70, 70, 210, 42, 462, 462
A182923	$n\lambda / P_1(n)$	1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 2, 18, 36, 36, 12, 12, 24
A163085	$\prod_{k=0}^n k\lambda$	1, 1, 2, 12, 72, 2160, 43200, 6048000
A180064	$n!/n\lambda$	1, 1, 1, 1, 4, 4, 36, 36, 576, 576, 14400, 14400
A193282	$n!n\lambda$	1, 1, 4, 36, 144, 3600, 14400, 705600
A081125	$\sqrt{n!n\lambda}$	1, 1, 2, 6, 12, 60, 120, 840, 1680, 15120
A180000	$\mathcal{L}(n) = \text{lcm } n / n\lambda$	1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 12, 4, 10, 10, 30, 30, 105
A003418	$\text{lcm } n$	1, 2, 6, 12, 60, 60, 420, 840, 2520, 2520
A205958	cofactorial $n_i$	1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 48, 16, 40, 40, 270, 270
A001147	$1^{\overline{n}}$	1, 1, 3, 15, 105, 945, 10395, 135135, 2027025
A000165	$2^{\overline{n}}$	1, 2, 8, 48, 384, 3840, 46080, 645120

## G.2 CATALANISCHE SUMMEN

Unter einer catalanischen Summe verstehen wir sehr allgemein Summen, die, abgesehen vom Vorzeichen, nur aus Catalan-Zahlen  $E_{n,k}$  bestehen.

A053121	Catalan Dreieck $C_{n,k}$
A189230	Komplementäres Catalan Dreieck $C_{n,k}^c$
A189231	Erweitertes Catalan Dreieck $E_{n,k}$
A189911	$\sum_{k=0}^n E_{n,k}$
A097070	$\sum_{k=0}^{2n} E_{2n,k}$
A037965	$\sum_{k=0}^{2n-1} E_{2n-1,k}$
A056040	$\sum_{k=0}^n E_{n,k} [k \text{ odd}]$
A002457	$\sum_{k=0}^{2n} E_{2n,k} [k \text{ odd}]$
A000984	$\sum_{k=0}^{2n-1} E_{2n-1,k} [k \text{ odd}]$
A212303	$\sum_{k=0}^n E_{n,k} [k \text{ even}]$
A001700	$\sum_{k=0}^{2n} E_{2n,k} [k \text{ even}]$
A005430	$\sum_{k=0}^{2n-1} E_{2n-1,k} [k \text{ even}]$
A005430	$\sum_{k=-2n}^{2n}  E_{2n,k}  [k \text{ odd}]$
A028329	$\sum_{k=-2n+1}^{2n-1}  E_{2n-1,k}  [k \text{ odd}]$
A000984	$\sum_{k=-2n}^{2n}  E_{2n,k}  [k \text{ even}]$
A002011	$\sum_{k=-2n+1}^{2n-1}  E_{2n-1,k}  [k \text{ even}]$
A100071	$\sum_{k=0}^n E_{n,k} [n+k \text{ odd}]$
A001405	$\sum_{k=0}^n E_{n,k} [n+k \text{ even}]$
A063886	$\sum_{k=-n}^n  E_{n,k}  [n+k \text{ even}]$
A002420	$\sum_{k=-n}^n (-1)^k  E_{2n,2k} $
A000917	$-\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k  E_{2n,k} $

## G.3 MOTZKIN UND SCHRÖDER ZAHLEN

---

A000108	Catalan Zahlen $C_n$	
A057977	Erweiterte Catalan Zahlen $E_n$	
A189912	$M_n^* = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} E_k$	1, 2, 4, 10, 25, 66, 177, 484
A001006	$M_n^e = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} E_k$ [k even]	1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323
A005717	$M_n^o = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} E_k$ [k odd]	0, 1, 2, 6, 16, 45, 126, 357
A006318	$S_n^* = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} E_{2k}$	1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806
A001003	$S_n^e = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} E_{2k}$ [k even]	1, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279
A001003	$S_n^o = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n+k}{2k} E_{2k}$ [k odd]	0, 1, 3, 11, 45, 197, 903, 4279

---

## G.4 THE SWINGING FAMILY.

---

A002457	Central beta $1/B(n+1, n+1)$
A000984	Central binomial $\binom{2n}{n}$
A001405	Middle binomial $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ , also $\binom{n}{\lfloor n \text{ odd} \rfloor}_2$
A000000	Column 1 in the binomial pyramide $\binom{n}{1}_2$
A162246	Swinging number triangle $\binom{n}{k}_2$
A001792	Row sums of the swinging number triangle $\binom{n}{k}_2$
A000000	The swinging inversion numbers $\tilde{I}_n(k)$
A000000	Max. number of inversions of a swinging word of length $n$
A000000	Special coefficients of the swinging $q$ -polynomials $[q^{n-1}]p_n$
A000000	Odd part of $n!_q$ , $q = 1/2$ .
A000000	The orbital numbers $O_n(k)$
A000000	Balanced orbits $O_n(0)$

---

## TABELLENVERZEICHNIS

---

1	Die schwingende Fakultät	3
2	Die eratosthenische Fakultät	16
3	$\alpha(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^k \log_2(k)$ .	28
4	Die Polynome $R_n(x)$ mit $R_n(1) = n!$ .	37
5	Die Polynome $S_n(x)$ mit $S_n(1) = n!$ .	38
6	Ungleichung (5.3)	54
7	Das pascalsche Dreieck, reduziert $\binom{n-1}{k} \triangleright n$	62
8	Eine schwingende Notation mit Primzahlerkennung.	64
9	Die Louisa-Zahlen $\mathcal{L}(n)$	66
10	$n_j$ die Cofakultät von $n$ .	67
11	Berechnung der Fakultät und Cofakultät	68
12	$n_*$ die Sternfakultät von $n$ .	69
13	Eine obere Schranke (6.13) der Louisa Zahlen	71
14	$\mathcal{L}_3^{(r)}(n)$ , eine Zerlegung von $\text{lcm } n$ .	75
15	Schranken der Fluktuation der Louisa-Zahlen.	84
16	Die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}_2$	87
17	Binomische Transformation der schwingenden Fakultät.	93
18	Die verallgemeinerten Fibonacci-Zahlen $F_n^{(r)}$	95
19	$\Omega_4$ , die schwingenden Orbitale über 4 Sektoren.	98
20	Die Anzahl oszillierender Orbitale	99
21	Typen der Pfade.	100
22	Typen der Orbitale.	100
23	Anzahl elevierter Orbitale, die Catalan-Zahlen	101
24	Die rekursive Pyramide der Catalan-Zahlen $E(n,k)$	103
25	Zeilensumme der Catalan-Pyramide $\sum_{k \geq 0} E(n,k)$	106
26	Zerlegung von $n!$ nach dem ersten Nulldurchgang.	109
27	Approximationen verallgemeinerter Catalan-Zahlen.	111
28	Die Koeffizienten der schwingenden $q$ -Polynome	119
29	Schwingende Worte als Tritstrings	122
30	Die Orbitalzahlen	123
31	Anzahl balancierter Orbitale.	123
32	Die rechte Seite der binomialen $q$ -Pyramide.	126
33	Die rechte Seite der $q$ -Catalan-Pyramide.	126
34	Orbitale über 6 Sektoren als $(3,3)$ -Kombinationen.	137
35	Abzählung farbiger und schwingender Orbitalsysteme	137
36	Binomische Zerlegung der Motzkin-Zahlen.	142
37	Das Schröder-Tableau: $\binom{n+k}{k} E_k$ .	145
38	Das schwingende Tableau $\binom{n+k}{k} k!$ .	146
39	Die Omega Zahlen $\omega(n,k)$	148
40	Das schwingende Dreieck $(n,k)!$	152
41	Das faktorielle Dreieck $(n,k)!$	152
42	Das eratosthenische Dreieck $\epsilon(n,k)$	153
43	Das catalanische Dreieck $\eta(n,k)$	153

44	Die schwingende Fakultät nach Formel 8.14.	155
45	Der ungerade Anteil von $n!_{1/2}$	157
46	Zeilenmaximum der q-Pyramide	162
47	Berechnung des mittleren Binomialkoeffizienten	166
48	Die mittleren Koeffizienten der Pascal-Pyramide.	166
49	Schwingende Bernoulli-Zahlen	167

## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

---

1	Der Rachen des Drachen: eine Zerlegung der Fakultät	2
2	Die logarithmische Ableitung von $z!$	14
3	Die alternierende Fakultät	28
4	Die Fluktuation der Louisa-Zahlen.	83
5	Schwingende Orbitale über 4 Sektoren	98
6	Singularitäten der erzeugenden Funktion von $C_n$	111
7	Die Catalan-Funktion $E(x)$	113
8	Der Orbitalverband $\Omega_4$ .	129
9	Der Orbitalverband $\Omega_5$ .	130
10	35 Verstecke in 5 binären 3-Bäumen.	133
11	Eratosthenische Schwingungen über $\langle -2, -1, 0, 1, 2 \rangle$	134
12	Schwingende Orbitale über 5 Sektoren	178
13	Schwingende Orbitale über 6 Sektoren	179
14	LogBinom2, x-y Ebene, binomisches Dreieck	181
15	LogBinom2, y-z Ebene, binomische Wellen	181
16	LogBinom2, x-z Ebene, binomische Hügel	182
17	LogBinom2, Perspektive, binomischer Kondor	182
18	Catalan y-z Ebene, Catalan-Spitze	183
19	Catalan x-z Ebene, Catalan-Berge	183

## ALGORITHMENVERZEICHNIS

---

1	Berechnung von $\zeta(2)$ als schwingende Reihe	20
2	Berechnung von $n!$ mit Primzahlzerlegung von $n!$	46
3	Additive Berechnung der Fakultät	48
4	Additive Berechnung der schwingenden Fakultät	48
5	Sage Implementierung mit Rekursion von $n!$	49
6	Sage Implementierung mit Primzahlzerlegung von $n!$	50
7	Berechnung von $(n-1)! \bmod k$ mit $n!$	58
8	Berechnung von $n! \bmod p$ nach Lucas	59

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1965. (Zitiert auf den Seiten [10](#), [13](#), [22](#), [29](#), [40](#), and [41](#).)
- [2] M. Aigner. Catalan-like numbers and determinants. *J. Combin. Theory Ser. A* *87*, pages 33–51, 1999. (Zitiert auf den Seiten [xi](#) and [88](#).)
- [3] M. Aigner. Catalan and other numbers: a recurrent theme. pages 347–390, 2001. *Algebraic Combinatorics and Computer Science*. (Zitiert auf den Seiten [xi](#) and [88](#).)
- [4] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special Functions*. Cambridge University Press, 1999. (Zitiert auf den Seiten [31](#) and [124](#).)
- [5] T. M. Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, 1976. (Zitiert auf den Seiten [30](#) and [71](#).)
- [6] E. Bach and J. Shallit. *Algorithmic Number Theory*. MIT Press, 1996. (Zitiert auf den Seiten [45](#), [62](#), [79](#), and [158](#).)
- [7] M. J. Binet. Mémoire sur les intégrales définies eulériennes. *Journ. l'École Roy. Polyt.*, 16:123–343, 1839. (Zitiert auf Seite [32](#).)
- [8] J. M. Borwein and P. B. Borwein. *Pi and the AGM*. Wiley, 1987. (Zitiert auf Seite [154](#).)
- [9] P. B. Borwein. On the complexity of calculating factorials. *Journal of Algorithms*, 6:376–380, 1985. (Zitiert auf Seite [46](#).)
- [10] P. L. Butzer, C. Markett, and M. Schmidt. Stirling numbers, central factorial numbers, and representations of the Riemann zeta function. *Resultate Math.*, 19:257–274, 1991. (Zitiert auf Seite [164](#).)
- [11] L. Carlitz. Sequences and inversions. *Duke Math. J.*, 37:193–198, 1970. (Zitiert auf Seite [121](#).)
- [12] Dario Castellanos. The ubiquitous  $\pi$ . *Math. Magazine*, 61:67–98, 148–163, 1988. (Zitiert auf Seite [33](#).)
- [13] E. Catalan. Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies. *Mémoires Académie Royale Belgique*, 33:1–50, 1868. (Zitiert auf Seite [19](#).)
- [14] P. L. Chebyshev. Mémoire sur les nombres premiers. *J. Math. Pures Appl.*, 17:366–390, 1852. Reprinted in *OEuvres*, Vol.1, 51–70. (Zitiert auf Seite [80](#).)

- [15] W. Y. C. Chen and Q.-H. Hou. Factors of the gaussian coefficients. Feb. 15, 2004. (Zitiert auf Seite 119.)
- [16] J. H. Conway and R. K. Guy. *The book of numbers*. Springer, 1996. (Zitiert auf Seite 48.)
- [17] R. Crandall, K. Dilcher, and C. Pomerance. A search for Wieferich and Wilson primes. *Math. of Comp.*, 66:433–449, 1997. (Zitiert auf Seite 150.)
- [18] Philip J. Davis. Leonhard Euler’s integral: A historical profile of the Gamma function. *American Mathematical Monthly*, 66:849–869, 1959. (Zitiert auf Seite xiii.)
- [19] J.-L. de la Grange. Démonstration d’un théorème nouveau concernant les nombres premiers. *Nouveaux Mémoires de l’Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, pages 125–137, 1771. Reprinted in: *Cœuvres*, vol. 3, 425–438. (Zitiert auf Seite 56.)
- [20] M. Deléglise and J. Rivat. Computing  $\psi(x)$ . *Math. of Comp.*, 67:1691–1696, 1998. (Zitiert auf Seite 159.)
- [21] E. Deutsch. A formula for the Pell numbers, problem 10663. *American Mathematical Monthly*, 105, 1998. Solutions: *Amer. Math. Monthly* 107, 2000, 370–371. (Zitiert auf Seite 95.)
- [22] H. G. Diamond. Elementary methods in the study of the distribution of the prime numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7:553–589, 1982. (Zitiert auf Seite 82.)
- [23] L. E. Dickson. *History of the Theory of Numbers*, volume I. Chelsea, New York, 1919. Divisibility of Factorials and Multinomial Coefficients. (Zitiert auf Seite 59.)
- [24] H. M. Edwards. *Riemann’s Zeta Function*. Academic Press, 1974. (Zitiert auf den Seiten 78 and 81.)
- [25] O. Espinosa and V. Moll. On some integrals involving the Hurwitz zeta function. *The Ramanujan Journal*, 6:part 1: 159–188, part2: 449–468, 2002. (Zitiert auf Seite 30.)
- [26] L. Euler. Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae  $4n + 1$  esse summam duorum quadratorum. *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 5:3–13, 1754/55. (Zitiert auf Seite 60.)
- [27] J. L. Fields. A note on the asymptotic expansion of a ratio of gamma functions. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 15:43–45, 1966. (Zitiert auf Seite 22.)

- [28] N. J. Fine. Binomial coefficients modulo a prime. *AMM*, 54:589–592, 1947. (Zitiert auf Seite 58.)
- [29] T. Fine. Extrapolation when very little is known. *Information and Control*, 16:331–359, 1970. (Zitiert auf Seite 166.)
- [30] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Web Edition, Oktoberfest 2006. To be published in 2008 by Cambridge University Press. (Zitiert auf den Seiten 99, 110, 143, and 145.)
- [31] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 1989. (Zitiert auf den Seiten 2, 4, 18, 34, and 57.)
- [32] A. Granville and O. Ramaré. Explicit bounds on exponential sums and the scarcity of squarefree binomial coefficients. *Mathematika*, 43:73–107, 1996. (Zitiert auf Seite 61.)
- [33] Andrew Granville. Binomial coefficients (mod  $p^q$ ). 1995. Unpublished manuscript. (Zitiert auf Seite 60.)
- [34] R. K. Guy. *Unsolved Problems in Number Theory*. Springer, 2004. third edition. (Zitiert auf Seite 61.)
- [35] Jacques Hadamard. Sur l’expression du produit  $1.2.3\dots(n-1)$  par une fonction entière. *Bull. Sc. math., 2ième série*, 19:69–71, 1895. Reprinted in: *Œuvres*. (Zitiert auf Seite 13.)
- [36] Andy Hammerlindl, John Bowman, and Tom Prince. Asymptote. <http://asymptote.sourceforge.net/links.html>, 2004. (Zitiert auf Seite 177.)
- [37] A. N. Khovanskii. *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*. P. Noordhoff, Groningen, 1963. (Zitiert auf Seite 40.)
- [38] K. Knopp and I. Schur. Über die Herleitung der Gleichung  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . *Arch. Math. Phys. (3)*, 27:174–176, 1918. (Zitiert auf Seite 19.)
- [39] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Vol.2, Seminumerical Algorithms*. Addison-Wesley, 1969. (Zitiert auf Seite 121.)
- [40] Donald E. Knuth. A trivial algorithm whose analysis isn’t. *Journal of Computer and Systems Sciences*, 16:301–322, 1978. reprinted in: *Selected Papers on Analysis of Algorithms*, 257–282. (Zitiert auf Seite 35.)
- [41] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Vol.3, Sorting and Searching*. Addison-Wesley, 1984. (Zitiert auf Seite 120.)

- [42] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, 2005. Volume 4, Fascicle 3, Generating all Combinations and Partitions. (Zitiert auf Seite [131](#).)
- [43] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, 2006. Volume 4, Fascicle 4, Generating all trees - History of combinatorial generation. (Zitiert auf den Seiten [110](#), [131](#), [132](#), [140](#), and [144](#).)
- [44] Donald E. Knuth, Ilan Vardi, and Rolf Richberg. Problem 6581, the asymptotic expansion of the middle binomial coefficient. *American Mathematical Monthly*, 97:626–630, 1990. (Zitiert auf Seite [25](#).)
- [45] W. Koepf. *Hypergeometric Summation*. Vieweg, 1998. (Zitiert auf den Seiten [31](#), [32](#), [33](#), [34](#), [36](#), and [39](#).)
- [46] T. H. Koornwinder. Orthogonal polynomials in connection with quantum groups. In P. Nevai, editor, *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice*, pages 257–292. Kluwer, 1990. (Zitiert auf Seite [35](#).)
- [47] E. Landau. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Teubner, Leipzig, 1909. (Zitiert auf Seite [81](#).)
- [48] W. Lang. Formula, skew Fibonacci-Pascal triangle. <http://oeis.org/A037027>, 2002. (Zitiert auf Seite [95](#).)
- [49] D. H. Lehmer. Interesting series involving the central binomial coefficient. *Amer. Math. Monthly*, 93:802–808, 1986. (Zitiert auf Seite [92](#).)
- [50] M. Lerch. Další studie v oboru Malmsténovských řad. *Rozpravy České Akad.*, 3:1–61, 1894. (Zitiert auf Seite [24](#).)
- [51] Édouard Lucas. Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier. *Bull. Soc. Math. France*, 6:49–54, 1878. (Zitiert auf Seite [58](#).)
- [52] Y. L. Luke. *The Special Functions and their Approximations, Vol. 1*. Academic Press, 1969. (Zitiert auf Seite [22](#).)
- [53] P. H. N. Luschny. Eine zahlentheoretische Vermutung. <http://www.luschny.de/math/vermutung.html>, 2002. (Zitiert auf Seite [61](#).)
- [54] P. H. N. Luschny. Is the Gamma function misdefined? Or: Hadamard versus Euler - who found the better Gamma function? <http://www.luschny.de/math/factorial/hadamard/HadamardsGammaFunction.html>, 2006. (Zitiert auf Seite [13](#).)
- [55] P. H. N. Luschny. An Asymptote package for drawing orbitals. <http://www.luschny.de/math/swing/orbitals/orbitaldoc.pdf>, 2008. (Zitiert auf Seite [177](#).)

- [56] P. H. N. Luschny. Sind die Bernoulli Zahlen falsch definiert? Oder: Die Riemannsche Funktionalgleichung als Grundlage der Bernoulli und Euler Funktion. <http://www.luschny.de/math/factorial/BernoulliEuler.pdf>, Juli 2004. (Zitiert auf Seite 167.)
- [57] Peter Luschny. The homepage of factorial algorithms. <http://www.luschny.de/math/factorial/FastFactorialFunctions.htm>, 2002. (Zitiert auf Seite 47.)
- [58] Peter Luschny. The homepage of factorial algorithms. <http://www.luschny.de/math/factorial/Benchmark.html>, 2012. (Zitiert auf Seite 47.)
- [59] B. H. Margolius. Permutations with inversions. *Journal of Integer Sequences*, 4, 2001. (Zitiert auf Seite 120.)
- [60] A. A. Markoff. Mémoire sur la transformation de séries peu convergentes en séries tres convergentes. *Mém. de l'Acad. Imp. Sci. de St. Pétersbourg*, XXXVII, 1890. (Zitiert auf Seite 19.)
- [61] D. Merlini, R. Sprugnoli, and M. C. Verri. The method of coefficients. *Amer. Math. Monthly*, 114:40–57, 2007. (Zitiert auf Seite 93.)
- [62] M. Mikolas. Integral formulae of arithmetical characteristics relating to the zeta-function of Hurwitz. *Publ. Math. Debrecen*, 5:44–53, 1957. (Zitiert auf Seite 30.)
- [63] P. Moree. Convolved Convolved Fibonacci Numbers. *Journal of Integer Sequences*, 7, 2004. (Zitiert auf Seite 94.)
- [64] F. Morley. Note on the congruence  $2^{4n} \equiv (-)^n (2n)! / (n!)^2$ , where  $2n + 1$  is a prime. *Annals of Math.*, 9:168–170, 1895. (Zitiert auf Seite 60.)
- [65] I. Niven and H. S. Zuckerman. *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley, New York, 1960. (Zitiert auf Seite 53.)
- [66] N. E. Nörlund. *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Springer, 1924. (Zitiert auf den Seiten 22 and 40.)
- [67] I. Paasche. Ein zahlentheoretisch-logarithmischer Rechenstab. *Math. Naturwiss. Unterr.*, 6:26–28, 1953–54. (Zitiert auf Seite 48.)
- [68] I. Paasche. Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes. *Compositio Math.*, 12:263–270, 1956. (Zitiert auf Seite 48.)
- [69] K. A. Penson and J.-M. Sixdeniers. Integral Representations of Catalan and Related Numbers. *Journal of Integer Sequences*, 4, 2001. (Zitiert auf Seite 101.)

- [70] Helmut Prodinger. Knuth's old sum - a survey. *Bulletin of EATCS*, 54:232–245, 1994. (Zitiert auf Seite 35.)
- [71] J. L. Rémy. *RAIRO Informatique Théorique*, 19:179–195, 1985. (Zitiert auf den Seiten 131 and 132.)
- [72] Paulo Ribenboim. *Die Welt der Primzahlen*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. (Zitiert auf den Seiten 55 and 150.)
- [73] Aaron Robertson, Dan Saracino, and Doron Zeilberger. Refined restricted permutations. *arXiv:math.CO/0203033 v1*, 2002. (Zitiert auf Seite 166.)
- [74] I. Z. Ruzsa. Erdős and the integers. *Jour. of Num. Theory*, 79:115–163, 1999. (Zitiert auf Seite 55.)
- [75] A. Sárközy. On divisors of binomial coefficients I. *J. Number Theory*, 20:70–80, 1985. (Zitiert auf Seite 61.)
- [76] L. Schoenfeld. Sharper bounds fo the chebyshev functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$  ii. *Math. of Comp.*, 30:337–360, 1976. (Zitiert auf den Seiten 80 and 83.)
- [77] A. Schönhage, A. F. W. Grotefeld, and E. Vetter. *Fast Algorithms, A Multitape Turing Machine Implementation*. BI Wissenschaftsverlag, 1994. (Zitiert auf den Seiten 2, 44, and 46.)
- [78] H.-J. Seiffert. Problem B-705: An application of a series expansion for  $(\arcsin x)^2$ . *Fibonacci Quart.*, 31:85–86, 1993. (Zitiert auf Seite 164.)
- [79] M. Petkovšek, H. S. Wilf, and D. Zeilberger. *A=B*. A.K. Peters, 1996. (Zitiert auf den Seiten 34 and 162.)
- [80] Steven Skiena. *Implementing Discrete Mathematics*. Cambridge University Press, 2003. (Zitiert auf Seite 57.)
- [81] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions*. Cambridge University Press, 1966. (Zitiert auf Seite 31.)
- [82] N. J. A. Sloane. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://www.oeis.org>. (Zitiert auf Seite xiii.)
- [83] Warren D. Smith. The gamma function revisited. *Internet*, pages 1–20, 2006. (Zitiert auf den Seiten 12, 40, and 41.)
- [84] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Vol. 2*. Cambridge University Press, 1998. (Zitiert auf den Seiten 99 and 101.)

- [85] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 5.11)*. The Sage Development Team, 2013. <http://www.sagemath.org>. (Zitiert auf Seite 49.)
- [86] Ilan Vardi. *Computational Recreations in Mathematica*. Addison-Wesley, 1991. (Zitiert auf den Seiten 47 and 57.)
- [87] G. Velammal. Is the binomial coefficient  $\binom{2n}{n}$  squarefree? *Hardy-Ramanujan J.*, 18:23–45, 1995. (Zitiert auf Seite 61.)
- [88] L. C. Washington. *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer Verlag, 1982. (Zitiert auf Seite 119.)
- [89] A. Weil. *Zahlentheorie. Ein Gang durch die Geschichte. Von Hammurapi bis Legendre*. Birkhäuser, Basel, 1992. (Zitiert auf Seite 7.)
- [90] S. C. Woon. Analytic continuation of Bernoulli numbers, a new formula for the Riemann zeta function, and the phenomenon of scattering of zeros. *arXiv:physics/9705021 v2*, 1997. (Zitiert auf Seite 167.)

## INDEX

---

- Algorithmus
  - Fakultät additiv, 48
  - Fakultät dsc, 43
  - Implementierung, 47
  - schwingende Fakultät additiv, 48
  - schwingende Fakultät dsc, 43
  - Zeitkomplexität, 45
- Bernoulli-Funktion
  - klassische, 29
- Betafunktion
  - eulersche, 10
  - zentrale, 11
- Binomialkoeffizient zentraler, 25
- Catalan-Funktion, 112, 115
- Catalan-Zahlen
  - Asymptotik, 110
  - erzeugende Funktion, 108
  - hypergeometrische Darstellung, 115, 190
- eratosthenische Fakultät, 16
  - erzeugende Funktion, 18
  - Summendarstellung, 18
- Erdős Vermutung, 61
- Fakultät
  - doppelt steigende, 35
  - steigende, 18, 146
  - ungerade, 35
- hypergeom. Identität, 32
- Legendre-Polynome, schwingende
  - Darstellung, 34
  - Definition, 33
- Orbitale
  - Nulldurchgang, 108
- Reed-Dawson Identität
  - klassische, 35
  - schwingende, 38
  - verallgemeinerte, 35
- schwingende Fakultät
  - asymptotische Entwicklung, 23
  - Definition, 3
  - Funktionalgleichung, 8
  - hypergeometrisch
    - Binet, 32
    - Clausen, 32
    - Kummer, 31
    - PL, 39
    - quad. Kummer, 31
  - Integraldarstellungen, 10
  - komplexe, 6
  - Logarithmus, 5
  - Primfaktoren, 3
    - Anzahl, 44
  - Produktdarstellung, 6, 8
  - Quadratfreiheit, 61
  - Reflexionsgleichung, 8
  - Schranken, 26
  - Zetafunktion, 24
- Stirling Zyklenzahlen, 18
- Umrechnungsformel, 7
- Wallis Formel, 5



#### ÜBER DEN VERFASSER.

Der Autor studierte Philosophie, Logik und Mathematik. Er schreibt regelmäßig über Themen aus der kombinatorischen Zahlentheorie auf seiner Userpage bei der On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

[http://oeis.org/wiki/User:Peter\\_Luschny](http://oeis.org/wiki/User:Peter_Luschny)

#### ÜBER DAS BUCH.

Das Buch untersucht Probleme der Elementaren Zahlentheorie und der Kombinatorik. Im Zentrum der Untersuchung liegt eine Zahlenfolge, die als schwingende Fakultät  $n!$  bezeichnet wird.

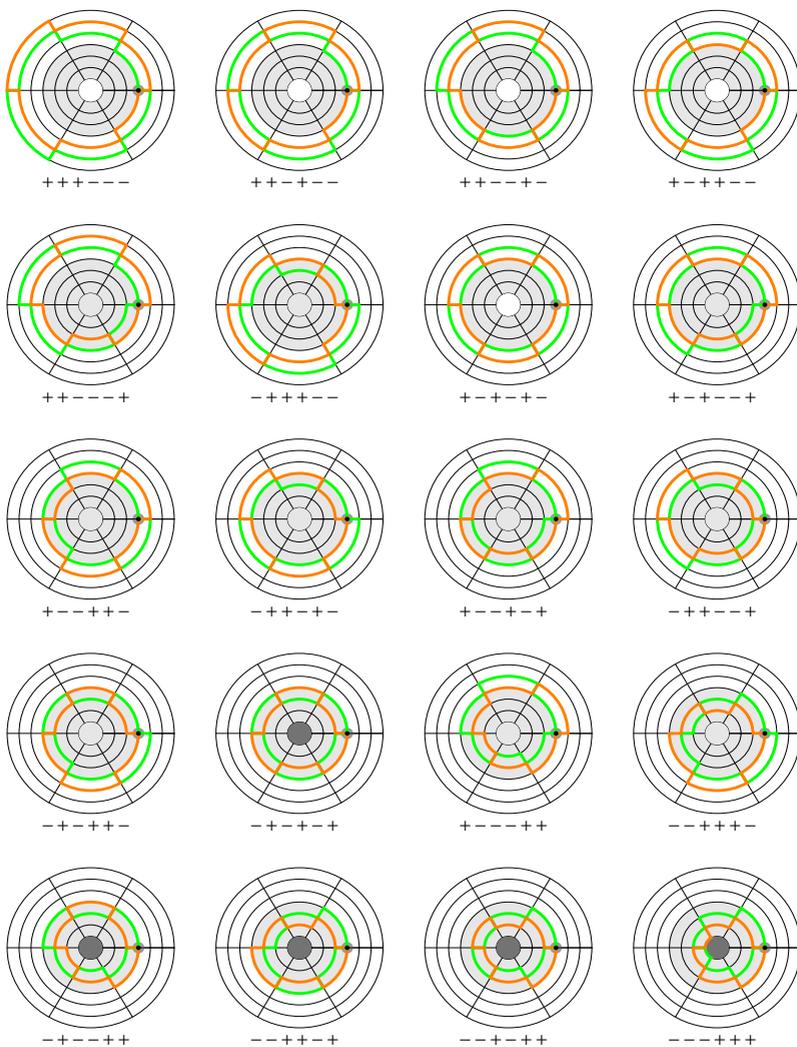
Eine Verallgemeinerung dieser Zahlen zu einer komplexen Funktion (ähnlich der Verallgemeinerung der Fakultät zu der eulerschen Gamma Funktion) ist der Schlüssel zu einer weitreichenden Verallgemeinerung des pascalschen Dreiecks und der Catalan Zahlen.

Die kombinatorische Deutung der schwingenden Fakultät  $n!$  eröffnet die Theorie der schwingenden Orbitale, Büscheln von konzentrischen Kreisen die zu unterschiedlichen Abzählungen von Umlaufbahnen führt.

Der zahlentheoretische Teil des Buches kreist um das Komplement der schwingenden Fakultät (die Louisa Zahlen). Die Betrachtung des Wachstums dieser Zahlen ist äquivalent zum Studium der Verteilung von Primzahlen weit draußen auf der Zahlengerade.

Zusätzliches Material zu dem Buch finden Sie auf der Homepage

<http://www.luschny.de/Swing>



EINE MATHEMATISCHE REISE ZU DEN  
SCHÖNHEITEN UND ÜBERRASCHUNGEN DER  
KOMBINATORISCHEN ZAHLENTHEORIE