Hilbert Hotel: *3n* labeled rooms moving to *3(n-1)*

(a sequence and its absolute first differences)

Hello SeqFans,

S =
1,3,2,5,9,4,13,19,6,25,32,7,39,47,8,55,65,10,75,86,11,97,109,12,121,135,14,149,164,15,...

Ask to every term in room 3n to move to room 3(n-1).
The resulting sequence D shows the absolute first differences of S.
(moving rooms have a dot on top and new rooms have a star):

```
           .     .       .       .        .       .        .         .
.          .
S =    1,3,2,5,9,4,13,19,6,25,32,7,39,47,
8,55,65,10,75,86,11,97,109,12,121,135,14,149,164,15,...
D =
2,1,3,4,5,9,6,13,19,7,25,32,8,39,47,10,55,65,11,75,86,12,97,109,14,121,135,15,149,...
     *     *     *       *       *       *        *        *         *          *
```

First differences appear here:

S = 1,3,2,5,9,4,13,19, 6, 25,32, 7, 39,47, 8, 55, 65, 10, 75, 86, 11, 97, 109,
12, 121,135, 14, 149, 164, 15,...
D = 2,1,3,4,5,9, 6, 13,19, 7, 25,32, 8, 39,47, 10, 55, 65, 11, 75, 86, 12, 97,
109, 14, 121, 135, 15, 149,...

We wanted S to:
- be a permutation of N
- be the lexicographically first sequence to show those properties

S is a simple concatenation of triplets (a,b,c),(d,e,f),(g,h,i),...

The triplets are linked like this;
-example with (a,b,c) and (d,e,f):

d = b+c
f = the smallest integer not yet present in S
e = d+f

If we start with a=1 we automatically get the whole sequence:

1,3,2,
5,9,4,
13,19,6,
25,32,7,
39,47,8,
55,65,10,
75,86,11,
97,109,12,
121,135,14,
149,164,15,
...

Best,
É.

P.-S.
This is now http://oeis.org/A173701

A variant: ask only to the prime numbers to change room. This means that only they must slide 3 steps to the left.

The sequence P is no more a permutation of N. But P shows all the primes (marked here with dots and stars):

```
          .         .          .           .          .            .
.            .             .            .
P = 1, 8, 7, 15, 18, 3, 21, 38, 17, 55, 60, 5, 65, 76, 11, 87, 106, 19, 125, 148, 23, 171,
208, 37, 245, 247, 2,  249, 262, 13,...
d =   7  1  8   3  15 18  17  21  38   5  55 60  11  65  76  19   87  106  23   125 148
37   171 208   2   245 247  13 ...
     *         *         *            *         *          *             *
*              *           *
```

The building method is the same as above (triplets):

1,8,7,
15,18,3,
21,38,17,
55,60,5,
65,76,11,
87,106,19,
125,148,23,
171,208,37,
245,247,2,
249,262,13,
...

The last term of a triplet is the “smallest prime not yet in P”. In building P you only have to be sure that ‘b’, ‘d’ and ‘e’ are not primes.

Gilles Esposito-Farèse has asked me about a 2n slide (instead of 3n). Here is my answer in French (many thanks to Stefan, Reinhard, Torleiv and Maximilian from the [Seqfans mailing list](#)):

> *****
> Glissement de 1n [chaque terme occupe la 1re chambre à sa gauche ; la suite qui en résulte (d) est celle des premières différences de S]:
>
> Il suffit de construire une suite ainsi :
>
> S = 1 2 4 8 16 32 64 128 ...
> d = 1 2 4 8 16 32 64...
>
> Ou ainsi :
>
> S = 3 6 12 24 48 96 192 ...
> d = 3 6 12 24 48 96 ...
>
> bref, de forme générale a, 2a, 4a, 8a, 16a, 32a, ... donc de forme (2^n)a.
>
> Notons cependant qu’il est impossible pour S d’être une permutation de N (naturels)
>
> *****
> Glissement de 2n [chaque terme occupe la 2e chambre à sa gauche ; la suite qui en résulte (d) est celle des premières différences de S]:
>
> Toutes ces suites sont finies (et ne sont donc pas des permutations de N) ; elles sont de ce type :
>
> S = 32 16 48 24 72 36 108 54   162 81   243 END
> d =   16 32 24 48 36 72   54 108   81 162
>
> Les plus longues (pour un départ le plus petit possible) commencent par une puissance de 2 et s’achèvent sur la même puissance de 3 (ci-dessus départ = 2^5 et fin = 3^5 = 243)
>
> *****
> Glissement de 3n [chaque terme occupe la 3e chambre à sa gauche ; la suite qui en résulte (d) est celle des premières différences de S].

C'est la suite que tu connais, permutation de N :
http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/Hilbert3n.htm

Une variante : les nombres qui déménagent dans la 3e chambre à leur gauche sont uniquement les nombres premiers de S.

Cette suite est facile à construire mais elle n'est alors plus une permutation de N (malgré mes efforts insensés !) :

```
          .          .          .           .          .            .
S = 1, 8, 7, 15, 18, 3, 21, 38, 17, 55, 60, 5, 65, 76, 11, 87, 106, 19, ...
d =   7  1  8   3  15 18  17  21  38   5  55 60  11  65  76  19   87 ...
      *         *         *            *         *           *
```

En revanche tous les nombres premiers figurent dans S.

*****
Glissement de 4n

... euh, j'y réfléchirai cette nuit !
;-))

à+
É.

____

Note that because of its mere definition, the Fibonacci sequence coincides with its first differences, beyond the first 0:

```
F = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...
d =   0  1  1  2  3  5   8  13  21  34  55   89   144  233 ...
```

____