

A164655, Wolfdieter Lang, 20 Aug 2009

Partial sums for $\Theta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k-1)^s}$, for $s=1, 2, 3, \dots$
 $\Theta(s) = (1-1/2^s) \cdot \zeta(s)$ ($\zeta(s)$ is the Euler-, Riemann-Zeta function).

Definition: $\Theta(s, N) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2^k-1)^s}$, $N \geq 1$.

$\Theta(s, N) = \zeta(s, 2^N) - \zeta(s, N) / 2^s$, with
 $\zeta(s, N) := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s}$, $N \geq 1$.

For $\zeta(s, N)$, $s=1, 2, 3, \dots$ see the W. Lang link under A103345.

On Dec 02 2013 a note has been added at the end.

%%%

s=1: $\Theta(1, n)$, $n=1..40$:

[1, 4/3, 23/15, 176/105, 563/315, 6508/3465, 88069/45045, 91072/45045,
1593269/765765, 31037876/14549535, 31730711/14549535, 744355888/334639305,
3788707301/1673196525, 11552032628/5019589575, 340028535787/145568097675,
10686452707072/4512611027925, 10823198495797/4512611027925,
10952130239452/4512611027925, 409741429887649/166966608033225,
414022624965424/166966608033225, 17141894231615609/6845630929362225,
743947082888833412/294362129962575675, 750488463554668427/294362129962575675,
35567319917031991744/13835020108241056725,
250947670863258378883/96845140757687397075,
252846595191840484708/96845140757687397075,
13497714685925233086599/5132792460157432044975,
13591038185200822760144/5132792460157432044975,
13681087175729900515319/5132792460157432044975,
812316935828221562448796/302834755149288490653525,
49854167840670803800030081/18472920064106597929865025,
50147388794069321227488256/18472920064106597929865025,
50431587564286345811024641/18472920064106597929865025,
3397389286871291767268515972/1237685644295142061300956675,
3415326759977018463809109547/1237685644295142061300956675,
243725885602663452991747734512/87875680744955086352367923925,
17879865329739387154749952543301/6414924694381721303722858446525,
17965397658997810105466257322588/6414924694381721303722858446525,
1640791669937677803334857936583/583174972216520118520259858775,
130205716897293066581974036848832/46070822805105089363100528843225].

Numerators: s=1, n=1..40

[1, 4, 23, 176, 563, 6508, 88069, 91072, 1593269, 31037876, 31730711, 744355888,
3788707301, 11552032628, 340028535787, 10686452707072, 10823198495797,
10952130239452, 409741429887649, 414022624965424, 17141894231615609,
743947082888833412, 750488463554668427, 35567319917031991744,
250947670863258378883, 252846595191840484708, 13497714685925233086599,
13591038185200822760144, 13681087175729900515319, 812316935828221562448796,
49854167840670803800030081, 50147388794069321227488256,
50431587564286345811024641, 3397389286871291767268515972,
3415326759977018463809109547, 243725885602663452991747734512,
17879865329739387154749952543301, 17965397658997810105466257322588,
1640791669937677803334857936583, 130205716897293066581974036848832].

Note that this is n o t A025550 (see the P. Barry/ T.D. Noe remark on A025550(39)).

Denominators: s=1, n=1..40

[1, 3, 15, 105, 315, 3465, 45045, 45045, 765765, 14549535, 14549535, 334639305, 1673196525, 5019589575, 145568097675, 4512611027925, 4512611027925, 4512611027925, 166966608033225, 166966608033225, 6845630929362225, 294362129962575675, 294362129962575675, 13835020108241056725, 96845140757687397075, 96845140757687397075, 5132792460157432044975, 5132792460157432044975, 5132792460157432044975, 302834755149288490653525, 18472920064106597929865025, 18472920064106597929865025, 18472920064106597929865025, 1237685644295142061300956675, 1237685644295142061300956675, 87875680744955086352367923925, 6414924694381721303722858446525, 6414924694381721303722858446525, 583174972216520118520259858775, 46070822805105089363100528843225].

Note that this is n o t A025547 (see the P. Barry/ T.D. Noe remark on A025547(39)).

The rational sequence Theta(1;n) diverges.

%%%%%%s=2: Theta(2,n), n=1..40: A120268(n)/A128492(n).

[1, 10/9, 259/225, 12916/11025, 117469/99225, 14312974/12006225, 2430898831/2029052025, 487983368/405810405, 141433003757/117279207045, 51174593563322/42337793743245, 51270597630767/42337793743245, 27164483940418988/22396692890176605, 3400039831130408821/2799586611272075625, 30634921277843705014/25196279501448680625, 25789165074168004597399/21190071060718340405625, 24804577707336170758506064/20363658289350325129805625, 24823277118070193095631689/20363658289350325129805625, 3548557216084587389770102/2909094041335760732829375, 4860883922861135897328099013/3982549742588656443243414375, 4863502298760273738513663388/3982549742588656443243414375, 8179529913958608810884711569603/6694666117291531481092179564375, 15130645477026759222806923871760322/12378437650872041708539440014529375, 15136758285743239243403733471767497/12378437650872041708539440014529375, 33449477490857687530387386679148930248/27343968770776340134163622992095389375, 11477077060617154871513468434232668130689/9378981288376284666018122686288718555625, 11480682974222835872922933302624167061314/9378981288376284666018122686288718555625, 32258617455880322251706537769757573993786651/26345558439048983626844906625785010422750625, 32267326731397363238029461705832213666653676/26345558439048983626844906625785010422750625, 32275435552092669173279337023353230905934301/26345558439048983626844906625785010422750625, 112377136715273630375812217084918381793980052406/91708888926329512005047119964357621281594925625, 418247034606459508140402306892945656276681369928351/341248775694872114170780333387374708788814718250625, 418333013133971443669293911915215088050122744258976/341248775694872114170780333387374708788814718250625, 418413782074964312808742617319567129401315363127201/341248775694872114170780333387374708788814718250625, 1878600716510209672312616389480924218591293479796255914/1531865754094280920512632916575925067752989270227055625, 1878922469451628340852946705153382930010691293127536539/1531865754094280920512632916575925067752989270227055625, 9473180034259752747160216973594779275251647797926138748724/7722135266389270120304182532459238266542818911214587405625, 50490298537836611659737100434819037996082573934059607979355821/41151258834588420471100988715475280722406681977862536284575625, 10099522863436996586897503677673691164753311468837801152716838/

8230251766917684094220197743095056144481336395572507256915125,
10100910998327689399192025552820106252650845848395158634122963/
8230251766917684094220197743095056144481336395572507256915125,
63048015792330027224451651672893378178938410276229757542818327208/
51365001277333266432028254114656245397708020444768017790407295125].

Numerators: s=2, n=1..40, give A120268.

[1, 10, 259, 12916, 117469, 14312974, 2430898831, 487983368, 141433003757,
51174593563322, 51270597630767, 27164483940418988, 3400039831130408821,
30634921277843705014, 25789165074168004597399, 24804577707336170758506064,
24823277118070193095631689, 3548557216084587389770102,
4860883922861135897328099013, 4863502298760273738513663388,
8179529913958608810884711569603, 15130645477026759222806923871760322,
15136758285743239243403733471767497, 33449477490857687530387386679148930248,
11477077060617154871513468434232668130689,
11480682974222835872922933302624167061314,
32258617455880322251706537769757573993786651,
32267326731397363238029461705832213666653676,
32275435552092669173279337023353230905934301,
112377136715273630375812217084918381793980052406,
418247034606459508140402306892945656276681369928351,
418333013133971443669293911915215088050122744258976,
418413782074964312808742617319567129401315363127201,
1878600716510209672312616389480924218591293479796255914,
1878922469451628340852946705153382930010691293127536539,
9473180034259752747160216973594779275251647797926138748724,
50490298537836611659737100434819037996082573934059607979355821,
10099522863436996586897503677673691164753311468837801152716838,
10100910998327689399192025552820106252650845848395158634122963,
63048015792330027224451651672893378178938410276229757542818327208].

Denominators: s=2, n=1..4, give A128492.

[1, 9, 225, 11025, 99225, 12006225, 2029052025, 405810405, 117279207045,
42337793743245, 42337793743245, 22396692890176605, 2799586611272075625,
25196279501448680625, 21190071060718340405625, 20363658289350325129805625,
20363658289350325129805625, 2909094041335760732829375,
3982549742588656443243414375, 3982549742588656443243414375,
6694666117291531481092179564375, 12378437650872041708539440014529375,
12378437650872041708539440014529375, 27343968770776340134163622992095389375,
9378981288376284666018122686288718555625,
9378981288376284666018122686288718555625,
26345558439048983626844906625785010422750625,
26345558439048983626844906625785010422750625,
26345558439048983626844906625785010422750625,
91708888926329512005047119964357621281594925625,
341248775694872114170780333387374708788814718250625,
341248775694872114170780333387374708788814718250625,
341248775694872114170780333387374708788814718250625,
1531865754094280920512632916575925067752989270227055625,
1531865754094280920512632916575925067752989270227055625,
7722135266389270120304182532459238266542818911214587405625,
41151258834588420471100988715475280722406681977862536284575625,
8230251766917684094220197743095056144481336395572507256915125,
8230251766917684094220197743095056144481336395572507256915125,
51365001277333266432028254114656245397708020444768017790407295125].

The limit of the sequence $\Theta(2, n)$ is $(\pi^2)/8 = (1-1/2^2) * \zeta(2)$
approximately 1.233700550
(Maple12, 10 digits).

The values $\Theta(2, 10^k)$, $k=0..4$ are:

[1., 1.208721311, 1.231200571, 1.233450550, 1.233675550].

%%%

s=3: Theta(3,n), n=1..40:
[1, 28/27, 3527/3375, 1213136/1157625, 32797547/31255875,
43684790932/41601569625, 96017087247229/91398648466125,
96044168328256/91398648466125, 471956397645187853/449041559914072125,
3237597973008257555852/3079976059450620705375,
462561506842656976961/439996579921517243625,
5628425850334528955928112/5353438387905100303185375,
703596058798919360293439483/669179798488137537898171875,
18998011529681231695738912916/18067854559179713523250640625,
463360571051954739540899597748949/440656904843834033118559874203125,
13804415429113627479696058476413142784/13127609852202659680635017212385296875,
13804780724209272710507774396417939659/13127609852202659680635017212385296875,
96635608352706084917992075471613313988/91893268965418617764445120486697078125,
4894975363158586737968817043984115890512289/
4654669752905349245622438688012667098265625,
4895053831604664813277666189092563650371664/
4654669752905349245622438688012667098265625,
33737665979778008945155653857136592014363720169/
320804494039989575357544096816521029079565140625,
26824126895035976146777848115316175542315095864617308/
25506202907637451167952258505591137459028985635671875,
26824406798497239657901776260814179285936045428245683/
25506202907637451167952258505591137459028985635671875,
2785015893243286550453504068985016127141197073482387217984/
2648130504479643092610307334825988664408766375652361078125,
955268171879544895094451634167209878515157735465029230815387/
908308763036517580765335415845314111892206866848759849796875,
955275019236617487970349782959272096772931082118027314206012/
908308763036517580765335415845314111892206866848759849796875,
142219387347652938274142529973043397265375552919352401216898245399/
135226283714587627871600840704802829036176081715842820158209359375,
142220200127720343759509151165173854382304395450271805230843599024/
135226283714587627871600840704802829036176081715842820158209359375,
142220930318838337353369996882024409224166864204931624137714583399/
135226283714587627871600840704802829036176081715842820158209359375,
29209327674236413474925648190473995944879202579626367876599841633262596/
27772638923018292424641509063111700224620807486718082561272880019078125,
6629990177464778385244523193431041185264850901533659325081069926639596380801/
6303861355385615032837554368654156828684655504142757097840279579610371890625,
6630015388170587235640780047359977161928552864186697125003075950625405490176/
6303861355385615032837554368654156828684655504142757097840279579610371890625,
6630038342604289140474763980193363248981183486509880166449039866072213356801/
6303861355385615032837554368654156828684655504142757097840279579610371890625,
19940765258980492003716442765292651650101563736086752312588104175190567162034297
88/18959682528298437341213213645795301702656830433924880530177360072023542809400
46875,
19940822973327825861958808159280779206124998883466075024844176847050613686004141
63/18959682528298437341213213645795301702656830433924880530177360072023542809400
46875,
71370588508892637805168802003099887617451071322106603030975343568648042185142377
3540368/678587893338582200723096250918024222769960883743648791543630912073801823
045533117078125,
27764440088753221139273424158465000783700240408600318756180089592135962806919836
7644470416381/263982226502895231978696734243377029069301873111303021939928666522
214163795704156606380953125,
2776450266231802182550633923616821436033056835710982176155660538190249553980884
6350619409284/263982226502895231978696734243377029069301873111303021939928666522
214163795704156606380953125,
27764560485569901294336456349757810888499596889085680457117155091413460628353119
6551276549909/263982226502895231978696734243377029069301873111303021939928666522
214163795704156606380953125,
13689037535467548853781549971901665660357859680785225937198779021982053436158973

3320601445271536576/130153532972760962279544659154620367035299526216923730634240
489813445949103670181669053458747796875].

Numerator Theta(3,n), n=1..40: A164655

[1, 28, 3527, 1213136, 32797547, 43684790932, 96017087247229, 96044168328256,
471956397645187853, 3237597973008257555852, 462561506842656976961,
5628425850334528955928112, 703596058798919360293439483,
18998011529681231695738912916, 463360571051954739540899597748949,
13804415429113627479696058476413142784, 13804780724209272710507774396417939659,
96635608352706084917992075471613313988,
4894975363158586737968817043984115890512289,
4895053831604664813277666189092563650371664,
33737665979778008945155653857136592014363720169,
26824126895035976146777848115316175542315095864617308,
26824406798497239657901776260814179285936045428245683,
2785015893243286550453504068985016127141197073482387217984,
955268171879544895094451634167209878515157735465029230815387,
955275019236617487970349782959272096772931082118027314206012,
142219387347652938274142529973043397265375552919352401216898245399,
142220200127720343759509151165173854382304395450271805230843599024,
142220930318838337353369996882024409224166864204931624137714583399,
29209327674236413474925648190473995944879202579626367876599841633262596,
6629990177464778385244523193431041185264850901533659325081069926639596380801,
663001538817058723564078004735997716192852864186697125003075950625405490176,
6630038342604289140474763980193363248981183486509880166449039866072213356801,
19940765258980492003716442765292651650101563736086752312588104175190567162034297
88,
19940822973327825861958808159280779206124998883466075024844176847050613686004141
63,
71370588508892637805168802003099887617451071322106603030975343568648042185142377
3540368,
27764440088753221139273424158465000783700240408600318756180089592135962806919836
7644470416381,
27764502662318021825550633923616821436033056835710982176155660538190249553980884
6350619409284,
27764560485569901294336456349757810888499596889085680457117155091413460628353119
6551276549909,
13689037535467548853781549971901665660357859680785225937198779021982053436158973
3320601445271536576].

Denominator Theta(3,n), n=1..40: looks like A128507.

[1, 27, 3375, 1157625, 31255875, 41601569625, 91398648466125, 91398648466125,
449041559914072125, 3079976059450620705375, 439996579921517243625,
5353438387905100303185375, 669179798488137537898171875,
18067854559179713523250640625, 440656904843834033118559874203125,
13127609852202659680635017212385296875, 13127609852202659680635017212385296875,
91893268965418617764445120486697078125,
4654669752905349245622438688012667098265625,
4654669752905349245622438688012667098265625,
320804494039989575357544096816521029079565140625,
25506202907637451167952258505591137459028985635671875,
25506202907637451167952258505591137459028985635671875,
2648130504479643092610307334825988664408766375652361078125,
908308763036517580765335415845314111892206866848759849796875,
908308763036517580765335415845314111892206866848759849796875,
135226283714587627871600840704802829036176081715842820158209359375,
135226283714587627871600840704802829036176081715842820158209359375,
135226283714587627871600840704802829036176081715842820158209359375,
27772638923018292424641509063111700224620807486718082561272880019078125,
6303861355385615032837554368654156828684655504142757097840279579610371890625,
6303861355385615032837554368654156828684655504142757097840279579610371890625,

6303861355385615032837554368654156828684655504142757097840279579610371890625,
18959682528298437341213213645795301702656830433924880530177360072023542809400468
75,
18959682528298437341213213645795301702656830433924880530177360072023542809400468
75,
67858789333858220072309625091802422276996088374364879154363091207380182304553311
7078125,
26398222650289523197869673424337702906930187311130302193992866652221416379570415
6606380953125,
26398222650289523197869673424337702906930187311130302193992866652221416379570415
6606380953125,
26398222650289523197869673424337702906930187311130302193992866652221416379570415
6606380953125,
13015353297276096227954465915462036703529952621692373063424048981344594910367018
1669053458747796875]

The limit of the sequence $\Theta(3,n)$ is $(1-1/2^3)*\zeta(3)$ approximately
1.051799790.
(Maple12, 10 digits).

The values of $\Theta(3,10^k)$, $k=0..4$ are

1., 1.051176344, 1.051793540, 1.051799728, 1.051799789].

%%%

s=4: $\Theta(4,n)$, $n=1..40$:

[1, 82/81, 51331/50625, 123296356/121550625, 9988505461/9845600625,
146251554055126/144149438750625, 4177234784807204311/4117052120156600625,
4177316109293528392/4117052120156600625,
348897735816424941428857/343860310127599440800625,
45469045689642442391390873722/44812219476138886724578250625,
45469276109166591994111574347/44812219476138886724578250625,
12724212507884764409110901655089452/12540296310422182199892702233150625,
7952652881902074431185833362754480541/7837685194013863874932938895719140625,
644166078021050808054824782971269564446/634852500715122973869568050553250390625,
455607062681307551694798396892753062061321951/4490191115582928920814419603633534
89531640625,
420763139153615389741623991738752563981423641150096/4146785789254262099879453606
76724578005750281640625,
420763488821577189411424921096914428662610672790721/4146785789254262099879453606
76724578005750281640625,
60109109308403231537976272759342454095213484534478/59239796989346601426849337239
532082572250040234375,
112654207650343298169046576180259252641621971638662057333/1110249171653508158767
45380730178687405690707655696484375,
112654255641589742470334517712107581679919211849546041708/1110249171653508158767
45380730178687405690707655696484375,
318334113100951437623530813850063562294117597685892728059324163/3137298809540788
86822687903797490457902191979755868553383984375,
1088321297933526829977651592609314954325149439278107500450498891772938/107258003
0735685852348292228190764174966471842581343166177719165234375,
1088321559498539659896469418743679396517296969586741569974819252137313/107258003
0735685852348292228190764174966471842581343166177719165234375,
5310663108355424241829116138016804412041095160321843272259462160807820871528/523
3848396960342275672766968350136320064568287279171202477258833930040234375,
89256330121162842522049580799773703911006523282468832935672951024332129731911721
/8796529000771247262723219443706074113132519920430103040003528922186218621914062
5,
89256343123775774157410101090626028485064430996548459586977236002012648294802346
/8796529000771247262723219443706074113132519920430103040003528922186218621914062
5,
70427556751292340196180803909585839292760080787927589025134212814168598499200652

9009051/694088449465345118728195712793933473742639989142752398651900848934608364
980590937890625,
70427564336440343369134768564412288785920097099818734632700894345767248149998986
1359676/694088449465345118728195712793933473742639989142752398651900848934608364
980590937890625,
70427570911737650231317888177566103321684860125513684289795457446896633554645736
1750301/694088449465345118728195712793933473742639989142752398651900848934608364
980590937890625,
85339637049946919167912422962477185470550195263935353725472003923426973192719211
04026926966286/84105203081018437932174083305764105113235898414788113480809959227
47114952089578387749281640625,
11815991296964771822572056424372913819168532993793003567497564970851052734088020
7460479678243089957151/116450726913249140967725114177236418290515124494330826794
525124668004836835354920113812901460312890625,
11815992036195491134637521245399984077492782577824377061857303400503260138174381
6235675662909902847776/116450726913249140967725114177236418290515124494330826794
525124668004836835354920113812901460312890625,
11815992688557674045595210221136767395927953842220578843760328053842427074933384
9377648009189817498401/116450726913249140967725114177236418290515124494330826794
525124668004836835354920113812901460312890625,
23810551004731369649626269495907517506784093420851424240373714506518572972114239
03559679842406025838508748146/23466126885668399427866858705243065105787834260153
24304766517924725050295654494073158777548687841756844140625,
2381055203998092276527764357864565569617706290692029942052505018343133632045553
49520288300744318941009138771/23466126885668399427866858705243065105787834260153
24304766517924725050295654494073158777548687841756844140625,
60506617634002134106527585212208288670177354999859339428312979044221410764841593
943347142485324244179023809377524676/5963137307241288380415351238897097979305116
9789988522344273532983894990822127689603501517417217403303402868281640625,
17182815692966154712843738421578395128242458330797302771745565465992822641549567
33755002102461094266556168586843874014135541/16934261036712915257753482458184836
26169197245028013444766564759598099068059570262133430535479837368404230773553286
344140625,
17182816228172429453400072493787223436306419194148530829981913441598475057738902
42798210387171985264437448378384994758535702/16934261036712915257753482458184836
26169197245028013444766564759598099068059570262133430535479837368404230773553286
344140625,
17182816709902048143086556737169821777793753439057028227977564732923387630195739
96291123336962887720923001602762674446426327/16934261036712915257753482458184836
26169197245028013444766564759598099068059570262133430535479837368404230773553286
344140625,
66927211959309931395203623267734272718546695943727226337914706019575691097151279
800603215689125306203693675594966767018221941323112/6595908390551120230356340197
78378485364639523988179709427467234780914861469447745352883521648130393661716293
72593160920471219140625]

Numerator Theta(4,n), n=1..40: A120269

[1, 82, 51331, 123296356, 9988505461, 146251554055126, 4177234784807204311,
4177316109293528392, 348897735816424941428857, 45469045689642442391390873722,
45469276109166591994111574347, 12724212507884764409110901655089452,
7952652881902074431185833362754480541, 644166078021050808054824782971269564446,
455607062681307551694798396892753062061321951,
420763139153615389741623991738752563981423641150096,
420763488821577189411424921096914428662610672790721,
60109109308403231537976272759342454095213484534478,
112654207650343298169046576180259252641621971638662057333,
112654255641589742470334517712107581679919211849546041708,
318334113100951437623530813850063562294117597685892728059324163,
1088321297933526829977651592609314954325149439278107500450498891772938,
1088321559498539659896469418743679396517296969586741569974819252137313,
5310663108355424241829116138016804412041095160321843272259462160807820871528,
89256330121162842522049580799773703911006523282468832935672951024332129731911721

,

89256343123775774157410101090626028485064430996548459586977236002012648294802346
,
70427556751292340196180803909585839292760080787927589025134212814168598499200652
9009051,
70427564336440343369134768564412288785920097099818734632700894345767248149998986
1359676,
70427570911737650231317888177566103321684860125513684289795457446896633554645736
1750301,
85339637049946919167912422962477185470550195263935353725472003923426973192719211
04026926966286,
11815991296964771822572056424372913819168532993793003567497564970851052734088020
7460479678243089957151,
11815992036195491134637521245399984077492782577824377061857303400503260138174381
6235675662909902847776,
11815992688557674045595210221136767395927953842220578843760328053842427074933384
9377648009189817498401,
23810551004731369649626269495907517506784093420851424240373714506518572972114239
03559679842406025838508748146,
23810552039980922765277764357864565569617706290692029942052505018343133632045553
49520288300744318941009138771,
60506617634002134106527585212208288670177354999859339428312979044221410764841593
943347142485324244179023809377524676,
17182815692966154712843738421578395128242458330797302771745565465992822641549567
33755002102461094266556168586843874014135541,
17182816228172429453400072493787223436306419194148530829981913441598475057738902
42798210387171985264437448378384994758535702,
17182816709902048143086556737169821777793753439057028227977564732923387630195739
96291123336962887720923001602762674446426327,
66927211959309931395203623267734272718546695943727226337914706019575691097151279
800603215689125306203693675594966767018221941323112].

Denominators Theta(4,n), n=1..40: A128493

[1, 81, 50625, 121550625, 9845600625, 144149438750625, 4117052120156600625,
4117052120156600625, 343860310127599440800625, 44812219476138886724578250625,
44812219476138886724578250625, 12540296310422182199892702233150625,
7837685194013863874932938895719140625, 634852500715122973869568050553250390625,
449019111558292892081441960363353489531640625,
414678578925426209987945360676724578005750281640625,
414678578925426209987945360676724578005750281640625,
59239796989346601426849337239532082572250040234375,
111024917165350815876745380730178687405690707655696484375,
111024917165350815876745380730178687405690707655696484375,
313729880954078886822687903797490457902191979755868553383984375,
1072580030735685852348292228190764174966471842581343166177719165234375,
1072580030735685852348292228190764174966471842581343166177719165234375,
5233848396960342275672766968350136320064568287279171202477258833930040234375,
87965290007712472627232194437060741131325199204301030400035289221862186219140625
,
87965290007712472627232194437060741131325199204301030400035289221862186219140625
,
69408844946534511872819571279393347374263998914275239865190084893460836498059093
7890625,
69408844946534511872819571279393347374263998914275239865190084893460836498059093
7890625,
69408844946534511872819571279393347374263998914275239865190084893460836498059093
7890625,
84105203081018437932174083305764105113235898414788113480809959227471149520895783
87749281640625,
11645072691324914096772511417723641829051512449433082679452512466800483683535492
0113812901460312890625,
11645072691324914096772511417723641829051512449433082679452512466800483683535492
0113812901460312890625,
11645072691324914096772511417723641829051512449433082679452512466800483683535492

0113812901460312890625,
23466126885668399427866858705243065105787834260153243047665179247250502956544940
73158777548687841756844140625,
23466126885668399427866858705243065105787834260153243047665179247250502956544940
73158777548687841756844140625,
59631373072412883804153512388970979793051169789988522344273532983894990822127689
603501517417217403303402868281640625,
16934261036712915257753482458184836261691972450280134447665647595980990680595702
62133430535479837368404230773553286344140625,
16934261036712915257753482458184836261691972450280134447665647595980990680595702
62133430535479837368404230773553286344140625,
16934261036712915257753482458184836261691972450280134447665647595980990680595702
62133430535479837368404230773553286344140625,
65959083905511202303563401977837848536463952398817970942746723478091486146944774
535288352164813039366171629372593160920471219140625]

The limit of the sequence $\Theta(4, n)$ is $(1 - 1/2^4) * \zeta(4) = (\pi^4)/96$
approximately 1.014678032
(Maple12 10 digits).

The values of $\Theta(4, 10^k)$, $k=0..4$ are

[1., 1.014657302, 1.014678011, 1.014678032, 1.014678032].

%%%

k=5: $\Theta(5, n)$, $n=1..40$:

[1, 244/243, 762743/759375, 12820180976/12762815625,
3115356499043/3101364196875, 501734380891571068/499477805270915625,
186290962962179367466549/185452612752454075153125,
186291207179611798681792/185452612752454075153125,
264507060005034822095008296869/263316190384861185784690603125,
654945930087597102815813733559637156/651996955695764397260286617707209375,
654946089730308117005814730177159031/651996955695764397260286617707209375,
4215458332009996232497953858159263996273008/419647604181374330795546494987347311
0315625,
13173308630403571606953964352496483947864545301/13113987630667947837360827968354
603469736328125,
3201114219274599944520158260700693226803242711268/318669899425231132447868119631
0168643145927734375,
65658533904258985629756024067493959488420748079909661307/65362857889259301170769
577341016119254693952502998046875,
1879748146946507931960416476957496098797999603006646262915007232/187128312830314
5811372439015902128971576640624995159036689453125,
1879748194762129160119433849606315951000045244317585059291960357/187128312830314
5811372439015902128971576640624995159036689453125,
1879748230390772050403640408729329284056585430223755107393994732/187128312830314
5811372439015902128971576640624995159036689453125,
130349182330326918563137684518828050414589617216903199540818589443487649/1297621
76783878826108540522103839547613464789704117433448354859853515625,
130349183768546134938545196959481827832325934426710622759033399511847024/1297621
76783878826108540522103839547613464789704117433448354859853515625,
15101761364636795271092041095062837605028895369918595383323181547912710547311449
/1503375283567059883727511854550737750005464698238295989719672376251573680664062
5,
22200864398065633689836027083523212889845243783962887264322889823617012399856707
60204532/22100885968187695959454255400154642112962660677947673642183304250285402
30942030341796875,
22200864517835375934752328918022725634336860511562870616170602155725216774043039
95338907/22100885968187695959454255400154642112962660677947673642183304250285402
30942030341796875,
50916574503498918867911003784244798369207088273450708203534147067823191814048207
2583159935084224/506872784708020890713490792092825419647991620392253395710024540

856483534465181565333616689453125,
85575487069614963701112917088972278845594741223342243876033738585044505749368611
23231138287817974643/85190108925877071102216397427041168280237951639326028216983
82458174918763756306568562095699638671875,
8557548731652474401129975353653531343848407533226188107483709233667625167805575
53891242549468365268/85190108925877071102216397427041168280237951639326028216983
82458174918763756306568562095699638671875,
35787283192239421294381369103206292194210065585860391255445914989426109286938848
02820728814919595600794008999/35626119600980862206987439714685412900250072343118
10655793346149399012032644019157298963912223574306630859375,
35787283263026676712316531916451666073908621497217806917551670921017392036358836
13421632443805280582020724624/35626119600980862206987439714685412900250072343118
10655793346149399012032644019157298963912223574306630859375,
35787283322236565203466851700359732047738508535680194901373944576083211683684046
42270811945769295892635958999/35626119600980862206987439714685412900250072343118
10655793346149399012032644019157298963912223574306630859375,
25585198477890487091237193528604079196742700650426752171166248020854603772616546
95267825155788903793989916556183676076/25469978581821402625746088239826228823236
83989460299980513788284723437948730590512574532508372736392442478190439453125,
21609164020247114262168585793626231222906165041337568849813731739600252052406960
13493077843468589389621485947093869680811248001/21511849696755582500336833492576
83374688541782191092349892317664774550499500884392466144143375864686305001434918
335673837890625,
21609164041922907891984152248777241812584576094048490460759413632858768075980575
1534668743235064062063958358455894098848357376/21511849696755582500336833492576
83374688541782191092349892317664774550499500884392466144143375864686305001434918
335673837890625,
21609164060462960903922934827785697984999856745726097372313080197150086596067303
42036883599773157389652350004992727433098848001/21511849696755582500336833492576
83374688541782191092349892317664774550499500884392466144143375864686305001434918
335673837890625,
29175074960824959256701351604455025557644449730693536829397539737600018408320138
80463578460556423439808084429597258094752753172764751732/29043688373600048376114
59485520648136823488565354719253345246825631730124015534986972982855452762650815
061496954271487902299180732421875,
29175074979394720273428931516994614209589354812154845603680421796028930536421799
53429891482312218729466797434597940786921905779629986107/29043688373600048376114
59485520648136823488565354719253345246825631730124015534986972982855452762650815
061496954271487902299180732421875,
52638526624493362905355272031645233121069260977477749648580723161907999975269686
47617558320105585233088687162288169148878810840367258034704048432/52401475024946
66081520583937723712885000401975825866203250299259144346606659698203464058311827
664768637098025674893723295769602260689224189453125,
10912343429501284368107862283679696921438854356791655534429709198685160701961975
561437285484895747819184105774440482368194544276081589921306660190664845301/1086
32009305515888876209448060671102643824091296656759405769596628810904368121649635
54473482745467743388485242983006831058462299519543411268363723642578125,
10912343434079028299336186160603090946711579011412061686190059883109360987883883
630283234835792776974052977778238757631081210529169600371803784656977110508/1086
32009305515888876209448060671102643824091296656759405769596628810904368121649635
54473482745467743388485242983006831058462299519543411268363723642578125,
10912343438092351970696653964471999436878684073414391534194145101558849519776857
332512630943328245116201361035304084559172509694793637345772057891283751133/1086
32009305515888876209448060671102643824091296656759405769596628810904368121649635
54473482745467743388485242983006831058462299519543411268363723642578125,
33577896215130932914943988456888229329639061679181548378649197433663122452788546
34393022675604805647499336428958018354662187193231276107881282974104147647216372
8192/334266819369765211862713201019346156624564737954737888836126774826331421046
90577362148894415157757608041628459837931017769153361836865679201607302093862608
388671875]

Numerator Theta(5,n), n=1..40: A164656

[1, 244, 762743, 12820180976, 3115356499043, 501734380891571068,
186290962962179367466549, 186291207179611798681792,
264507060005034822095008296869, 654945930087597102815813733559637156,
654946089730308117005814730177159031,
4215458332009996232497953858159263996273008,
13173308630403571606953964352496483947864545301,
3201114219274599944520158260700693226803242711268,
65658533904258985629756024067493959488420748079909661307,
1879748146946507931960416476957496098797999603006646262915007232,
1879748194762129160119433849606315951000045244317585059291960357,
1879748230390772050403640408729329284056585430223755107393994732,
130349182330326918563137684518828050414589617216903199540818589443487649,
130349183768546134938545196959481827832325934426710622759033399511847024,
15101761364636795271092041095062837605028895369918595383323181547912710547311449
,
22200864398065633689836027083523212889845243783962887264322889823617012399856707
60204532,
22200864517835375934752328918022725634336860511562870616170602155725216774043039
95338907,
50916574503498918867911003784244798369207088273450708203534147067823191814048207
2583159935084224,
85575487069614963701112917088972278845594741223342243876033738585044505749368611
23231138287817974643,
85575487316524744011299753536535351343848407533226188107483709233667625167805575
53891242549468365268,
35787283192239421294381369103206292194210065585860391255445914989426109286938848
02820728814919595600794008999,
35787283263026676712316531916451666073908621497217806917551670921017392036358836
13421632443805280582020724624,
35787283322236565203466851700359732047738508535680194901373944576083211683684046
42270811945769295892635958999,
25585198477890487091237193528604079196742700650426752171166248020854603772616546
95267825155788903793989916556183676076,
21609164020247114262168585793626231222906165041337568849813731739600252052406960
13493077843468589389621485947093869680811248001,
21609164041922907891984152248777241812584576094048490460759413632858768075980575
15346687432355064062063958358455894098848357376,
21609164060462960903922934827785697984999856745726097372313080197150086596067303
42036883599773157389652350004992727433098848001,
29175074960824959256701351604455025557644449730693536829397539737600018408320138
80463578460556423439808084429597258094752753172764751732,
29175074979394720273428931516994614209589354812154845603680421796028930536421799
53429891482312218729466797434597940786921905779629986107,
52638526624493362905355272031645233121069260977477749648580723161907999975269686
47617558320105585233088687162288169148878810840367258034704048432,
10912343429501284368107862283679696921438854356791655534429709198685160701961975
561437285484895747819184105774440482368194544276081589921306660190664845301,
10912343434079028299336186160603090946711579011412061686190059883109360987883883
63028323483579277697405297778238757631081210529169600371803784656977110508,
10912343438092351970696653964471999436878684073414391534194145101558849519776857
332512630943328245116201361035304084559172509694793637345772057891283751133,
33577896215130932914943988456888229329639061679181548378649197433663122452788546
34393022675604805647499336428958018354662187193231276107881282974104147647216372
8192]

Denominator Theta(5,n), n=1..40: A164657

[1, 243, 759375, 12762815625, 3101364196875, 499477805270915625,
185452612752454075153125, 185452612752454075153125,
263316190384861185784690603125, 651996955695764397260286617707209375,
651996955695764397260286617707209375,
4196476041813743307955464949873473110315625,
13113987630667947837360827968354603469736328125,
3186698994252311324478681196310168643145927734375,
65362857889259301170769577341016119254693952502998046875,
1871283128303145811372439015902128971576640624995159036689453125,
1871283128303145811372439015902128971576640624995159036689453125,
1871283128303145811372439015902128971576640624995159036689453125,
129762176783878826108540522103839547613464789704117433448354859853515625,
129762176783878826108540522103839547613464789704117433448354859853515625,
15033752835670598837275118545507377500054646982382959897196723762515736806640625
/
22100885968187695959454255400154642112962660677947673642183304250285402309420303
41796875,
22100885968187695959454255400154642112962660677947673642183304250285402309420303
41796875,
50687278470802089071349079209282541964799162039225339571002454085648353446518156
5333616689453125,
85190108925877071102216397427041168280237951639326028216983824581749187637563065
68562095699638671875,
85190108925877071102216397427041168280237951639326028216983824581749187637563065
68562095699638671875,
35626119600980862206987439714685412900250072343118106557933461493990120326440191
57298963912223574306630859375,
35626119600980862206987439714685412900250072343118106557933461493990120326440191
57298963912223574306630859375,
35626119600980862206987439714685412900250072343118106557933461493990120326440191
57298963912223574306630859375,
25469978581821402625746088239826228823236839894602999805137882847234379487305905
12574532508372736392442478190439453125,
21511849696755582500336833492576833746885417821910923498923176647745504995008843
92466144143375864686305001434918335673837890625,
21511849696755582500336833492576833746885417821910923498923176647745504995008843
92466144143375864686305001434918335673837890625,
21511849696755582500336833492576833746885417821910923498923176647745504995008843
92466144143375864686305001434918335673837890625,
29043688373600048376114594855206481368234885653547192533452468256317301240155349
86972982855452762650815061496954271487902299180732421875,
29043688373600048376114594855206481368234885653547192533452468256317301240155349
86972982855452762650815061496954271487902299180732421875,
52401475024946660815205839377237128850004019758258662032502992591443466066596982
03464058311827664768637098025674893723295769602260689224189453125,
10863200930551588887620944806067110264382409129665675940576959662881090436812164
963554473482745467743388485242983006831058462299519543411268363723642578125,
10863200930551588887620944806067110264382409129665675940576959662881090436812164
963554473482745467743388485242983006831058462299519543411268363723642578125,
10863200930551588887620944806067110264382409129665675940576959662881090436812164
963554473482745467743388485242983006831058462299519543411268363723642578125,
33426681936976521186271320101934615662456473795473788883612677482633142104690577
36214889441515775760804162845983793101776915336183686567920160730209386260838867
1875].

The limit of the sequence Theta(5,n) is $(1-1/2^5)*\zeta(5)$ approximately 1.004523763 (Maple12 10 digits).

The values of Theta(5,10^k), k=0..4 are

[1., 1.004522988, 1.004523763, 1.004523763, 1.004523763].

%%%

Note added Dec 02 2013.

On Nov 30 2013 Jean-François Alcover has send me (WL) an e-mail with a formula for Theta(k, n) allowing an extension to non-natural n values. He noticed (in Mathematica language)

theta[k_, n_] :=
If[OddQ[k], (PolyGamma[k - 1, n + 1/2] - PolyGamma[k - 1, 1/2])/(2^k*(k - 1)!),
(1 - 1/2^k)* Zeta[k] - PolyGamma[k - 1, n + 1/2]/(2^k*(k - 1)!).

With PolyGamma[k, n] = Psi(k, n) (in Maple) one can derive, using the recursion in n, eq. 6.4.6, p. 260, of the Abromowitz-Stegun handbook, and the formula for Psi(k, 1/2) , eq. 6.4.4, p. 260, for example:

Psi(k-1, 1 + 1/2) = Psi(k-1, 1/2) - (-1)^k*(k-1)!2^k/1^k, or 1/1^k = (Psi(k-1, 1 + 1/2) - Psi(k-1, 1/2))/((-1)^k*(k-1)!*2^k), etc.

Then a telescopic summation leads to the formula

$$\text{Theta}(k, n) = (-1)^k * (\text{Psi}(k-1, 1/2) - \text{Psi}(k-1, n+1/2)) / (2^k * (k-1)!), k \geq 1.$$

Here, n could be taken any complex number, not a negative half-integer.

For k=1 this becomes

Theta(1, n) = (1/2)*gamma + ln(2) + (1/2)*Psi(n+1/2), with the Euler-Mascheroni constant gamma and Psi(z) = Psi(0, z) the digamma function.

For k =2, 3, ... this becomes

Theta(k, n) = (1-1/2^k)*Zeta(k) - (-1)^k*Psi(k-1, n+1/2)/(2^k*(k-1)!), with the Euler (or Riemann) Zeta function.

A similar derivation leads to an alternating sum formula:

$$\text{Theta}(k, n) = (-1)^k * \sum_{j=1..2*n} ((-1)^{j+1} * \text{Psi}(k-1, j)) / (k-1)!, k=1, 2, \dots$$

For the analog formulas for Zeta(k, n) := sum(1/j^k, j=1..n), see the note added on Dec 03 2013 to the file found as a link under A103345.

e.o.f.