22 (1915)

de l'équation proposée à celle de l'équation

$$p^2 - 6q^2 = 1,$$

dont la solution s'obtient en développant $\sqrt{6}$ en fraction continue; parmi les réduites

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{22}{9}, \quad \frac{49}{20}, \quad \ldots$$

du développement, celles de rang $4h+2$ seules fournissent les solutions de l'équation en x, y; celles-ci sont toutes données par les formules de récurrence mentionnées ci-dessus.

La Rédaction.

4511 (**1915**, 121) (T. Ono). — *Théorème relatif au triangle.* — La question 1529 (*N. A.*, 1885, p. 152) était déjà une réédition, celle de la question 545 (*N. C.*, 1880, p. 143). (*Voir* la note à la page 73 du Volume cité de Laisant.)

Sa réimpression, sur ma demande, au *Progreso matematico*, 1892, p. 31, n° 45, a déterminé E. Cesaro à en adresser la solution, insérée, même année (p. 255-256), après une autre réponse de B. Sollertinsky (p. 253-254).

Quant à la question 1529 (*N. A.*) la solution en a été donnée dans ce journal (1898, p. 94-98), par F. Ferrari, avec généralisation (par extension au tétraèdre).

Le lecteur pourra utilement comparer le théorème de Cesaro avec une proposition presque identique, énoncée antérieurement dans le même journal par Harkema (*N. A.*, 1872, p. 477). Les divisions sont alors $\frac{M}{N}, \frac{N}{P}, \frac{P}{Q}$ au lieu de $\frac{l}{m}, \frac{l'}{m'}, \frac{l''}{m''}$ de l'énoncé 4511.

Voir aussi *Mathesis*, t. I, 1881, p. 202, pour une relation encore analogue.

H. Brocard.

Autre réponse de M. C.-A. Laisant.

Triangle formé par des droites issues des sommets d'un triangle et divisant les côtés en segments de rapports donnés. — Comme dans toutes les questions analogues, il est indispensable, pour obtenir une démonstration applicable à tous les cas possibles, de tenir compte des *signes* des segments et des aires. Or, l'énoncé de la question nous paraît défectueux sous ce rapport; la première relation est exacte, en grandeur et en signe, si l'on pose

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{l}{m}, \qquad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{l'}{m'}, \qquad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{l''}{m''};$$

la seconde est alors exacte si l'on change le signe de l'un des membres. Au moyen des théorèmes de Menelaüs et de Céva, on obtient aisément

$$\frac{\overline{B_2A}}{\overline{B_2A_1}} = -\frac{l''(l+m)}{mm''}, \qquad \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2A_1}} = -\frac{m'(l+m)}{ll'},$$

$$\frac{\overline{B_2A}}{\overline{AA_1}} = -\frac{l''(l+m)}{l''l + l''m + m''m}, \qquad \frac{\overline{C_2A}}{\overline{AA_1}} = -\frac{m'(l+m)}{ll' + lm' + mm'}.$$

On déduit de là

$$\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{B_2A} + \overline{AC_2}}{\overline{AA_1}}$$

$$= (l+m)\frac{mm'm'' - ll'l''}{(l''l + l''m + m''m)(ll' + lm' + mm')}$$

et, en grandeur et en signe,

$$\frac{\overline{B_2C_2}.\overline{C_2A_2}.\overline{A_2B_2}}{\overline{AA_1}.\overline{BB_1}.\overline{CC_1}}$$

$$= \frac{(mm'm'' - ll'l'')^3(l+m)(l'+m')(l''+m'')}{(l'l'' + l'm'' + m'm'')^2(l''l + l''m + m''m)^2(ll' + lm' + mm')^2}.$$

Appelons A_3 le point où AA_2 rencontre BC; on a successivement

$$\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}} = -\frac{m'm''}{l'l''}, \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{BA_3}} = \frac{l'l'' + m'm''}{m'm''},$$

$$\frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{A_2A}} = -\frac{l'm'}{l'l'' + m'm''}, \qquad \frac{\overline{AA_3}}{\overline{AA_2}} = \frac{l'l'' + l'm'' + m'm''}{l'l'' + m'm''},$$

$$\frac{\overline{A_1A_3}}{\overline{BC}} = 1 - \frac{l}{l+m} - \frac{l'l''}{l'l'' + m'm''} = \frac{mm'm'' - ll'l''}{(l+m)(l'l'' + m'm'')}.$$

Or on a, en tenant compte des signes des aires,

$$-\overline{A_2B_2C_2} = \overline{A_2AB_2} + \overline{C_2AA_2},$$

$$\frac{\overline{A_2AB_2}}{\overline{A_3AA_1}} = \frac{\overline{A_2A}}{\overline{A_3A}}.\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AA_1}},$$

$$\frac{\overline{C_2AA_2}}{\overline{A_3AA_1}} = -\frac{\overline{C_2AA_2}}{\overline{A_1AA_3}} = -\frac{\overline{C_2A}}{\overline{A_1A}}.\frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_3}},$$

$$\frac{\overline{A_2B_2C_2}}{\overline{A_3AA_1}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_3}}.\frac{\overline{B_2A} + \overline{AC_2}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_3}}.\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AA_1}}.$$