
Clifford-Algebren in der Quantenmechanik

Diplomarbeit

vorgelegt von

Thomas Spernat



Universität Dortmund
Institut für Physik
März 2004

„Wer über die Quantentheorie nicht entsetzt ist,
der hat sie nicht verstanden. “

(Niels Bohr)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I. Bosonische Deformationsquantisierung	
1. Einführung in die Deformationsquantisierung	3
1.1. Klassische Mechanik	3
1.1.1. Bewegungsgleichungen	3
1.1.2. Die Poisson-Klammer	4
1.2. Quantenmechanik	5
1.2.1. Korrespondenzprinzip	5
1.2.2. Erwartungswerte	6
1.2.3. Zeitentwicklung und Heisenberg-Darstellung	6
1.2.4. Der Spezialfall eines zeitunabhängigen Hamilton-Operators	7
1.2.5. Die Dichtematrix	7
1.3. Wigner-Funktionen	8
1.3.1. Abbildungsvorschrift von Operatoren zu Funktionen auf dem Phasenraum	8
1.3.2. Definition der Wigner-Funktionen	8
1.3.3. Produkte von Funktionen auf dem Phasenraum und Erwartungswerte	9
1.3.4. Eigenschaften der Wigner-Funktionen	9
1.4. Das Moyal-Produkt	10
1.4.1. Definition des Moyal-Produkts	10
1.4.2. Einige elementare Eigenschaften	11
1.4.3. Integraldarstellung des Moyal-Produkts	12
1.4.4. Assoziativität	12
1.4.5. Spureigenschaft des Phasenraumintegrals	13
1.5. Sternprodukte und c -Äquivalenz	13
1.5.1. Definition des Sternprodukts	13
1.5.2. Zwei Beispiele	14
1.5.3. c -Äquivalenz	15
1.6. Bewegungsgleichungen	15
1.6.1. Die Zeitabhängigkeit der Wigner-Funktion	15
1.6.2. Eine Bewegungsgleichung für die Observablen	16
1.6.3. Die Sterneigenwertgleichung	17
1.7. Das Sternexponential	17
1.7.1. Definition des Sternexponentials und Spektraltheorie	17
1.7.2. Die Projektoren	18
1.7.3. Die Unschärferelation	19
1.8. Interpretation	20

2. Der harmonische Oszillator	23
2.1. Bestimmung der Wigner-Funktionen	23
2.1.1. Wigner-Funktionen aus den Ortsraumzuständen	23
2.1.2. Lösung der Sterneigenwertgleichung als Differentialgleichung	24
2.1.3. Lösung der Sterneigenwertgleichung mit algebraischen Methoden	26
2.1.4. Herleitung und Entwicklung des Sternexponentials	28
2.2. Projektoreigenschaft der Wigner-Funktionen	31
2.2.1. Projektoreigenschaft mit algebraischen Methoden	32
2.2.2. Projektoreigenschaft mit der Reihendarstellung des Moyal-Produkts	34
2.2.3. Projektoreigenschaft mit der Integraldarstellung des Moyal-Produkts	36
3. Landau-Niveaus	37
3.1. Klassische Betrachtung	37
3.2. Quantenmechanische Betrachtung	38
3.2.1. Koordinatentransformation	38
3.2.2. Erhaltungsgrößen	39
3.2.3. Lösung der Sterneigenwertgleichung	39
3.2.4. Der Drehimpuls als weitere Observable	40
3.2.5. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	42
II. Fermionische Deformationsquantisierung und Supersymmetrie	
4. Deformationsquantisierung der Grassmann-Algebra	43
4.1. Grassmann-Algebra	43
4.1.1. Grundlagen	43
4.1.2. Involution und Hodge-Dual	44
4.1.3. Differentiation	45
4.1.4. Integration	45
4.2. Grassmann-Mechanik	46
4.2.1. Hamilton-Formalismus	46
4.2.2. Diskussion der Zwangsbedingungen	47
4.2.3. Die Dirac-Klammer	48
4.3. Das Grassmann-Moyal-Produkt	48
4.3.1. Definition	48
4.3.2. Elementare Eigenschaften des Grassmann-Moyal-Produkts	49
4.3.3. Eine graduierte Lie-Algebra	50
4.4. Zeitentwicklung und Spektraltheorie	51
4.4.1. Zeitentwicklung von Observablen	51
4.4.2. Spektraltheorie	51
4.4.3. Definition der Spur und Normierung	52
4.5. Vereinigung mit der bosonischen Theorie	53
4.5.1. Das Super-Moyal-Produkt	53
4.5.2. Die Super-Moyal-Klammer	54
4.5.3. Bewegungsgleichung und Spektraltheorie.	54
4.5.4. Ein Spezialfall	55
4.5.5. Definition der Super-Spur	56

5. Der supersymmetrische Oszillator	57
5.1. Der fermionische Oszillator	57
5.1.1. Bestimmung der Projektoren und Energieniveaus	57
5.1.2. Holomorphe Koordinaten	59
5.2. Kombiniertes bosonischer und fermionischer Oszillator	61
5.2.1. Bestimmung der Projektoren und Energieniveaus	61
5.2.2. Supersymmetrie	62
5.2.3. Die SUSY-Algebra	63
6. Landau-Niveaus mit Spin	65
6.1. Fermionisches Teilchen im Magnetfeld	65
6.1.1. Hamilton-Operator	65
6.1.2. Diskussion der Algebra mit zwei Generatoren	66
6.1.3. Hamilton-Funktion im Sternproduktformalismus	66
6.1.4. Supersymmetrie	67
6.2. Das Sterneigenwertproblem	68
6.2.1. Lösung des Sterneigenwertproblems	68
6.2.2. Die SUSY-Algebra	69
6.3. Diskussion des Spin-Beitrags	69
6.3.1. Erwartungswerte	70
6.3.2. Zeitentwicklung	70
III. Gruppen und ihre Anwendungen	
7. Lorentz-Transformationen	71
7.1. Diskussion der Algebra mit drei Generatoren	71
7.1.1. Eine Multiplikationstabelle	71
7.1.2. Die gerade Unteralgebra und deren Pauli-Abbildung	72
7.1.3. Pauli-Abbildung der gesamten Algebra	73
7.2. Rotationen	74
7.2.1. Die Lie-Gruppe zur geraden Unteralgebra	74
7.2.2. Diskussion der Rotationen	74
7.2.3. Der Spin in drei Dimensionen	75
7.3. Lorentz-Boosts	76
7.3.1. Lie-Gruppe zur gesamten Algebra	76
7.3.2. Diskussion der Lorentz-Boosts	76
7.3.3. Der Spin in vier Dimensionen	77
7.4. Eigentliche Lorentz-Transformationen	78
7.5. Hinzunahme der Raumspiegelung	78
7.5.1. Die Parität	78
7.5.2. Basis von Cl_4^*	79
7.5.3. Dirac-Abbildung und Definition einer Spur	80
7.5.4. Alternative Darstellung der Lorentz-Transformation	81
7.5.5. Der Viererspin in anderer Darstellung	81
7.6. Die konforme Gruppe	82
8. Dirac-Theorie	83
8.1. Bestimmung der Projektoren	83
8.1.1. Energieprojektoren	83
8.1.2. Spin-Projektoren	84
8.2. Nicht-relativistische Näherung der Dirac-Gleichung	85

8.2.1.	Die Rolle der Parität in der nicht-relativistischen Näherung	85
8.2.2.	Eine unitäre Transformation	86
8.2.3.	Die Foldy-Wouthuysen-Transformation	87
8.2.4.	Anwendung auf ein Teilchen im elektromagnetischen Feld	88
8.2.5.	Operatorarstellung	89
8.3.	Kovariante Projektoren	90
8.3.1.	Energieprojektoren	90
8.3.2.	Spin-Projektoren	91
Fazit		93
Anhang		
A. Anhang zur bosonischen Deformationsquantisierung		95
A.1.	Ein Beispiel für den Weyl-Isomorphismus	95
A.2.	Assoziativität des Moyal-Produkts	95
A.3.	Umformung eines Integrals	97
A.4.	Die Unschärferelation	98
A.5.	Koordinatentransformation im Moyal-Produkt	99
B. Anhang zur fermionischen Deformationsquantisierung		101
B.1.	Zwei Beispiele für das Grassmann-Moyal-Produkt	101
B.2.	Die Assoziativität des Grassmann-Moyal-Produkts	101
B.3.	Integralregel	102
B.4.	Die Spur	102
C. Anhang zu Gruppen und deren Anwendungen		105
C.1.	Herleitung einer Multiplikationstabelle	105
C.2.	Zwei Matrixgruppen	106
C.2.1.	Die $SU(2)$	106
C.2.2.	Die $SL(2, \mathbb{C})$	107
C.3.	Eine zu Cl_4^* äquivalente Algebra	107
C.4.	Berechnung einiger Transformationen	108
C.4.1.	Bestimmung einiger Produktregeln	108
C.4.2.	Berechnung der Rotationen	109
C.4.3.	Berechnung der Lorentz-Booster	109
C.4.4.	Zeitentwicklung des Spins	110
C.5.	Kommutatoren von (un)geraden Operatoren	111
Literaturverzeichnis		113

Einleitung

Die Quantenmechanik ist seit ihrer Entdeckung Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts ein etablierter Teil der Physik geworden. Bis auf die Gravitation konnten alle fundamentalen physikalischen Theorien erfolgreich quantisiert werden.

Die erste konsistente Behandlung der Quantenmechanik gelang im Operatorformalismus, der auf Dirac [Dir1930] und von Neumann [vN1931] zurückgeht. Physikalische Zustände werden durch Vektoren auf einem Hilbert-Raum repräsentiert und klassische Observablen entsprechen gemäß dem Korrespondenzprinzip [Wey1927] linearen Operatoren, die auf die Zustände einwirken. Dieser abrupte Wechsel von der klassischen zur quantisierten Theorie widerspricht allerdings der anschaulichen Vorstellung, daß sich die klassische Physik als Grenzfall der Quantenmechanik ergibt, wenn das Plancksche Wirkungsquantum $h = 2\pi\hbar$ gegen Null strebt.

In der klassischen Theorie sind alle Observablen Funktionen auf dem Phasenraum, der als symplektische Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann. Die Deformationsquantisierung erlaubt einen stetigen Übergang zur Quantenmechanik, da sie auch die quantisierte Theorie auf dieser Mannigfaltigkeit formuliert:

- Dem quantenmechanischen Operatorprodukt entspricht das (notwendigerweise nicht-kommutative) Sternprodukt, das im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ zur gewöhnlichen punktweisen Multiplikation der klassischen Physik wird. Den Übergang zum Sternprodukt für $\hbar \neq 0$ nennt man eine Deformation, deren mathematisches Fundament von Gerstenhaber [Ger1964] gelegt wurde.
- Die quantenmechanischen Zustände werden durch Wigner-Funktionen [Wig1932] beschrieben, die in gewisser Hinsicht den Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen der statistischen Mechanik entsprechen. Erwartungsgemäß gehen sie im klassischen Grenzübergang zu δ -Funktionen über.

Groenewold [Gro1946] und Moyal [Moy1949] haben in den vierziger Jahren des letzten Jahrhunderts die ersten Ansätze zur Deformationsquantisierung geliefert. Im Jahr 1978 gelang es Bayen, Flato, Frönsdal, Lichnerowicz und Sternheimer [BFF⁺1978a, BFF⁺1978b] diese Theorie zu einer eigenständigen Formulierung der Quantenmechanik zu vervollständigen.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die von Bayen et. al. diskutierte Deformationsquantisierung so zu erweitern, daß auch fermionische Freiheitsgrade beschrieben werden können. Dies wird erreicht, indem man das herkömmliche Sternprodukt, das aus der Deformation eines kommutativen Produkts resultiert, auf Grassmann-Variablen erweitert. Während kommutative Variablen bosonischen Freiheitsgraden entsprechen, nehmen Grassmann-Variablen die Rolle der fermionischen Freiheitsgrade ein.

Obwohl bereits in [BFF⁺1978b, siehe S. 123] die Möglichkeit zur Deformation einer Grassmann-Algebra erwähnt wurde und es einige abstrakte Diskussion neueren Datums gibt (siehe [Bor1996, DF1998, BHW2000]), wurde die systematische Ausarbeitung physikalischer Anwendungen vernachlässigt. In der vorliegenden Arbeit werden einige der in [HH2002a] behandelten Systeme wieder aufgegriffen und weitergeführt. Darüber hinaus werden mögliche Darstellungen der Lorentz-Gruppe in diesem Zusammenhang betrachtet, wobei die Ergebnisse verwendet werden, um die Dirac-Theorie aus einem neuen Blickwinkel zu betrachten.

Es wird gezeigt, daß man die bosonische und die fermionische Quantenmechanik im Rahmen der Deformationsquantisierung auf sehr ähnliche Weise formulieren kann. Beide Arten von Systemen

kann man mit einer vereinheitlichten Theorie beschreiben, wobei auch ausführlich auf den Aspekt der Supersymmetrie eingegangen wird. Als physikalisches Beispiel dient das System eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld.

In Zusammenarbeit mit P. Henselder und PD Dr. A. C. Hirshfeld ist ein Artikel [HHS2004] in Vorbereitung, in den einige Aspekte dieser Arbeit eingehen werden.

Zum Verständnis dieser Arbeit werden keine Vorkenntnisse in der Deformationsquantisierung verlangt. Der Formalismus wird ausführlich hergeleitet und dessen Methoden an einigen Beispielen veranschaulicht, so daß diese Arbeit auch eine Einführung in dieses Thema bietet. Grundkenntnisse zum Hamilton- und Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik sowie der Hilbert-Raumdarstellung der Quantenmechanik werden aber vorausgesetzt.

Diese Diplomarbeit ist in drei Teile gegliedert:

I. Bosonische Deformationsquantisierung

Der erste Teil dient zur Einführung in die Deformationsquantisierung, wobei die Definitionen des Moyal-Produkts und der Wigner-Funktionen durch eine Diskussion der klassischen und der Quantenmechanik motiviert werden. Es wird eine Bewegungsgleichung für die Wigner-Funktionen hergeleitet, die eine autonome Formulierung der Quantenmechanik ermöglicht. Basierend auf dieser Gleichung wird die Spektraltheorie entwickelt.

Als Anwendungsbeispiel dient der harmonische Oszillator, an dem die Methoden der Deformationsquantisierung demonstriert werden. Die Ergebnisse für den harmonischen Oszillator lassen sich auf das System eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld übertragen.

II. Fermionische Deformationsquantisierung und Supersymmetrie

Basierend auf der Diskussion des ersten Teils wird hier die Deformationsquantisierung auf eine Grassmann-Algebra übertragen, wobei diese durch Deformation des antikommutativen Produkts zu einer Clifford-Algebra wird. Es wird gezeigt, wie man die bosonische und die fermionische Theorie in einem Formalismus vereinen kann. Auf dieser Basis läßt sich die Supersymmetrie quantenmechanischer Systeme behandeln.

Die Resultate werden auf den fermionischen Oszillator angewendet, der sich mit dem bosonischen Oszillator auf diese Weise zu einem supersymmetrischen vereinen läßt. Es wird nochmals das geladene Teilchen im homogenen Magnetfeld aufgegriffen, das jetzt im Rahmen der Deformationsquantisierung auf ein Teilchen mit Spin erweitert werden kann.

III. Gruppen und ihre Anwendungen

In diesem Teil wird eingehend die deformierte Grassmann-Algebra mit drei und vier Generatoren studiert. Es wird gezeigt, wie damit die Rotations- und die Lorentz-Gruppe dargestellt werden können.

Darauf aufbauend kann die Dirac-Theorie im Rahmen der Deformationsquantisierung formuliert werden, wobei die zugehörigen Projektoren für ein freies Fermion bestimmt werden. Für den Fall eines freien Teilchens im elektromagnetischen Feld wird die nicht-relativistische Näherung der Hamilton-Funktion bestimmt.

I. Bosonische Deformationsquantisierung

Kapitelverzeichnis

1. Einführung in die Deformationsquantisierung	3
2. Der harmonische Oszillator	23
3. Landau-Niveaus	37

1. Einführung in die Deformationsquantisierung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Deformationsquantisierung präsentiert, auf die der Rest dieser Arbeit basiert. Dabei wird in groben Zügen der historischen Entwicklung gefolgt. Der Aufbau dieses Kapitels wird im folgenden kurz zusammengefaßt.

Eine kurze Wiederholung der klassischen Mechanik und der herkömmlichen Formulierung der Quantenmechanik in den ersten beiden Abschnitten dient als Motivation der Deformationsquantisierung, die einen stetigen Übergang zwischen klassischer und quantenmechanischer Physik erlaubt. Die im dritten Abschnitt definierte Wigner-Funktion entspricht in vieler Hinsicht der Dichtematrix der Quantenmechanik.

Der vierte Abschnitt beantwortet die Frage, welches Produkt auf dem Phasenraum dem Operatorprodukt entspricht. Es handelt sich dabei um das Moyal-Produkt, daß in dem darauffolgenden Abschnitt als ein Sternprodukt klassifiziert wird.

Mit Hilfe des Moyal-Produkts wird im sechsten Abschnitt eine Bewegungsgleichung für die Wigner-Funktion hergeleitet, die als Ersatz für die Schrödinger-Gleichung dienen kann. Damit ist der Grundstein einer autonomen Theorie gelegt, die keinen Bezug mehr auf den Operatorformalismus der Quantenmechanik nimmt.

Im siebten Abschnitt wird das Sternexponential diskutiert, welches von Bayen et al. [BFF⁺1978b] in den Mittelpunkt der Spektraltheorie gestellt wird. In diesem Zugang werden physikalische Zustände durch sogenannte Projektoren beschrieben, die gerade den Wigner-Funktionen entsprechen.

Der letzte Abschnitt dient schließlich der Interpretation der hier eingeführten Formulierung der Quantenmechanik. Es wird gezeigt, wie man im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ die klassische Mechanik zurückgewinnt, wodurch der stetige Übergang zwischen der klassischen und quantisierten Physik verdeutlicht wird.

Die hier diskutierten Grundlagen kommen in Kapitel 2 erstmalig zur Anwendung. Anhand des harmonischen Oszillators werden dort die verschiedenen Rechentechniken demonstriert, um dem Leser einen Einstieg in diesen Formalismus zu bieten.

1.1. Klassische Mechanik

Um die Relevanz der Poisson-Klammer darzustellen, beginnt dieses Kapitel mit einer kurzen Einführung in die klassische Mechanik. Es wird ein eindimensionales System betrachtet, wobei die Verallgemeinerung auf mehr als einer Raumkoordinate offensichtlich ist.

1.1.1. Bewegungsgleichungen

Im Lagrange-Formalismus bestimmt die Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q})$ die Bewegungsgleichungen für das physikalische System mit der generalisierten Koordinaten q und der generalisierten Geschwindigkeit \dot{q} . Aus dem Hamilton-Prinzip $\delta S = 0$ für die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L[q(t), \dot{q}(t)] dt \quad (1.1)$$

ergibt sich die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. Im folgenden stellt q die gewöhnliche Ortskoordinate eines flachen Raums dar.

Im Hamilton-Formalismus wird die Geschwindigkeit \dot{q} durch den kanonischen Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ersetzt. Der Wechsel von der Lagrange-Funktion zur q - und p -abhängigen Hamilton-Funktion H wird durch die Legendre-Transformation $H(q, p) = \dot{q}p - L(q, p)$ vollzogen. Für $\frac{\partial p}{\partial \dot{q}} \neq 0$ kann man \dot{q} als Funktion von q und p angeben, so daß wiederum das Hamilton-Prinzip angewendet werden kann. Die Variation der Wirkung $S = \int L(q, p) dt$ mit den Randbedingungen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ liefert in diesem Fall

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \dot{q} p + \dot{q} \delta p - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(- \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p \right) dt. \quad (1.2)$$

Da die Variationen δq und δp unabhängig voneinander sind, liest man die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q} \quad (1.3)$$

ab. Für die Zeitableitung einer dynamischen Größen $f(q, p; t)$ folgt daraus

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.4)$$

was man mit der Definition der *Poisson-Klammer*

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} \quad (1.5)$$

auch in der Form

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.6)$$

angeben kann. Hierbei handelt es sich um die *Liouville-Gleichung*.

Die elementare Poisson-Klammer zwischen Ort und Impuls lautet

$$\{q, p\} = 1. \quad (1.7)$$

Mit den Abkürzungen $\partial_q = \frac{\partial}{\partial q}$ und $\partial_p = \frac{\partial}{\partial p}$ kann man die Poisson-Klammer (1.5) auch als

$$\{f, g\} = (\partial_q f) (\partial_p g) - (\partial_p f) (\partial_q g) = f(\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q) g \quad (1.8)$$

schreiben, wobei der Pfeil andeutet, in welche Richtung die Ableitung wirkt.

1.1.2. Die Poisson-Klammer

Im letzten Unterabschnitt wurde gezeigt, daß der Vektorraum der Funktionen f, g, h, \dots auf dem Phasenraum neben dem kommutativen Produkt $(fg)(q, p) = f(q, p)g(q, p)$ noch die Poisson-Klammer (1.5) als wichtige Verknüpfung besitzt. Wie man an Gleichung (1.6) sehen kann, bestimmt die Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion die Dynamik von Phasenraumfunktionen.

Aus Gleichung (1.5) folgt, daß die Poisson-Klammer die Eigenschaften

$$\{f, g\} = - \{g, f\}, \quad (1.9a)$$

$$\{f, gh\} = g \{f, h\} + \{f, g\} h \quad (1.9b)$$

$$\text{und} \quad \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (1.9c)$$

besitzt. Die erste Gleichung zeigt die Antisymmetrie der Poisson-Klammer auf, die zweite wird Leibnitz-Regel genannt und bei der dritten Gleichung handelt es sich um die Jacobi-Identität. Diese Gleichungen dienen auch zur allgemeinen Definition von Poisson-Mannigfaltigkeiten.

Nun sei ein Phasenraum mit $2n$ Koordinaten betrachtet, wobei man die Koordinaten q_i und p_i zu einem Vektor $x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = (x_1, \dots, x_{2n})$ zusammenfassen kann. In diesem Fall läßt sich die Poisson-Klammer (1.8) auch zu

$$\{f, g\} = f \left(\sum_{i=1}^n \bar{\partial}_{q_i} \bar{\partial}_{p_i} - \bar{\partial}_{p_i} \bar{\partial}_{q_i} \right) g = f(\bar{\partial}_i \alpha^{ij} \bar{\partial}_j) g \quad \text{mit} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

verallgemeinern, wobei ∂_i für eine Ableitung nach x_i steht und über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Die Matrix α nennt man den *Poisson-Tensor*, in dem I eine $n \times n$ -Einheitsmatrix repräsentiert.

Die Poisson-Klammer aus Gleichung (1.10) kann man auch in nicht-kanonischen Koordinaten darstellen, wobei die Einträge des Poisson-Tensors α dann von x abhängen können. Ein Phasenraum mit gerader Dimension bildet zusammen mit einem invertierbaren Poisson-Tensor eine *symplektische Mannigfaltigkeit*, die im allgemeinen auch gekrümmt sein kann. Für eine flache Mannigfaltigkeit besagt das *Theorem von Darboux*, daß es immer kanonische Koordinaten gibt, in denen die α^{ij} konstant sind. Nur dieser Fall wird hier betrachtet.

Die vorangegangene Diskussion basiert zum Teil auf dem zweiten Kapitel von [HH2002b], wo eine Einführung zur Rolle der Poisson-Mannigfaltigkeiten in der klassischen Mechanik gegeben wird. Mehr zu diesem Thema kann in [MR1994] gefunden werden.

1.2. Quantenmechanik

In diesem Abschnitt werden einige wesentliche Elemente der Quantenmechanik angegeben, auf die später zurückgegriffen wird. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf dem Verhältnis zur klassischen Mechanik, da dies auch ein wichtiger Aspekt der Deformationsquantisierung ist. Es wird gezeigt, wie man die quantenmechanische Bewegungsgleichung formal mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperators lösen kann. Außerdem wird die Rolle der Dichtematrix in der Quantenmechanik diskutiert, um später die Analogie zu den Wigner-Funktionen herausstellen zu können, die in Abschnitt 1.3 eingeführt werden.

1.2.1. Korrespondenzprinzip

Im Operatorformalismus der Quantenmechanik entsprechen physikalische Größen Operatoren¹, die auf Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ eines Hilbert-Raums wirken. Die Zeitentwicklung der Zustände wird durch die *Schrödinger-Gleichung*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle \quad (1.11)$$

beschrieben, wobei man den Hamilton-Operator \hat{H} aus der Hamilton-Funktion H durch Ersetzen der kanonischen Variablen q und p mit den entsprechenden Operatoren \hat{p} bzw. \hat{q} erhält, die die kanonischen Kommutatorrelationen

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar \quad (1.12)$$

erfüllen. Dies nennt man das *Korrespondenzprinzip*.

Bei der Abbildung $H \mapsto \hat{H}$ ist die Ordnung der Operatoren dadurch festgelegt, daß der Hamilton-Operator hermitesch sein muß, denn nur dann ist der Erwartungswert $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$ eine reelle Zahl. Diese Bedingung wird erfüllt durch die Weyl-Ordnung der Operatoren [Weyl1927], die einer totalen Symmetrisierung wie in

$$p^2 q \mapsto \frac{1}{3} (\hat{p}^2 \hat{q} + \hat{p} \hat{q} \hat{p} + \hat{q} \hat{p}^2) \quad \text{bzw.} \quad qp^2 \mapsto \frac{1}{2} (\hat{q} \hat{p}^2 + \hat{p}^2 \hat{q}) \quad (1.13)$$

¹Im folgenden werden Operatoren mit $\hat{}$ gekennzeichnet.

entspricht. Bezeichnet man die Abbildung von Phasenraumfunktionen auf entsprechende Operatoren mit ϱ , so muß daher die Gleichung

$$(\varrho(f))^\dagger = \varrho(\bar{f}) \quad (1.14)$$

gelten, wobei \bar{f} die komplex konjugierte Größe zu f ist und $[\varrho(f)]^\dagger$ der hermitesch adjungierte Operator zu $\hat{f} = \varrho(f)$. Basierend auf der Darstellung von $f(q, p)$ als Fourier-Integral

$$f(q, p) = \int d\sigma d\tau \tilde{f}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma q + \tau p)/\hbar} \quad (1.15)$$

wird die *Weyl-Abbildung*

$$\varrho_{\text{Weyl}}(f) = \int d\sigma d\tau \tilde{f}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma \hat{q} + \tau \hat{p})/\hbar} \quad (1.16)$$

definiert, indem man q und p in (1.15) durch die entsprechenden Operatoren ersetzt. Aus dieser Definition folgt

$$\varrho_{\text{Weyl}}(q^n p^m) = \frac{1}{2^m} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \hat{p}^{m-r} \hat{q}^n \hat{p}^r = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \hat{q}^{n-r} \hat{p}^m \hat{q}^r, \quad (1.17)$$

so daß die Bedingung (1.14) für $f = q^n p^m$ erfüllt ist [HOSW1984, S. 134]. Mehr zu diesem Thema kann in [AW1970c, AW1970b, AW1970a] gefunden werden.

1.2.2. Erwartungswerte

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik ist das Ergebnis der Messung in der Quantenmechanik nicht mehr eindeutig bestimmt, sondern kann im gewissen Maß um den Erwartungswert $\langle \hat{f} \rangle = \langle \psi | \hat{f} | \psi \rangle$ variieren, wobei dieser aber im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ mit der klassischen Vorhersage übereinstimmen muß.

Für die Zeitentwicklung des Erwartungswerts folgt aus der Schrödinger-Gleichung (1.11)

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{f} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{f}, \hat{H}] \rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right\rangle. \quad (1.18)$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit (1.6) zeigt, daß die Poisson-Klammer der klassischen Mechanik in der Quantenmechanik der Kommutator-Klammer multipliziert mit $1/i\hbar$ entspricht. Die Ähnlichkeit dieser beiden mathematischen Strukturen wird auch durch die Gegenüberstellung von (1.7) mit (1.12) klar. Darüber hinaus gelten für den Kommutator analoge Regeln zu (1.9).

Im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ muß die Zeitentwicklung für den Erwartungswert eines Operators (1.18) die klassische Bewegungsgleichung für die entsprechende Phasenraumfunktion (1.6) liefern², so daß $\langle [\hat{f}, \hat{g}] \rangle / i\hbar$ im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ in die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ übergehen muß.

1.2.3. Zeitentwicklung und Heisenberg-Darstellung

Die bisherige Diskussion beruhte auf dem Schrödinger-Bild, in dem die Zustände $|\psi\rangle = |\psi, t\rangle$ zeitabhängig sind, wohingegen die Operatoren zeitlich konstant sind. Mit dem *Zeitentwicklungsoperator* $\hat{U}(t)$, der durch die Gleichung

$$|\psi, t\rangle = \hat{U}(t) |\psi, 0\rangle \quad (1.19)$$

definiert ist, kann die Situation umgedreht werden. Gemäß der Schrödinger-Gleichung (1.11) muß er Lösung der Gleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H} \hat{U}(t) \quad (1.20)$$

²Dies ist auch als *Ehrenfestsches Theorem* bekannt.

sein. Man definiert $|\psi\rangle_H = |\psi, 0\rangle$ als Darstellung des zu $|\psi, t\rangle$ korrespondierenden Zustands im *Heisenberg-Bild*. Gleichung (1.20) wird formal gelöst durch

$$\hat{U}(t) = \hat{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t')\right), \quad (1.21)$$

wobei \hat{T} den Zeitordnungsoperator repräsentiert.

Da es sich bei dem Erwartungswert um eine physikalisch beobachtbare Größe handelt, muß dieser unverändert bleiben, so daß Operatoren gemäß der Gleichung

$$\hat{f}_H = \hat{U}^\dagger(t) \hat{f} \hat{U}(t) \quad \text{mit} \quad \hat{U}^\dagger(t) = \hat{U}^{-1}(t) \quad (1.22)$$

von der Zeit abhängen müssen, wie die Gleichung $\langle\psi, t|\hat{f}|\psi, t\rangle = \langle\psi|_H \hat{f}_H |\psi\rangle_H$ zeigt. Durch Ableiten von (1.22) zeigt man, daß die Zeitabhängigkeit der Operatoren im Heisenberg-Bild auch durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \hat{f}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}_H, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{f}_H}{\partial t} \quad (1.23)$$

bestimmt wird. Man beachte die Ähnlichkeit dieser Gleichung zu (1.18).

Wenn man Quantenmechanik auf dem Phasenraum beschreiben will, stellt sich nun die Frage, ob man dort eine Klammer definieren kann, die direkt dem Kommutator $[\hat{f}_H, \hat{g}_H]/i\hbar$ entspricht und die im klassischen Grenzfall gerade in die Poisson-Klammer übergeht. Diese Frage wird in Abschnitt 1.4 beantwortet werden.

1.2.4. Der Spezialfall eines zeitunabhängigen Hamilton-Operators

In diesem Unterabschnitt wird die Spezialisierung auf den Fall betrachtet, daß der Hamilton-Operator \hat{H} keine Funktion der Zeit ist. In diesem Fall kann die Schrödinger-Gleichung (1.11) durch einen Separationsansatz gelöst werden und mit

$$\hat{H} |\psi\rangle_H = E |\psi\rangle_H \quad (1.24)$$

erhält man

$$|\psi, t\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\psi, 0\rangle = e^{-iEt/\hbar} |\psi\rangle_H. \quad (1.25)$$

Der Vergleich mit Gleichung (1.19) zeigt, daß man dann den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ durch $U_E(t) = e^{-iEt/\hbar}$ ersetzen kann.

Dieses Ergebnis kann auch auf anderem Wege bestimmt werden. Da H zeitunabhängig ist, kann man das Integral in (1.21) ausführt, so daß der Zeitentwicklungsoperator die Form

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (1.26)$$

annimmt. Läßt man diesen Operator gemäß Gleichung (1.24) auf $|\psi\rangle_H$ wirken, dann geht $\hat{U}(t)$ ebenfalls in die Funktion $U_E(t) = e^{-iEt/\hbar}$ über.

1.2.5. Die Dichtematrix

Quantenzustände können auch durch die *Dichtematrix* $\hat{\rho}$ beschrieben werden, wobei der Erwartungswert eines Operators \hat{f} dann durch die Spur

$$\langle\hat{f}\rangle = \text{tr}(\hat{f}\hat{\rho}) \quad (1.27)$$

gegeben ist und die Normierung $\text{tr} \hat{\rho} = 1$ lautet. Im folgenden werden nur reine Zustände betrachtet, so daß die Dichtematrix in der Form $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ angegeben werden kann und $\text{tr} \hat{\rho} = \langle\psi|\psi\rangle = 1$ der üblichen Normierung der Zustände entspricht.

Die Zeitabhängigkeit der Zustände wird durch Gleichung (1.11) festgelegt, so daß die Dichtematrix dementsprechend die Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \quad (1.28)$$

erfüllen muß, die *Von-Neumann-Gleichung* genannt wird.

Falls der Hamilton-Operator zeitunabhängig ist, gilt Gleichung (1.25). Für die Dichtematrix $\hat{\rho}$ folgt daraus, daß auch die Schrödinger-Darstellung zeitunabhängig ist, so daß sie der Heisenberg-Darstellung entspricht. Diese Tatsache läßt sich durch die Gleichung

$$\hat{\rho} = |\psi, t\rangle \langle \psi, t| = |\psi\rangle_H \langle \psi|_H \quad (1.29)$$

ausdrücken.

Aus Gleichung (1.24) folgt dann

$$\hat{H}\hat{\rho} = \hat{\rho}\hat{H} = E\hat{\rho}, \quad (1.30)$$

so daß (1.28) offensichtlich erfüllt ist. Falls \hat{H} nicht von der Zeit abhängt, kann die Dichte-Matrix $\hat{\rho}$ daher als hermitesche Lösung der Gleichung $\hat{H}\hat{\rho} = E\hat{\rho}$ definiert werden. Aus der Hermitizität von \hat{H} folgt dann direkt, daß $\hat{\rho}$ auch $\hat{\rho}\hat{H} = E\hat{\rho}$ erfüllt.

1.3. Wigner-Funktionen

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie man mit einer bestimmten Art von Verteilungsfunktionen im klassischen Phasenraum quantenmechanische Zustände charakterisieren kann. Diese Funktionen sind nach E. P. Wigner benannt, der sie bereits 1932 in [Wig1932] definiert hat, wobei die hier präsentierte Behandlung dieses Themas auf dem aktuelleren Artikel [HOSW1984] basiert. Die für diesen Text wesentlichen Ergebnisse werden weitestgehend ohne Beweis angegeben.

1.3.1. Abbildungsvorschrift von Operatoren zu Funktionen auf dem Phasenraum

Um Quantenmechanik auf dem Phasenraum formulieren zu können, muß man wissen, wie Operatoren auf Phasenraumfunktionen abzubilden sind. Die Funktion, die dem Operator $\hat{f}(\hat{q}, \hat{p})$ entspricht, ist durch die Vorschrift

$$f(q, p) = \int dy \langle q - y/2 | \hat{f} | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} \quad (1.31)$$

definiert [HOSW1984, S. 128]. Dies wird gelegentlich *Weyl-Korrespondenz* genannt.

Aus der Gleichung (1.31) folgt offensichtlich, daß dem adjungierten Operator \hat{f}^\dagger die komplex konjugierte Funktion $\bar{f}(q, p)$ entspricht. Daher ist $f(q, p)$ reell, falls \hat{f} hermitesch, und imaginär, falls \hat{f} antihermitesch ist. Die Umkehrschlüsse sind jeweils ebenfalls gültig. Man beachte, daß in Gleichung (1.31) gerade die Umkehrabbildung zu (1.16) dargestellt ist [HOSW1984, S. 134], die daher mit $\varrho_{\text{Weyl}}^{-1}(\hat{f})$ bezeichnet werden kann.

1.3.2. Definition der Wigner-Funktionen

Wegen des Unschärfepinzips kann die Position und der Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig angegeben werden, so daß es auch keine echte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion im Phasenraum geben kann. Trotzdem haben sich Phasenraumfunktionen, die eine Ähnlichkeit mit Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen aufweisen, als sehr nützlich zur Beschreibung quantenmechanischer Systeme erwiesen. Darüber hinaus liefern sie eine tiefere Einsicht in das Verhältnis von klassischer und quantenmechanischer Physik.

Die von Wigner in [Wig1932] eingeführte Verteilungsfunktion ist die nach (1.31) der Dichtematrix $\hat{\rho}$ entsprechende *Wigner-Funktion*

$$\pi(q, p) = \int dy \langle q - y/2 | \hat{\rho} | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar}. \quad (1.32)$$

Da $\hat{\rho}$ per Definition ein hermitescher Operator ist, muß $\pi(q, p)$ eine reelle Funktion sein. Im Fall von reinen Zuständen $|\psi\rangle$ gilt $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, so daß die Wigner-Funktion

$$\pi(q, p) = \int dy \psi(q - y/2) \bar{\psi}(q + y/2) e^{ipy/\hbar} \quad (1.33)$$

lautet. Im Schrödinger-Bild hängt $\pi(q, p)$ genau wie $\psi(q)$ von der Zeit ab.

Wird Gleichung (1.32) über p integriert, so erhält man

$$\int dp \pi(q, p) = 2\pi\hbar \langle q | \hat{\rho} | q \rangle = 2\pi\hbar |\psi(q)|^2 \quad (1.34)$$

und durch eine weitere Integration über q folgt direkt

$$\int dq dp \pi(q, p) = 2\pi\hbar \text{tr}(\hat{\rho}) = 2\pi\hbar \quad (1.35)$$

als Normierungsbedingung³.

1.3.3. Produkte von Funktionen auf dem Phasenraum und Erwartungswerte

Im folgenden werden zwei Funktionen f und g betrachtet, die gemäß der Gleichung (1.31) den beiden Operatoren \hat{f} und \hat{g} entsprechen. Man kann zeigen, daß die Gleichung

$$\int dq dp f(q, p) g(q, p) = 2\pi\hbar \text{tr}(\hat{f}\hat{g}), \quad (1.36)$$

gilt. Das Phasenraumintegral des punktweisen Produkts zweier Funktionen entspricht also der Spur des Operatorprodukts der zugehörigen Operatoren.

Es stellt sich die Frage, ob es ein Produkt auf dem Phasenraum gibt, das direkt dem Operatorprodukt entspricht, ohne daß man das Integral bzw. die Spur bilden muß. Diese Frage wird in Abschnitt 1.4 wieder aufgegriffen.

Entscheidend für eine quantenmechanische Theorie ist es, Erwartungswerte von Observablen angeben zu können. Mit Gleichung (1.36) ist dies nun möglich, indem man g durch die Wigner-Funktion π ersetzt:

$$\int dq dp f(q, p) \pi(q, p) = 2\pi\hbar \text{tr}(\hat{f}\hat{\rho}) = 2\pi\hbar \langle \hat{f} \rangle. \quad (1.37)$$

Diese Gleichung wurde ursprünglich 1932 von Wigner [Wig1932] aufgestellt, konnte aber erst 1949 von Moyal [Moy1949] in ihrer vollen Allgemeinheit bewiesen werden.

1.3.4. Eigenschaften der Wigner-Funktionen

Wenn $\pi_1(q, p)$ und $\pi_2(q, p)$ die Verteilungsfunktionen zu den reinen Zuständen $\psi_1(q)$ bzw. $\psi_2(q)$ sind, dann folgt aus (1.37)

$$\begin{aligned} \int dq dp \pi_1(q, p) \pi_2(q, p) &= 2\pi\hbar \text{tr}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1| |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) \\ &= 2\pi\hbar \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \\ &= 2\pi\hbar \left| \int dq \bar{\psi}_1(q) \psi_2(q) \right|^2, \end{aligned} \quad (1.38)$$

³Es ist zu beachten, daß in [HOSW1984] die Normierung $\int dp dq \pi(q, p) = 1$ benutzt wird. Daher tritt in (1.33) ein anderer Vorfaktor als in Gleichung (2.2a) von [HOSW1984] auf.

so daß man für $\psi_1(q) = \psi_2(q)$

$$\int dq dp [\pi(q, p)]^2 = \int dq dp \pi(q, p) \quad (1.39)$$

erhält.

Sind $\psi_1(q)$ und $\psi_2(q)$ hingegen orthogonale Zustände, dann ergibt sich aus (1.38) die Gleichung $\int dq dp \pi_1(q, p) \pi_2(q, p) = 0$. Daher muß wenigstens eine der beiden Verteilungsfunktionen an einigen Punkten des Phasenraums negativ sein, was eine direkte Interpretation als Wahrscheinlichkeitsverteilungen verbietet.

Um mit den Wigner-Funktionen eine autonome Theorie der Quantenmechanik formulieren zu können, benötigt man noch eine Bewegungsgleichung für diese Funktionen. Diese wird in Abschnitt 1.6 nachgeliefert.

1.4. Das Moyal-Produkt

Gleichung (1.16) definiert die Weyl-Abbildung ϱ_{Weyl} , die Phasenraumfunktionen bijektiv auf Operatoren abbildet. In diesem Abschnitt wird das Moyal-Produkt eingeführt, das unter dieser Abbildung dem Operatorprodukt auf dem Hilbertraum entspricht.

Gleichung (1.36) stellt bereits eine Verbindung zwischen einem Produkt von Funktionen und dem Produkt entsprechender Operatoren her. Das Moyal-Produkt verallgemeinert diese Beziehung zu einem Isomorphismus.

1.4.1. Definition des Moyal-Produkts

Es wird verlangt, daß das *Moyal-Produkt* $*$ unter der Weyl-Abbildung ϱ_{Weyl} dem Operatorprodukt der Quantenmechanik entspricht. Wie es in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f, g & \longrightarrow & f * g \\ \downarrow \varrho_{\text{Weyl}} & & \downarrow \varrho_{\text{Weyl}} \\ \hat{f}, \hat{g} & \longrightarrow & \hat{f} \hat{g} \end{array} \quad (1.40)$$

verdeutlicht wird, ist ϱ_{Weyl} dann ein Isomorphismus von der Algebra der Phasenraumfunktionen zusammen mit dem Moyal-Produkt zu der Operatoralgebra auf dem Hilbert-Raum.

Für einen zweidimensionalen Phasenraum mit den Koordinaten q und p lautet das Moyal-Produkt

$$f * g = f e^{i\hbar(\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q)/2} g = f \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^k (\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q)^k \right) g. \quad (1.41)$$

Es kann gezeigt werden, daß dieses Produkt tatsächlich die Gleichung

$$\varrho_{\text{Weyl}}(f * g) = \varrho_{\text{Weyl}}(f) \varrho_{\text{Weyl}}(g) \quad (1.42)$$

erfüllt. Ein Beispiel dafür ist in Anhang A.1 zu finden.

Da Operatoren im allgemeinen nicht kommutieren, gilt dies auch für die beiden Faktoren eines Moyal-Produkts. Der antisymmetrische Anteil definiert die *Moyal-Klammer*

$$[f, g]_* = f * g - g * f, \quad (1.43)$$

die dem Kommutator der Quantenmechanik entspricht. Gemäß der Diskussion aus Unterabschnitt 1.2.3 muß dann das $1/i\hbar$ -fache der Moyal-Klammer im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ in die Poisson-Klammer übergehen. Tatsächlich erhält man

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_* = f(\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q)g = \{f, g\}, \quad (1.44)$$

wobei hier die Schreibweise der Poisson-Klammer aus Gleichung (1.8) auftritt.

Das Moyal-Produkt (1.41) kann auch auf einen $2n$ -dimensionalen Phasenraum erweitert werden:

$$f * g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{i=1}^n (\bar{\partial}_{q_i} \bar{\partial}_{p_i} - \bar{\partial}_{p_i} \bar{\partial}_{q_i}) \right) g. \quad (1.45)$$

Obwohl in diesem Abschnitt nur das 2-dimensionale Moyal-Produkt behandelt wird, lassen sich alle Regeln auch auf das Produkt (1.45) übertragen.

Bemerkung: Das Moyal-Produkt tritt implizit bereits in [vN1931] auf und wurde in [Gro1946] wiederentdeckt. Der auf diesem Produkt basierende Kommutator (1.43) geht auf Moyal [Moy1949] zurück. Für eine ausführlichere Übersicht der historischen Entwicklung sei auf den Anhang von [Zac2002] verwiesen.

1.4.2. Einige elementare Eigenschaften

Wenn man Gleichung (1.42) hermitesch adjungiert und die Eigenschaft $[\varrho_{\text{Weyl}}(f)]^\dagger = \varrho_{\text{Weyl}}(\bar{f})$ aus Gleichung (1.14) ausnutzt, dann ergibt sich

$$\varrho_{\text{Weyl}}(\overline{f * g}) = \varrho_{\text{Weyl}}^\dagger(f * g) = \varrho_{\text{Weyl}}^\dagger(g) \varrho_{\text{Weyl}}^\dagger(f) = \varrho_{\text{Weyl}}(\bar{g}) \varrho_{\text{Weyl}}(\bar{f}) = \varrho_{\text{Weyl}}(\bar{g} * \bar{f}), \quad (1.46)$$

so daß das Moyal-Produkt die Gleichung

$$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f} \quad (1.47)$$

erfüllt. Auf Grund dieser Eigenschaft nennt man das Moyal-Produkt *hermitesch*.

Da der Translationsoperator $\exp(y\partial_q)$ angewendet auf $f(q)$ eine Verschiebung des Funktionsarguments $q \rightarrow q + y$ bewirkt, ist es offensichtlich, daß man das Moyal-Produkt (1.41) auch in den Formen

$$f(q, p) * g(q, p) = f \left(q + \frac{i\hbar}{2} \bar{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \bar{\partial}_q \right) g(q, p) = f \left(q, p - \frac{i\hbar}{2} \bar{\partial}_q \right) g \left(q, p + \frac{i\hbar}{2} \bar{\partial}_q \right) \quad (1.48)$$

angeben kann, wobei die Ableitungen $\bar{\partial}$ und $\bar{\partial}$ nur auf f bzw. g wirken.

Auf Grund der Definition (1.43) ist die Moyal-Klammer offensichtlich antisymmetrisch:

$$[f, g]_* = -[g, f]_* . \quad (1.49a)$$

Durch Anwendung der Weyl-Abbildung auf die bekannte Operatoridentität $[\hat{f}, \hat{g}\hat{h}] = \hat{g}[\hat{f}, \hat{h}] + [\hat{f}, \hat{g}]\hat{h}$ folgt außerdem

$$[f, g * h]_* = g * [f, h]_* + [f, g]_* * h. \quad (1.49b)$$

Genau wie das Operatorprodukt ist das Moyal-Produkt assoziativ, was in Unterabschnitt 1.4.4 explizit bewiesen wird. Zusammen mit der Antisymmetrie (1.49a) erhält man dann direkt die Jacobi-Identität

$$[f, [g, h]_*]_* + [g, [h, f]_*]_* + [h, [f, g]_*]_* = 0 . \quad (1.49c)$$

Die letzte drei Gleichungen zeigen, daß der Vektorraum der Funktionen auf dem Phasenraum mit der Moyal-Klammer eine Lie-Algebra ist. Mit Hilfe von (1.44) kann man im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ (bis auf einige Faktoren) die Gleichungen (1.9) zurückgewinnen.

1.4.3. Integraldarstellung des Moyal-Produkts

Die Integraldarstellung des Moyal-Produkts

$$(f * g)(q, p) = \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') \times \exp\left(\frac{2}{i\hbar}(p(q' - q'') + p'(q'' - q) + p''(q - q'))\right), \quad (1.50)$$

die zuerst in [Bak1958] angegeben wurde, erweist sich in der Praxis oft als einfacher zu berechnen als die Reihenentwicklung (1.41). Wie in [Zac2000a] gezeigt wurde, erlaubt die letzte Gleichung eine geometrische Interpretation des Moyal-Produkts, auf die im folgenden auszugsweise eingegangen wird.

Im \mathbb{R}^2 kann die orientierte Fläche eines Parallelogramms, das von $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ aufgespannt wird, mit Hilfe des symplektischen Produkts

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \mathbf{x}^T J \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

bestimmt werden. Für die Fläche $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ eines Dreiecks mit den Eckpunkten $\mathbf{x} = (q, p)$, $\mathbf{x}' = (q', p')$ und $\mathbf{x}'' = (q'', p'')$ folgt daher

$$2A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{x}'' - \mathbf{x}) = p(q'' - q') + p'(q - q'') + p''(q' - q), \quad (1.52)$$

so daß man das Sternprodukt (1.50) auch als

$$(f * g)(q, p) = \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')\right) \quad (1.53)$$

schreiben kann.

1.4.4. Assoziativität

Bildet man das Moyal-Produkt mit einer weiteren Funktion h , dann ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Gleichung (1.53)

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](q, p) &= \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int d\tilde{q} d\tilde{q}''' d\tilde{p} d\tilde{p}''' (f * g)(\tilde{q}, \tilde{p}) h(q''', p''') \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}''')\right) \\ &= \frac{1}{\hbar^4 \pi^4} \int dq' dq'' dq''' d\tilde{q} dp' dp'' dp''' d\tilde{p} f(q', p') g(q'', p'') h(q''', p''') \\ &\quad \times \exp\left(\frac{4i}{\hbar} [A(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') + A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}''')]\right). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Die Integration über \tilde{q} und \tilde{p} liefert zwei δ -Funktionen und man findet schließlich das Ergebnis

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](q, p) &= \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq' dq'' dq''' dp' dp'' dp''' f(q', p') g(q'', p'') h(q''', p''') \\ &\quad \times \delta(p - p' + p'' - p''') \delta(q - q' + q'' - q''') \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')\right), \end{aligned} \quad (1.55)$$

wobei die Details der Rechnung in Anhang A.2 zu finden sind. Die rechte Seite dieser Gleichung nimmt keinen Bezug mehr auf die Klammerung der linken Seite, so daß damit die *Assoziativität* des Moyal-Produkts

$$(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h \quad (1.56)$$

explizit bewiesen wäre.

1.4.5. Spureigenschaft des Phasenraumintegrals

Mit der Integraldarstellung des Sternprodukts kann man außerdem auf einfachem Wege die Eigenschaft

$$\int dq dp f * g = \int dq dp fg = \int dq dp g * f \quad (1.57)$$

des Moyal-Produkts zeigen. Durch die Integration von Gleichung (1.53) über den gesamten Phasenraum gelangt man zu

$$\begin{aligned} \int dq dp f * g &= \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') \exp\left(\frac{2}{i\hbar}(p'q'' - p''q')\right) \\ &\quad \times \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq dp \exp\left(\frac{2}{i\hbar}(q(p'' - p') + p(q' - q''))\right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

wobei sich die zweite Zeile auf das Produkt der beiden δ -Funktionen $\delta(p'' - p')$ und $\delta(q' - q'')$ reduziert, so daß sofort das Ergebnis (1.57) folgt.

In (1.36) wurde bereits

$$\int dq dp fg = 2\pi\hbar \operatorname{tr}(\hat{f}\hat{g}) \quad \text{mit} \quad \hat{f} = \varrho_{\text{Weyl}}(f) \quad \text{und} \quad \hat{g} = \varrho_{\text{Weyl}}(g) \quad (1.59)$$

angegeben, so daß sich zusammen mit (1.57) die Gleichung

$$\int dq dp f * g = \int dq dp fg = 2\pi\hbar \operatorname{tr}(\hat{f}\hat{g}) \quad (1.60)$$

ergibt. Dies legt die Definition der Phasenraumspur

$$\operatorname{Tr}(f) = \operatorname{tr}(\varrho_{\text{Weyl}}(f)) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dp f \quad (1.61)$$

nahe. Obwohl das Sternprodukt nicht kommutativ ist, kann man die Faktoren innerhalb der Spur $\operatorname{Tr}(\dots)$ vertauschen, wie (1.57) zeigt. Diese Gleichung wird im folgenden daher auch *Spureigenschaft* genannt.

1.5. Sternprodukte und c -Äquivalenz

Das in Abschnitt 1.4 angegebene Moyal-Produkt ist nur eine mögliche Variante des Sternprodukts, das in diesem Abschnitt definiert werden soll. Die Grundlage dazu bietet der Vektorraum der glatten, komplexwertigen Funktionen $V = C^\infty(M)$ auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit M . Die folgende Diskussion ist an Kapitel 3 von [HH2002b] angelehnt.

1.5.1. Definition des Sternprodukts

Das *Sternprodukt* $*$: $V \times V \rightarrow V$ hat die allgemeine Form

$$f * g = \sum_{k=0}^{\infty} (i\hbar)^k C_k(f, g), \quad (1.62)$$

wobei es sich bei $C_k(f, g)$ um Bidifferentialoperatoren⁴ handelt, für die man

$$C_0(f, g) = fg, \quad (1.63a)$$

$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}, \quad (1.63b)$$

$$\text{und} \quad \sum_{i+j=k} C_i(C_j(f, g), h) = \sum_{i+j=k} C_i(f, C_j(g, h)) \quad (1.63c)$$

⁴Ein Bidifferentialoperator $C(f, g)$ besteht aus Ableitungen der Funktionen f und g .

verlangt.

Die erste Gleichung (1.63a) sorgt dafür, daß das Sternprodukt im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ in die punktweise Multiplikation

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (f * g)(x) = (fg)(x) = f(x)g(x) \quad (1.64)$$

übergeht, wobei x wie in Unterabschnitt 1.1.2 für die Gesamtheit aller Phasenraumkoordinaten q_i und p_i steht. Im Sinne von Gerstenhaber [Ger1964] kann man das Sternprodukt als eine Deformation der punktweisen Multiplikation ansehen, wobei \hbar der Deformationsparameter ist. Aus der zweiten Gleichung (1.63b) folgt

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_* = \{f, g\} \quad (1.65)$$

und die dritte Gleichung (1.63c) gewährleistet die Assoziativität des Sternprodukts:

$$(f * g) * h = f * (g * h). \quad (1.66)$$

Der Koeffizient $C_0(f, g)$ ist durch Gleichung (1.63a) bereits eindeutig definiert.

1.5.2. Zwei Beispiele

Eine mögliche Wahl für $C_1(f, g)$, die die Bedingung (1.63b) erfüllt, ist offensichtlich

$$C_1(f, g) = \frac{1}{2} \{f, g\} = \frac{1}{2} f(\vec{\partial}_i \alpha^{ij} \vec{\partial}_j)g, \quad (1.67)$$

wobei hier die Darstellung der Poisson-Klammer aus Gleichung (1.10) Verwendung findet.

Wie in Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, kann man bei einer flachen Mannigfaltigkeit solche Koordinaten finden, in denen die Komponenten α^{ij} des Poisson-Tensors Konstanten sind. In diesem Fall erhält man das Sternprodukt einfach durch Exponenzieren von C_1 , was zum *Moyal-Produkt*

$$f *_{M} g = f e^{i\hbar \alpha^{ij} \vec{\partial}_i \vec{\partial}_j / 2} g \quad (1.68)$$

führt. Um das Moyal-Produkt von anderen Sternprodukten unterscheiden zu können, wurde es mit einem Index M versehen.

Wie in Unterabschnitt 1.4.1 gezeigt wurde, entspricht das Moyal-Produkt der Weyl-Ordnung von Operatoren. Dieses Produkt zeichnet sich dadurch gegenüber anderen Sternprodukten aus, daß es hermitesch (1.47) ist und die Spureigenschaft (1.57) besitzt.

Für den Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ lautet C_1 in kanonischen Koordinaten

$$C_1(f, g) = \frac{1}{2} f(\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q)g \quad (1.69)$$

und daher nimmt das Moyal-Produkt die in Gleichung (1.41) angegebene Form

$$f *_{M} g = f e^{i\hbar(\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q) / 2} g \quad (1.70)$$

an.

Die Definition des Sternprodukts durch die Gleichungen (1.62) und (1.63) ist nicht eindeutig. Tatsächlich wird die Bedingung (1.63b) auch von

$$C_1(f, g) = f \vec{\partial}_q \vec{\partial}_p g \quad (1.71)$$

erfüllt, wobei man durch Exponenzieren zum sogenannten *Standardprodukt*

$$f *_{St} g = f e^{i\hbar \vec{\partial}_q \vec{\partial}_p} g \quad (1.72)$$

gelangt.

Auch für das Standardprodukt gibt es ein kommutatives Diagramm (1.40), allerdings muß man ϱ_{Weyl} durch eine Abbildung ersetzen, die einer anderen Operatorordnung als der Weyl-Ordnung (1.17) entspricht. Tatsächlich gilt

$$\varrho_{\text{St}}(f *_N g) = \varrho_{\text{St}}(f) \varrho_{\text{St}}(g) \quad \text{mit} \quad \varrho_{\text{St}}(q^k p^l) = \hat{q}^k \hat{p}^l, \quad (1.73)$$

wobei die durch ϱ_{St} erzeugte Ordnung *Standardordnung* genannt wird. Darauf ist auch die Namensgebung des Standardprodukts zurückzuführen.

1.5.3. c -Äquivalenz

Zwei Sternprodukte nennt man *c-äquivalent*, wenn es einen umkehrbaren Übersetzungsoperator T gibt, so daß

$$T(f *_' g) = (Tf) * (Tg) \quad (1.74)$$

gilt. Der Operator T muß von der Form

$$T = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k T_k \quad (1.75)$$

sein, wobei es sich bei T_k um Differentialoperatoren handelt.

Nach dieser Definition sind Moyal- und Standardprodukt zueinander äquivalent, denn es gilt

$$T(f *_St g) = (Tf) *_M (Tg) \quad \text{mit} \quad T = e^{-i\hbar \vec{\partial}_q \vec{\partial}_p / 2}. \quad (1.76)$$

Es ist bekannt, daß alle Sternprodukte für $M = \mathbb{R}^{2n}$ *c-äquivalent* sind.

1.6. Bewegungsgleichungen

Es wurde bereits gezeigt, daß man mit Wigner-Funktionen Quantenzustände auf dem Phasenraum beschreiben kann. Um sich aber von der Formulierung der Quantenmechanik auf dem Hilbert-Raum vollständig lösen zu können, muß man noch eine Bewegungsgleichung für die Wigner-Funktionen finden, die die Schrödinger-Gleichung (1.11) ersetzen kann. Es wird sich zeigen, daß dazu das Moyal-Produkt bzw. die Moyal-Klammer ein nützliches Werkzeug ist.

1.6.1. Die Zeitabhängigkeit der Wigner-Funktion

Im Schrödinger-Bild hängt die Dichtematrix im allgemeinen von der Zeit ab und somit auch die Wigner-Funktion (1.32). Mit Hilfe von (1.28) kann man eine Differentialgleichung herleiten, die die Zeitabhängigkeit der Wigner-Funktionen bestimmt. Für die Ableitung von (1.32) erhält man

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \pi(q, p; t) = \int dy \langle q - y/2 | [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar}, \quad (1.77)$$

wobei das Ziel nun darin besteht, die rechte Seite mit Hilfe von π auszudrücken.

Wie im Anhang A.3 gezeigt wird, kann man den ersten Term in

$$\int dy \langle q - y/2 | \hat{H}(t) \hat{\rho}(t) | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} = H(q, p; t) * \pi(q, p; t) \quad (1.78)$$

umformen, wobei hier die Wigner-Funktion in der Form (1.33) auftritt. Da das Moyal-Produkt hermitesch ist, folgt aus Gleichung (1.78) durch komplexe Konjugation direkt der zweiten Term von (1.77):

$$\int dy \langle q - y/2 | \hat{\rho}(t) \hat{H}(t) | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} = \pi(q, p; t) * H(q, p; t). \quad (1.79)$$

Die gesuchte Bewegungsgleichung für die Wigner-Funktionen im Schrödinger-Bild lautet somit

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(q, p; t) = \frac{1}{i\hbar} [H(q, p; t), \pi(q, p; t)]_* . \quad (1.80)$$

Auffallend ist die formale Ähnlichkeit dieser Gleichung zu (1.28), die Ausgangspunkt der Herleitung war.

Bemerkung: Gleichung (1.80) kann man mit der Definition des Moyal-Produkts (1.41) zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \pi(q, p; t) = H(q, p; t) \frac{2}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2} (\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q) \pi(q, p; t) \quad (1.81)$$

umformen. Mit dieser Gleichung konnte Moyal [Moy1949, Gl. (7.8)] bereits 1949 eine eigenständige Quantentheorie auf Basis der Wigner-Funktionen formulieren.

1.6.2. Eine Bewegungsgleichung für die Observablen

Wenn die *Zeitentwicklungsfunktion* $U(t)$ analog zu $\hat{U}(t)$ in (1.20) durch die Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t) = H(t) * U(t) \quad (1.82)$$

definiert wird, dann kann man die Lösung $\pi(t) \equiv \pi(q, p; t)$ von Gleichung (1.80) formal in der Form

$$\pi(t) = U(t) * \pi_H * \bar{U}(t) \quad \text{mit} \quad \bar{U}(t) = U^{-1}(t) \quad (1.83)$$

angeben, wobei $\pi_H \equiv \pi(0)$ den Anfangszustand festlegt. Während $\pi(t)$ eine Wigner-Funktion in der Schrödinger-Darstellung ist, entspricht π_H dem zugehörigen Zustand im Heisenberg-Bild.

Genau wie in der herkömmlichen Formulierung der Quantenmechanik, müssen auch hier die Observablen im Heisenberg-Bild von der Zeit abhängen. Die konkrete Form der Zeitabhängigkeit kann aus der Forderung gewonnen werden, daß der Erwartungswert (1.37) nicht von der Darstellung abhängt. Mit den Gleichungen (1.56), (1.57) und (1.83) ergibt sich

$$\int dq dp f \pi(t) = \int dq dp f * \pi(t) = \int dq dp \bar{U}(t) * f * U(t) * \pi_H = \int dq dp f_H(t) \pi_H, \quad (1.84)$$

wobei hier die Definition

$$f_H(t) = \bar{U}(t) * f * U(t) \quad (1.85)$$

benutzt wurde.

Leitet man Gleichung (1.86) nach der Zeit ab, dann folgt unter Verwendung von (1.82)

$$\frac{d}{dt} f_H = \frac{1}{i\hbar} [f_H, H]_* + \frac{\partial f_H}{\partial t}. \quad (1.86)$$

Offensichtlich entsprechen (1.85) und (1.86) den Gleichungen (1.22) bzw. (1.23) für die Operatoren im Heisenberg-Bild. Im folgenden wird überwiegend die Heisenberg-Darstellung der Wigner-Funktion verwendet und daher der Index H nicht mehr explizit erwähnt.

Bemerkung: Wie die Rechnungen

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (q * H - H * q) = \partial_p H \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{i\hbar} (p * H - H * p) = -\partial_q H \quad (1.87)$$

zeigen, folgen die Hamilton-Gleichungen (1.3) aus der Bewegungsgleichung (1.86). Obwohl es sich um hier um eine quantenmechanische Theorie handelt, ergibt sich für die Observablen q und p eine Zeitentwicklung, die man aus der klassischen Mechanik kennt. Dies gilt aber nicht für alle Observablen $f(q, p)$, da im allgemeinen

$$(fg)(t) \neq f(t)g(t) \quad (1.88)$$

gilt⁵.

⁵siehe [BFF⁺1978b, S. 114f.]

1.6.3. Die Sterneigenwertgleichung

Im folgenden wird eine Bestimmungsgleichung für die Wigner-Funktionen hergeleitet unter der Annahme, daß H nicht explizit von der Zeit abhängt.

In diesem Fall wurde bereits in (1.29) gezeigt, daß $\hat{\rho}$ konstant ist. Auf Grund der Definition der Wigner-Funktion (1.32) muß das gleiche auch für $\pi(q, p)$ gelten und daher folgt aus der Differentialgleichung (1.80)

$$H(q, p) * \pi(q, p) = \pi(q, p) * H(q, p). \quad (1.89)$$

Die linke Seite dieser Gleichung wurde bereits im vorhergehenden Unterkapitel bestimmt. Nach Gleichung (1.78) gilt

$$H(q, p) * \pi(q, p) = \int dy \langle q - y/2 | \hat{H} \hat{\rho} | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar}, \quad (1.90)$$

so daß aus (1.30) direkt die sogenannte *Sterneigenwertgleichung* (engl.: „*-genvalue equation“)

$$H(q, p) * \pi(q, p) = E \pi(q, p) \quad (1.91)$$

folgt. Diese Gleichung geht auf Fairlie [Fai1964] zurück.

Es wurde gezeigt, daß die Wigner-Funktionen (1.32) im Fall einer zeitunabhängigen Hamilton-Funktion die Gleichungen (1.89) und (1.91) erfüllen. Im folgenden wird gezeigt, daß tatsächlich jede beliebige reelle Lösung $\pi(q, p)$ der Sterneigenwertgleichung auch der Gleichung (1.89) genügt und damit auch Lösung von (1.80) ist.

Zunächst soll bewiesen werden, daß die Energie E in (1.91) eine reelle Zahl sein muß, wenn H und π reell sind. Unter Verwendung von (1.57) folgt durch Integration der Gleichung (1.91)

$$\int dq dp H(q, p) \pi(q, p) = E \int dq dp \pi(q, p). \quad (1.92)$$

Da beide Integrale reell sind, muß dies auch für E gelten. Auf Grund der Hermitezität des Moyal-Produkts (1.47) erhält man mit der Gleichung (1.91)

$$H(q, p) * \pi(q, p) = E \pi(q, p) = \overline{E \pi(q, p)} = \overline{H(q, p) * \pi(q, p)} = \pi(q, p) * H(q, p), \quad (1.93)$$

was gezeigt werden sollte.

Darüber hinaus wird in [CFZ1998, s. Lemma 2] demonstriert, daß alle reellen Lösungen der Sterneigenwertgleichung in der Form einer Wigner-Funktion (1.33) geschrieben werden können. Daher kann die Sterneigenwertgleichung die Schrödinger-Gleichung (1.24) für zeitunabhängige Hamilton-Funktionen ersetzen.

1.7. Das Sternexponential

In der Deformationsquantisierung kann man eine Spektraltheorie definieren, die der üblichen Formulierung im Hilbert-Raum entspricht (siehe auch [Rom1975, Kap. 13.3c]). Die folgende Einführung in dieses Thema basiert auf dem vierten Kapitel von [BFF⁺1978b].

1.7.1. Definition des Sternexponentials und Spektraltheorie

Für eine zeitunabhängige Hamilton-Funktion H kann die Lösung der Gleichung (1.82) für $U(0) = 1$ als sogenanntes *Sternexponential*

$$U(t) = \text{Exp}(Ht) = e_*^{-iHt/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{i\hbar} \right)^n H^{n*} \quad \text{mit} \quad H^{n*} = \underbrace{H * H * \dots * H}_{n \text{ Faktoren}} \quad (1.94)$$

angegeben werden. In [BFF⁺1978b] wird die zentrale Rolle des Sternexponential in der Spektraltheorie betont. Es bestimmt durch die *Fourier-Dirichlet-Entwicklung*

$$\text{Exp}(Ht) = \sum_E \pi_E e^{-iEt/\hbar} \quad (1.95)$$

das Spektrum der *Eigenwerte* E zur Hamilton-Funktion H , wobei im Fall eines kontinuierlichen Spektrums die Summe in (1.95) durch eine Integration zu ersetzen ist. Die Funktion π_E wird [BFF⁺1978b] von nun an *Projektor* zum Eigenwert E genannt.

Setzt man die Fourier-Dirichlet-Entwicklung (1.95) in (1.82) ein, so zeigt die Rechnung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \text{Exp}(Ht) = \sum_E E \pi_E e^{-iEt/\hbar} \stackrel{!}{=} H * \text{Exp}(Ht) = \sum_E H * \pi_E e^{-iEt/\hbar} \quad (1.96)$$

durch Vergleich der Koeffizienten der Entwicklung, daß die Projektoren die Sterneigenwertgleichung⁶

$$H * \pi_E = E \pi_E \quad (1.97)$$

erfüllen, die bereits in (1.91) aufgetreten ist. Da die beiden Faktoren des Produkts $H * \text{Exp}(Ht)$ offensichtlich vertauschen, erhält man mit der Fourier-Dirichlet-Entwicklung (1.95) außerdem noch

$$H * \pi_E = \pi_E * H, \quad (1.98)$$

was der Gleichung (1.89) entspricht.

1.7.2. Die Projektoren

Aus der letzten Gleichung von (1.96) folgt für $t = 0$

$$H = \sum_E E \pi_E. \quad (1.99)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (1.97) ergibt sich

$$H * \pi_E = \sum_{E'} E' \pi_{E'} * \pi_E = E \pi_E, \quad (1.100)$$

so daß offensichtlich

$$\pi_E * \pi_{E'} = \delta_{E,E'} \pi_E \quad (1.101)$$

gelten muß. Zusammen mit der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_E \pi_E = 1, \quad (1.102)$$

die man für $t = 0$ aus (1.95) erhält, zeigt dies die *Projektoreigenschaft* der π_E und rechtfertigt somit deren Bezeichnung.

Mit (1.98) folgt aus (1.97) durch komplexe Konjugation

$$H * \bar{\pi}_E = \bar{E} \bar{\pi}_E. \quad (1.103)$$

Wenn π_E Lösung der Gleichung (1.97) mit dem Eigenwert E ist, dann ist $\bar{\pi}_E = \pi_{\bar{E}}$ eine Lösung mit Eigenwert \bar{E} . In physikalisch sinnvollen Situationen ist E reell, so daß π_E und $\bar{\pi}_E$ identisch sind. Daraus folgt, daß π_E eine reelle Funktion ist. Wie aber bereits in Unterabschnitt 1.6.3 festgestellt

⁶Die Sterneigenwertgleichung tritt in [BFF⁺1978b] nicht auf.

wurde, handelt es sich bei den reellen Lösungen der Sterneigenwertgleichung (1.97) bzw. (1.91) gerade um die Wigner-Funktionen.

Integriert man die Gleichung $\pi_E * \pi_E = \pi_E$ unter Berücksichtigung von (1.57) über den gesamten Phasenraum, dann erhält man (1.39) zurück. Da diese nicht-lineare Gleichung die Normierung der Wigner-Funktionen impliziert, sind auch die hier definierten Projektoren gemäß

$$\text{Tr}(\pi_E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dp \pi_E = 1, \quad (1.104)$$

normiert, wobei hier die Definition der Phasenraumspur $\text{Tr}(\dots)$ aus (1.61) Verwendung findet.

Damit ist die Zusammenfassung der Deformationsquantisierung weitgehend abgeschlossen. Zum Vergleich mit dem Operatorformalismus werden in Tabelle 1.1 einige wesentliche Gleichungen gegenübergestellt.

	Operatorformalismus	Deformationsquantisierung
<i>Adjungieren</i>	$(\hat{f}\hat{g})^\dagger = \hat{g}^\dagger\hat{f}^\dagger$	$\overline{f * g} = \bar{g} * \bar{f}$
<i>Bewegungsgleichung</i>	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]$	$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \pi(t) = [H(t), \pi(t)]_*$
<i>zeitunabhängige Bewegungsgleichung</i>	$\hat{H} \hat{\rho} = E \hat{\rho}$ mit $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$	$H * \pi = E \pi$ mit $\bar{\pi} = \pi$
<i>im Heisenbergbild</i>	$\frac{d\hat{f}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}_H, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{f}_H}{\partial t}$	$\frac{df}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [f, H]_* + \frac{\partial f}{\partial t}$
<i>Erwartungswert</i>	$\langle \hat{f} \rangle = \text{tr}(\hat{f}\hat{\rho})$	$\langle f \rangle = \text{Tr}(f\pi) = \int \frac{dq dp}{2\pi\hbar} f \pi$
<i>Zeitentwicklung</i>	$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$	$U(t) = e_*^{-iHt/\hbar} = \text{Exp}(Ht)$

Tabelle 1.1.: Vergleich der Operatorformulierung der Quantenmechanik und der Deformationsquantisierung. Bei $\hat{f} = \varrho_{\text{Weyl}}(f)$ und $\hat{g} = \varrho_{\text{Weyl}}(g)$ handelt es sich um die zu f und g korrespondierenden Operatoren.

1.7.3. Die Unschärferelation

Wenn sich ein System in einem Zustand befindet, der durch $\pi(q, p)$ beschrieben wird, dann lautet der Erwartungswert $\langle f \rangle$ der Observablen $f(q, p)$ gemäß (1.37)

$$\langle f \rangle = \text{Tr}(f\pi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dp f(q, p) \pi(q, p). \quad (1.105)$$

Abhängig von der Wahl der Schrödinger- oder Heisenberg-Darstellung kann entweder $\pi(q, p)$ oder $f(q, p)$ von der Zeit abhängen. Für die folgende Herleitung der Unschärferelation dient der Artikel [Zac2002] als Grundlage.

Obwohl der Projektor $\pi(q, p)$ negative Werte annehmen kann, gilt

$$\langle f * \bar{f} \rangle \geq 0. \quad (1.106)$$

Aus den Gleichungen $\pi * \pi = \pi$ und $\bar{\pi} = \pi$ folgt nämlich:

$$\int dq dp (f * \bar{f}) \pi = \int dq dp (f * \bar{f}) (\pi * \pi) = \int dq dp \pi * f * \bar{f} * \pi = \int dq dp |\pi * f|^2 \geq 0. \quad (1.107)$$

Hier wurden die Eigenschaften (1.47), (1.56) und (1.57) des Moyal-Produkts benutzt.

Im Anhang A.4 wird gezeigt, wie aus (1.106) die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{mit} \quad \Delta q = \sqrt{\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle} \quad (1.108)$$

folgt.

1.8. Interpretation

In diesem Abschnitt wird die Interpretation des zuvor diskutierten Formalismus klargelegt und die Verbindung zur klassischen Mechanik verdeutlicht. Als Grundlage dazu dient Abschnitt 2 (b) aus [BFF⁺1978b].

In der klassischen Mechanik übernehmen die Größen q und p eine Doppelrolle:

- Einerseits stellen sie Elemente einer Poisson-Algebra mit $\{q, p\} = 1$ dar und
- andererseits sind sie Lösungen von Bewegungsgleichungen mit bestimmten Anfangsbedingungen, d.h. sie bestimmen eine Trajektorie $(q, p)(t)$ auf dem Phasenraum. Diese Funktionen geben zu jedem Zeitpunkt genaue Vorhersagen für Messungen.

Um eine quantenmechanische Beschreibung zu ermöglichen, werden die Rollen in der Deformationsquantisierung neu verteilt:

Zustand: Ein physikalischer Zustand wird durch eine (zeitunabhängige) Wigner-Funktion $\pi(q, p)$ repräsentiert, die die Anfangsbedingungen angibt. Im Fall einer zeitunabhängigen Hamilton-Funktion sind die Wigner-Funktionen Lösungen der Sterneigenwertgleichung (1.91)

$$H(q, p) * \pi(q, p) = E \pi(q, p). \quad (1.109)$$

Observable: Eine Observable $f(q, p; t)$ ist eine glatte Funktion auf dem Phasenraum. Ihre Zeitabhängigkeit wird durch die Bewegungsgleichung (1.86)

$$\frac{d}{dt} f(q, p; t) = \frac{1}{i\hbar} [f(q, p; t), H(q, p)]_* + \frac{\partial}{\partial t} f(q, p; t) \quad (1.110)$$

bestimmt. Man beachte dabei, daß es sich bei den Argumenten q und p um die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf dem Phasenraum handelt und nicht um Funktionen, die eine Trajektorie beschreiben.

Meßwert: Befindet sich ein System in einem Zustand, der durch die Wigner-Funktion $\pi(q, p)$ beschrieben wird, dann liefert die Gleichung (1.105)

$$\langle f \rangle_t = \text{Tr}(f \pi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dq dp f(q, p; t) \pi(q, p) \quad (1.111)$$

den Erwartungswert für eine Messung der Observablen f zum Zeitpunkt t . Das tatsächliche Meßergebnis unterliegt einer quantenmechanischen Unschärfe und kann daher vom Erwartungswert abweichen.

Die Bewegungsgleichung (1.110) stellt eine Brücke zwischen der klassischen Mechanik und der Formulierung der Quantenmechanik auf dem Hilbert-Raum dar, was in

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \xleftarrow{\hbar \rightarrow 0} \quad \frac{df}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [f, H]_* + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{eWeyl}} \quad \frac{d\hat{f}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}_H, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{f}_H}{\partial t} \quad (1.112)$$

verdeutlicht wird.

Im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ gelangt man daher von (1.110) zur klassischen Bewegungsgleichung. Da aber die Observable f aus der Deformationsquantisierung keine Vorhersage für den Meßwert erlaubt, kann sie nicht direkt mit einer klassischen Größe verglichen werden. Es stellt sich daher die Frage, auf welche Weise man im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ die klassische Mechanik zurückerhält. Wie Gleichung (1.111) zeigt, müssen die Wigner-Funktionen für den klassischen Grenzfall bestimmt werden, um den Erwartungswert $\langle f \rangle_t$ angeben zu können.

Zunächst wird die Verteilungsfunktion

$$\rho(q, p) = \frac{\pi(q, p)}{2\pi\hbar} \quad \text{mit} \quad \int dq dp \rho(q, p) = 1 \quad (1.113)$$

definiert, wobei die letzte Gleichung aus (1.35) folgt. Für $\hbar = 0$ erhält man dann aus (1.109)

$$H(q, p) \rho(q, p) = E \rho(q, p). \quad (1.114)$$

Die Lösungen dieser Gleichung lautet

$$\rho(q, p) = \delta(q - q') \delta(p - p') \quad \text{mit} \quad E = H(q', p'), \quad (1.115)$$

wobei q' und p' beliebige Zahlen sind⁷. Bei $\delta(x)$ handelt es sich um die übliche Dirac- δ -Distribution mit $\int dx f(x) \delta(x - x') = f(x')$, so daß die Normierungsbedingung (1.113) offensichtlich erfüllt ist.

Als Beispiel sei nun die Observable $f = q$ für ein freies Teilchen mit $H = p^2/2m$ betrachtet. Nach Gleichung (1.87) besitzt $f = q$ die gleiche Zeitentwicklung, die auch in der klassischen Mechanik gültig ist, d. h.

$$q(t) = q + \frac{p}{m}t. \quad (1.116)$$

Im Spezialfall $\hbar = 0$ wird das System durch die Verteilungsfunktion ρ aus Gleichung (1.115) bestimmt, wobei q' und p' vorgegebene reelle Zahlen sind. Als Erwartungswert für die Observable q zum Zeitpunkt t erhält man daher gemäß (1.111)

$$\langle q \rangle_t = \int dq dp q(t) \rho = \int dq dp \left(q + \frac{p}{m}t \right) \delta(q - q') \delta(p - p') = q' + \frac{p'}{m}t. \quad (1.117)$$

Daher entsprechen q' und p' den klassischen Anfangsbedingungen.

An diesem Beispiel werden zwei Tatsachen deutlich:

- Im klassischen Grenzfall kann man die Koordinaten des Phasenraums q, p mit den vorgegebenen Zahlenwerten q', p' identifizieren, wie der Vergleich von (1.116) und (1.117) zeigt.
- Außerdem ist $\langle q \rangle_t$ eine klassische Trajektorie, da die Messung für $\hbar = 0$ keiner Unschärfe unterliegt (siehe Unterabschnitt 1.7.3).

Letzteres wird auch daran deutlich, daß ρ bis auf einen Punkt im Phasenraum Null ist. Die Mittelung in (1.117) ist praktisch keine und entspricht nur einem Einsetzen der Anfangswerte q' und p' .

Somit kann man schließlich feststellen, daß die Deformationsquantisierung im klassischen Grenzfall die übliche klassische Mechanik liefert.

⁷Man beachte, daß $H(q, p)$ eine Funktion auf dem Phasenraum ist, aber $E = H(q', p')$ für vorgegebene Wert von q' und p' eine konstante Zahl.

2. Der harmonische Oszillator

Als erste Anwendung der Deformationsquantisierung soll der harmonische Oszillator dienen, der durch die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (2.1)$$

charakterisiert wird. Da es sich um ein eindimensionales System handelt, hat das Moyal-Produkt die in (1.41) angegebene Form.

Dieses Kapitel besteht aus zwei Teilen. Im ersten Abschnitt werden die Wigner-Funktionen bestimmt und im zweiten deren Projekteigenschaften.

2.1. Bestimmung der Wigner-Funktionen

Die Wigner-Funktionen und die dazugehörigen Energiewerte werden im folgenden auf vier verschiedenen Wegen ermittelt:

1. Zuerst werden die Wigner-Funktionen mit Hilfe von Gleichung (1.33) aus den bekannten Eigenzuständen in der Ortsraumdarstellung berechnet,
2. dann werden sie als Lösungen einer Differentialgleichung bestimmt, die man aus der Sterneigenwertgleichung (1.91) erhält,
3. danach wird die Sterneigenwertgleichung mit algebraischen Methoden gelöst
4. und schließlich bestimmt man die Projektoren über die Fourier-Dirichlet-Entwicklung (1.95) des Sternexponentials (1.94).

Anhand des harmonischen Oszillators soll die Äquivalenz dieser vier Lösungswege demonstriert und die Methoden der Deformationsquantisierung an einem expliziten Beispiel illustriert werden.

Darüber hinaus wird im vierten Lösungsweg gezeigt, wie das umbrale Kalkül im Sternproduktformalismus sinnvoll angewendet werden kann. Dies legt die Vermutung nahe, daß man dieses Vorgehen auch für andere Problemstellungen bzw. andere Sternprodukte als das Moyal-Produkt verallgemeinern kann. Obwohl die Verwendung des umbralen Kalküls im Kontext der Deformationsquantisierung noch nicht diskutiert wurde, wird dieser Punkt nicht weiter vertieft, da dies zu weit vom Thema abweichen und außerdem den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen würde.

2.1.1. Wigner-Funktionen aus den Ortsraumzuständen

Zuerst sollen die Wigner-Funktionen nach Gleichung (1.33)

$$\pi_n(q, p) = 2 \int dy \psi_n^*(q + y) \psi_n(q - y) e^{2ipy/\hbar} \quad (2.2)$$

bestimmt werden, wobei der Rechnung aus [HOSW1984, S. 143f.] gefolgt wird. Die bekannten Eigenzustände des harmonischen Oszillators kann man mit Hilfe der Hermite-Polynome [Weia]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2} \quad (2.3)$$

in der Form

$$\psi_n(q) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\alpha^2 q^2/2} H_n(\alpha q) \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (2.4)$$

angeben (siehe z. B. [LL1979, §23]).

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die Wigner-Funktion (2.2) erhält man

$$\begin{aligned} \pi_n(q, p) &= 2 \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} \int dy e^{-\alpha^2(q+y)^2/2} H_n(\alpha(q+y)) e^{-\alpha^2(q-y)^2/2} H_n(\alpha(q-y)) e^{2ipy/\hbar} \\ &= \frac{2}{2^n \sqrt{\pi} n!} e^{-\alpha^2 q^2} \alpha \int dy H_n(\alpha q + \alpha y) H_n(\alpha q - \alpha y) e^{-(\alpha^2 y^2 - 2ipy/\hbar)} \\ &= \frac{2(-1)^n}{2^n \sqrt{\pi} n!} e^{-\alpha^2 q^2} \int dz H_n(z + \alpha q) H_n(z - \alpha q) e^{-(z^2 - 2ipz/\alpha\hbar)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Im letzten Schritt wurde $z = \alpha y$ definiert und die Relation $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ benutzt.

Mit der Gleichung

$$\int dz H_n(z - a) H_n(z + a) e^{-(z^2 - 2ibz)} = 2^n \sqrt{\pi} n! e^{-b^2} L_n(2(a^2 + b^2)) \quad (2.6)$$

aus [MF1953] ergibt sich

$$\pi_n(q, p) = 2(-1)^n e^{-(\alpha^2 q^2 + p^2/\alpha^2 \hbar^2)} L_n(2(\alpha^2 q^2 + p^2/\alpha^2 \hbar^2)), \quad (2.7)$$

so daß man mit $\alpha^2 q^2 + p^2/\alpha^2 \hbar^2 = m\omega q^2/\hbar + p^2/m\omega\hbar = 2H/\hbar\omega$ das Ergebnis

$$\pi_n(q, p) = 2(-1)^n e^{-2H/\hbar\omega} L_n\left(\frac{4H}{\hbar\omega}\right) \quad (2.8)$$

erhält. Die Graphen für den Grundzustand sowie für die ersten drei angeregten Zustände sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

2.1.2. Lösung der Sterneigenwertgleichung als Differentialgleichung

Die Bestimmung der Wigner-Funktionen des harmonischen Oszillators als Lösung der Sterneigenwertgleichung (1.91) wurde zuerst von Fairlie in [Fai1964] durchgeführt. Die hier dargestellte Lösung ist aus [CFZ1998] entnommen.

Mit Hilfe der Shift-Darstellung (1.48) des Moyal-Produkts kann man die Sterneigenwertgleichung (1.91) für den harmonischen Oszillator als Differentialgleichung

$$H * \pi = \left(\frac{1}{2m} \left(p - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_q \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} \left(q + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_p \right)^2 \right) \pi = E\pi \quad (2.9)$$

schreiben. Mit

$$\left(p - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_q \right)^2 = p^2 - \frac{\hbar^2}{4} \partial_q^2 - i\hbar p \partial_q \quad \text{und} \quad \left(q + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_p \right)^2 = q^2 - \frac{\hbar^2}{4} \partial_p^2 + i\hbar q \partial_p \quad (2.10)$$

erhält man die zwei Gleichungen

$$\frac{1}{2m} \left(p^2 - \frac{\hbar^2}{4} \partial_q^2 \right) + \frac{m\omega^2}{2} \left(q^2 - \frac{\hbar^2}{4} \partial_p^2 \right) \pi = E\pi \quad \text{und} \quad \left(\frac{m\omega^2}{2} q \partial_p - \frac{1}{2m} p \partial_q \right) \pi = 0 \quad (2.11)$$

für den Real- bzw. Imaginärteil von (2.9).

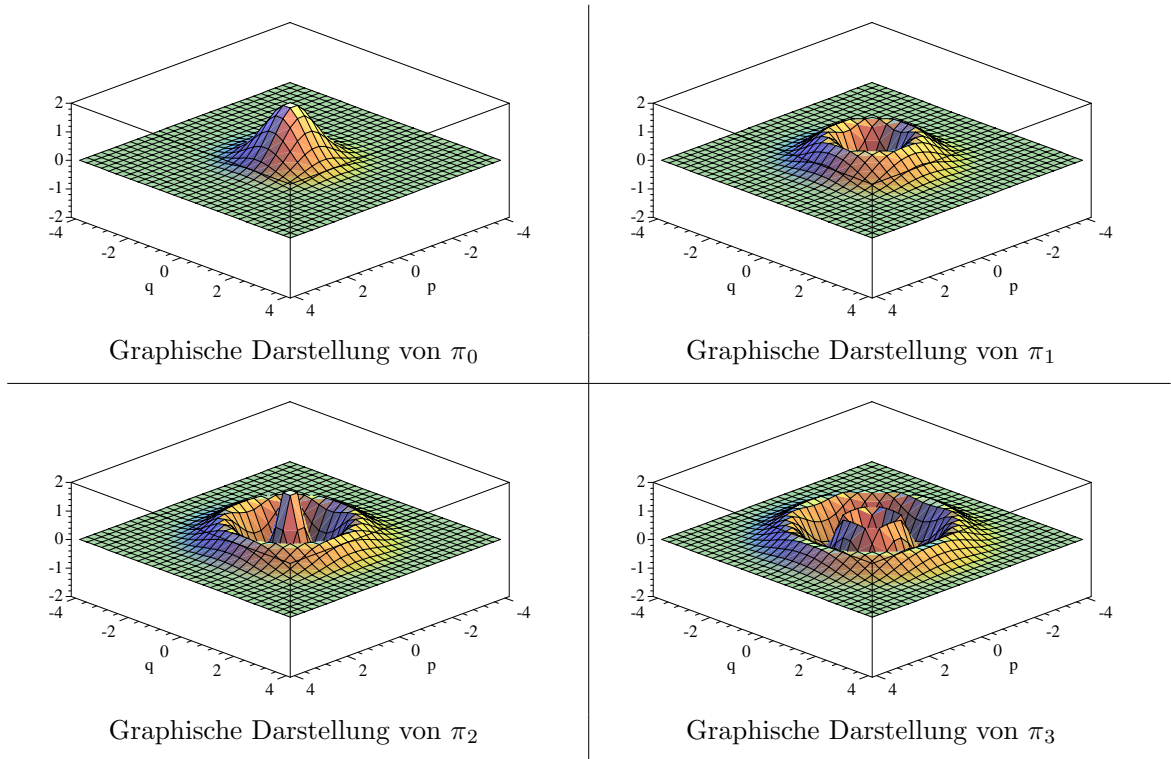


Abbildung 2.1.: Graphische Darstellungen der ersten vier Wigner-Funktionen des harmonischen Oszillators. Dabei wurde formal $\hbar = 1$, $2m = 1$ und $\omega = 2$ gewählt, so daß $H = p^2 + q^2$ gilt. Die Definition von π_n ist z. B. in Gleichung (2.8) zu finden. Die Wigner-Funktion des Grundzustands ist die einzige, die keine negativen Werte annimmt.

Aus der letzten Gleichung folgt, daß π nur von H bzw. von der dimensionslosen Variablen

$$x = \frac{2H}{\hbar\omega} = \frac{p^2}{m\hbar\omega} + \frac{m\omega}{\hbar}q^2 \quad (2.12)$$

abhängt. Daher kann man die erste Gleichung aus (2.11) mit

$$\partial_p \pi(x) = \frac{2p}{m\hbar\omega} \partial_x \pi(x), \quad \partial_q \pi(x) = \frac{2m\omega q}{\hbar} \partial_x \pi(x) \quad \text{und} \quad E = \frac{\hbar\omega}{2} \varepsilon \quad (2.13)$$

als Differentialgleichung in x schreiben:

$$\frac{\hbar\omega}{2} (x - \partial_x - x\partial_x^2) \pi = \frac{\hbar\omega}{2} \varepsilon E \quad \Leftrightarrow \quad x\pi'' + \pi' + (\varepsilon - x)\pi = 0, \quad (2.14)$$

wobei π' und π'' für die erste bzw. zweite Ableitung nach x steht.

Wählt man den Ansatz $\pi(x) = e^{-x}\varphi(x)$, dann folgt aus

$$\pi' = e^{-x}(\varphi' - \varphi) \quad \text{und} \quad \pi'' = e^{-x}(\varphi'' - 2\varphi' + \varphi),$$

daß (2.14) als Differentialgleichung

$$x\varphi'' + (1 - 2x)\varphi' + (\varepsilon - 1)\varphi = 0 \quad (2.15)$$

geschrieben werden kann.

Gleichung (2.15) wird durch die Laguerre-Polynome $L_n(2x)$ gelöst [Weib], wobei verlangt werden muß, daß $n = (\varepsilon - 1)/2$ eine nicht-negative ganze Zahl ist. Die unnormierten Eigenfunktionen

$$\pi_n(x) \propto e^{-x} L_n(2x) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_n \propto \exp\left(-\frac{2H}{\hbar\omega}\right) L_n\left(\frac{4H}{\hbar\omega}\right) \quad (2.16)$$

haben daher die Energieeigenwerte

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (2.17)$$

Die Normierung der Wigner-Funktionen wird im nächsten Unterabschnitt vorgenommen.

2.1.3. Lösung der Sterneigenwertgleichung mit algebraischen Methoden

Die hier beschriebene Herleitung ist an Kapitel 3 und 5 aus [DV2002] angelehnt.

Durch das Einführen von holomorphen Variablen¹

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (m\omega q + ip) \quad \text{und} \quad \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (m\omega q - ip) \quad (2.18)$$

kann die Hamilton-Funktion auf die Form $H = \omega \bar{a}a$ gebracht werden. Mit dem transformierten Moyal-Produkt

$$f * g = f e^{\hbar(\bar{\partial}_a \bar{\partial}_{\bar{a}} - \bar{\partial}_{\bar{a}} \bar{\partial}_a)/2} g \quad (2.19)$$

kann man leicht die elementare Kommutatorrelation

$$[a, \bar{a}]_* = a * \bar{a} - \bar{a} * a = \hbar \quad (2.20)$$

herleiten, aus der durch Rekursion die Gleichungen

$$[a, \bar{a}^n]_* = \hbar n \bar{a}^{n-1} \quad \text{und} \quad [a^n, \bar{a}]_* = \hbar n a^{n-1} \quad (2.21)$$

folgen².

Mit der Definition der Besetzungszahlfunktion

$$N = \bar{a} * a = \bar{a}a - \frac{\hbar}{2} \quad (2.22)$$

gelangt man zur Hamilton-Funktion

$$H = \omega \bar{a}a = \omega \left(N + \frac{\hbar}{2}\right), \quad (2.23)$$

so daß jede Lösung von

$$N * \pi = \hbar n \pi \quad (2.24)$$

mit reellem n auch eine Lösung der Sterneigenwertgleichung (1.91) in der Form

$$H * \pi_n = E_n \pi_n \quad (2.25)$$

ist. Die Funktion π_0 proportional zu $e^{-2\bar{a}a/\hbar}$ erfüllt die Gleichungen³

$$a * \pi_0 = a\pi_0 + \frac{\hbar}{2} \partial_{\bar{a}} \pi_0 = 0 \quad (2.26)$$

¹Siehe auch Kap. 5 in [HH2002b].

²Man beachte, daß $a^n = a^{n*}$ gilt, so daß man unter Ausnutzung der Assoziativität des Sternprodukts $a^n * \bar{a} = a^{n-1} * (a * \bar{a})$ schreiben kann.

³In der Bestimmung von π_0 wird wesentlich von der Rechnung aus Kapitel 4 aus [DV2002, Kap. 4] abgewichen. Die hier dargestellte Herleitung ist deutlich kürzer.

und löst somit (2.24) für $n = 0$.

Im folgenden wird bewiesen, daß alle weiteren Lösungen durch

$$\pi_n = \frac{1}{\hbar^n n!} \bar{a}^n * \pi_0 * a^n \quad (2.27)$$

gegeben sind, wobei n ganzzahlig und positiv ist. Man beachte, daß diese Definition gewährleistet, daß alle π_n reelle Funktionen sind. Mit der Gleichung

$$a * \pi_n = \frac{1}{\hbar^n n!} [a, \bar{a}^n]_* * \pi_0 * a^n = \frac{1}{\hbar^{n-1} (n-1)!} \bar{a}^{n-1} * \pi_0 * a^n = \pi_{n-1} * a, \quad (2.28)$$

bei deren Herleitung zuerst (2.26) und dann (2.21) verwendet wurde, folgt direkt

$$N * \pi_n = \bar{a} * \pi_{n-1} * a = \hbar n \pi_n, \quad (2.29)$$

was zu zeigen war. Die Energiewerte E_n der Lösungen π_n von (2.25) lauten daher

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.30)$$

Um die Analogie der holomorphen Variablen \bar{a} und a zu den *Erzeugungs-* bzw. *Vernichtungsoperatoren* zu verdeutlichen, sei noch auf die Gültigkeit der beiden Gleichungen

$$\bar{a} * \pi_n * a = \hbar(n+1) \pi_{n+1} \quad \text{und} \quad a * \pi_n * \bar{a} = \hbar n \pi_{n-1} \quad (2.31)$$

hingewiesen. Die erste Gleichung folgt direkt aus (2.29), wenn man n durch $n+1$ ersetzt. Die zweite Gleichung ergibt sich, indem man (2.28) vom rechts mit \bar{a} multipliziert, wobei die zweite Kommutatorregel aus (2.21) zu beachten ist.

Schließlich sind die Wigner-Funktionen noch entsprechend der Vorschrift aus Gleichung (1.35), also

$$\int dq dp \pi_n = 2\pi\hbar, \quad (2.32)$$

zu normieren, wobei in der letzten Gleichung die Integration über den gesamten Phasenraum zu erfolgen hat. Als erster Schritt wird gezeigt, daß bei normiertem π_0 auch alle anderen Wigner-Funktionen π_n , die durch (2.27) definiert sind, der Gleichung (2.32) gehorchen.

Mit der Spureigenschaft (1.57) folgt aus Gleichung (2.29) für $n \geq 1$ die Rekursionsformel

$$\int dq dp \pi_n = \int dq dp \frac{N}{\hbar n} * \pi_n = \frac{1}{\hbar n} \int dq dp a * \pi_n * \bar{a} = \int dq dp \pi_{n-1}, \quad (2.33)$$

aus der sich direkt die Behauptung ergibt. Es bleibt noch übrig, den Normierungsfaktor von $\pi_0 \propto e^{-2\bar{a}a/\hbar} = e^{-2H/\hbar\omega}$ zu bestimmen. Der Rechnung

$$\int dq dp e^{-2H/\hbar\omega} = \left(\int dp e^{-p^2/\hbar\omega m} \right) \cdot \left(\int dq e^{-m\omega q^2/\hbar} \right) = \sqrt{\pi\hbar\omega m} \cdot \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = \pi\hbar \quad (2.34)$$

entnimmt man durch Vergleich mit (1.35), daß die normierte Wigner-Funktion des Grundzustands

$$\pi_0 = 2e^{-2\bar{a}a/\hbar} = 2e^{-2H/\hbar\omega} \quad (2.35)$$

lautet.

Zum Vergleich mit dem vorhergehenden Ergebnis (2.8) soll mit Hilfe von (2.35) und (2.27) eine explizite Darstellung aller Lösungen gefunden werden. Mit der Darstellung des Moyal-Produkts (2.19) nimmt die Wigner-Funktionen aus (2.27) die Gestalt

$$\pi_n = \frac{2}{\hbar^n n!} \left(\bar{a} - \frac{\hbar}{2} \bar{\partial}_a \right)^n e^{-2\bar{a}a/\hbar} \left(a - \frac{\hbar}{2} \bar{\partial}_{\bar{a}} \right)^n \quad (2.36)$$

an, wobei der „Bopp-Shift“ (1.48) verwendet wurde und daher alle hier auftretenden Ableitungen nur auf $e^{-2\bar{a}a/\hbar}$ wirken. Auf Grund der Beziehung $-(\hbar/2)\partial_{\bar{a}}e^{-2\bar{a}a/\hbar} = ae^{-2\bar{a}a/\hbar}$ kann die rechte Klammer durch $2a$ ersetzt werden, womit man nach der Variablensubstitution $x = 2\bar{a}a/\hbar = 2H/\hbar\omega$

$$\pi_n = \frac{2}{\hbar^n n!} \left(\bar{a} - \frac{\hbar}{2} \partial_a \right)^n \left((2a)^n e^{-2\bar{a}a/\hbar} \right) = (-1)^n \frac{2}{n!} (\partial_x - 1)^n (x^n e^{-x}) \quad (2.37)$$

erhält. Die Rechnung

$$\partial_x e^x f(x) = e^x f(x) + e^x \partial_x f(x) \Leftrightarrow (\partial_x - 1)e^x = e^x \partial_x \Leftrightarrow (\partial_x - 1)^n e^x = e^x \partial_x^n \quad (2.38)$$

liefert eine Operatoridentität, mit dessen Hilfe man die Wigner-Funktionen aus (2.37) in der Form

$$\pi_n = 2(-1)^n \frac{e^x}{n!} \partial_x^n (x^n e^{-2x}) = 2(-1)^n e^{-2H/\hbar\omega} L_n \left(\frac{4H}{\hbar\omega} \right) \quad (2.39)$$

schreiben kann, wobei hier wiederum die Rodrigues-Formel $L_n(x) = e^x \partial_x^n (x^n e^{-x})/n!$ für die Laguerre-Polynome verwendet wurde.

2.1.4. Herleitung und Entwicklung des Sternexponentials

Abschließend werden die Wigner-Funktionen π_n zur Hamilton-Funktion (2.1) über eine Fourier-Dirichlet-Entwicklung (1.95) des Sternexponential aus Gleichung (1.94) bestimmt.

Wie im vorangegangenen Unterabschnitt werden auch hier die holomorphen Koordinaten a und \bar{a} aus Gleichung (2.18) verwendet, so daß die in Gleichung (2.19) auftretende Darstellung des Moyal-Produkts relevant ist. Mit der Hamilton-Funktion aus (2.23) kann das Sternexponential in der Form

$$\text{Exp}(Ht) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{i\hbar} \right)^k H^{k*} = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k*} \frac{T^k}{k!} \quad \text{mit} \quad y = \frac{2H}{i\hbar\omega} = \frac{2}{i\hbar} \bar{a}a \quad \text{und} \quad T = \frac{\omega t}{2} \quad (2.40)$$

angegeben werden, wobei die Aufgabe darin besteht, die Folge der y^{k*} zu bestimmen. Mit dem Sternexponential in der Form (2.19) erhält man aus der Rechnung für $l \geq 1$

$$\begin{aligned} y * y^l &= \frac{2}{i\hbar} \left(\bar{a} - \frac{\hbar}{2} \partial_a \right) \left(a + \frac{\hbar}{2} \partial_{\bar{a}} \right) \left(\frac{2}{i\hbar} \bar{a}a \right)^l = \frac{1}{i^{l+1}} \left(\frac{2}{\hbar} \bar{a}a - a\partial_a + \bar{a}\partial_{\bar{a}} - \frac{\hbar}{2} \partial_a \partial_{\bar{a}} \right) \left(\frac{2}{\hbar} \bar{a}a \right)^l \\ &= \left(\frac{2}{i\hbar} \bar{a}a \right)^{l+1} - \frac{1}{i^{l+1}} \frac{\hbar}{2} \partial_a \partial_{\bar{a}} \left(\frac{2}{\hbar} \bar{a}a \right)^l = i \left(\frac{2}{i\hbar} \bar{a}a \right)^{l+1} + l^2 \left(\frac{2}{i\hbar} \bar{a}a \right)^{l-1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

die Gleichung

$$y * y^l = \begin{cases} y^{l+1} + l^2 y^{l-1} & , \text{ für } l \geq 1 \\ y & , \text{ für } l = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Die Anfangsbedingung für die Folge y^{k*} lautet $y^{0*} = 1$, so daß auf Grund von (2.42) auch alle weiteren Folgenglieder Polynome in y sind. Da der Grad von y^{k*} gemäß (2.42) bei jedem Rekursionsschritt $y^{(k+1)*} = y * y^{k*}$ genau um eins erhöht wird, ist y^{k*} ein Polynom der Ordnung k und kann daher in der Form $y^{k*} = \sum_{l=0}^k A_{k,l} y^l$ angegeben werden.

Mit der Anfangsbedingung und der Vorschrift (2.42) ist jedes Folgeelement y^{k*} eindeutig bestimmt, z.B. lauten die ersten sechs Glieder dieser Folge

$$y^{0*} = 1, \quad y^{1*} = y, \quad y^{2*} = y^2 + 1, \quad (2.43a)$$

$$y^{3*} = (y^3 + 4y) + y = y^3 + 5y, \quad (2.43b)$$

$$y^{4*} = (y^4 + 9y^2) + 5(y^2 + 1) = y^4 + 14y^2 + 5 \quad (2.43c)$$

$$\text{und} \quad y^{5*} = (y^5 + 16y^3) + 14(y^3 + 4y) + y = y^5 + 30y^3 + 61y, \quad (2.43d)$$

wobei die Terme in den Klammern mit Hilfe der Gleichung (2.42) bestimmt wurden. Die Koeffizienten $A_{k,l}$ der Darstellung $y^{k*} = \sum_{l=0}^k A_{k,l} y^l$ sind als Folge A060058⁴ in der „On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ von N. J. A. Sloane bekannt.

Im folgenden wird mit Methoden des umbralen Kalküls [Rom1984] gezeigt, daß (2.40) die Reihenentwicklung der Funktion $(\cos T)^{-1} e^{y \tan T}$ ist. Dazu werden zuerst die dafür benötigten Definitionen und Sätze angegeben, die auch in [Weic] zu finden sind.

Gegeben sei ein Paar von analytischen Funktionen $g(t)$ und $f(t)$, deren Taylor-Entwicklung mit einem Term proportional zu 1 bzw. t anfängt. Durch die Entwicklung [Rom1984, S. 18]

$$\frac{1}{g(f^{-1}(t))} e^{y f^{-1}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(y) \frac{t^k}{k!} \quad (2.44)$$

wird eine Folge von Polynomen $s_k(y)$ der Ordnung k definiert, die *Sheffer-Polynome*⁵ zu $(g(t), f(t))$ genannt werden. Das einfachste Beispiel ist $s_k(y) = y^k$ als Sheffer-Folge zu $(1, t)$.

Die Sheffer-Polynome erfüllen die Rekursionsgleichung [Rom1984, S. 50]

$$s_{k+1}(y) = \left(y - \frac{g'(t)}{g(t)} \right) \frac{1}{f'(t)} \Big|_{t=\partial_y} s_k(y), \quad (2.45)$$

wobei der Ausdruck, der von t abhängt, zuerst als Polynom zu schreiben ist und anschließend t durch $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ersetzt werden muß. Unabhängig von g und f gilt $s_0(y) = 1$, was als Anfangsbedingung für die Rekursion dient.

Da die Funktionen

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4) \quad \text{und} \quad f(t) = \arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + O(t^5) \quad (2.46)$$

die oben diskutierten Voraussetzungen erfüllen, ist die Funktion

$$\frac{1}{g(f^{-1}(t))} e^{y f^{-1}(t)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} e^{y \tan t} = \frac{1}{\cos t} e^{y \tan t} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(y) \frac{t^k}{k!} \quad (2.47)$$

gemäß (2.44) Erzeugende von Sheffer-Polynomen $s_k(y)$, die durch die Gleichung (2.45) bestimmt werden können. Mit den Ableitungen

$$g'(t) = -\frac{1}{2} (1+t^2)^{-\frac{3}{2}} 2t = \frac{-t}{1+t^2} g(t) \quad \text{und} \quad f'(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad (2.48)$$

erhält man die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} s_{k+1}(y) &= \left(y + \frac{t}{1+t^2} \right) (1+t^2) \Big|_{t=\partial_y} s_k(y) \\ &= (y(1+t^2) + t) \Big|_{t=\partial_y} s_k(y) \\ &= (y + (y\partial_y + 1)\partial_y) s_k(y). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Aus der Rechnung

$$(y\partial_y + 1)\partial_y y^l = l(y\partial_y + 1)y^{l-1} = l y^{l-1} ((l-1) + 1) = l^2 y^{l-1} \quad (2.50)$$

⁴Diese Folge wurde von Dr. habil. Wolfdieter Lang (ITP Universität Karlsruhe) angegeben, dem ich hier für den freundlichen Kontakt per Email und den nützlichen Hinweis auf das Buch von Steven Roman [Rom1984] danken möchte.

⁵In der Literatur gibt es zum Teil abweichende Definitionen der Sheffer-Polynome. Sheffer selbst hat die Polynome $s_n(x)/n!$ Folge vom *A-Typ Null* („A-type zero“) genannt und gelegentlich werden sie daher auch Sheffer-Folgen genannt (siehe Anmerkung auf Seite 19 von [Rom1984]). Für die Sheffer-Folgen wird hier den Definitionen aus Romans Buch [Rom1984] gefolgt.

für $l \geq 1$ folgt die Gleichung

$$(y + (y\partial_y + 1)\partial_y)y^l = \begin{cases} y^{l+1} + l^2y^{l-1} & , \text{ für } l \geq 1 \\ y & , \text{ für } l = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

die von derselben Form wie (2.42) ist. Da auch das erste Folglied für $l = 0$ übereinstimmt, sind die beiden Folgen y^{k*} und $s_k(y)$ identisch. Daher handelt es sich bei y^{k*} um die Sheffer-Folge $s_k(y)$ zu den beiden Funktionen g und f aus (2.46). Durch Vergleich der Gleichungen (2.40) und (2.47) folgt dann die Behauptung

$$\text{Exp}(Ht) = \frac{1}{\cos T} e^{y \tan T} = \frac{1}{\cos \frac{\omega t}{2}} \exp\left(\frac{2H}{i\hbar\omega} \tan \frac{\omega t}{2}\right). \quad (2.52)$$

Um aus dem Sternexponential $\text{Exp}(Ht)$ die Wigner-Funktionen $\pi_n(\bar{a}, a)$ zu gewinnen, muß noch eine Fourier-Dirichlet-Entwicklung gemäß (1.95) durchgeführt werden. Setzt man voraus, daß die Energieniveaus $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ aus Gleichung (2.30) bereits bekannt sind, dann ist die Fourier-Dirichlet-Entwicklung von der Form

$$\text{Exp}(Ht) = \sum_n \pi_n e^{-iE_n t/\hbar} = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi_n (h(t))^n \quad \text{mit} \quad h(t) = -e^{-i\omega t}, \quad (2.53)$$

wobei sich das negative Vorzeichen von $h(t)$ später als günstig erweisen wird. Die trigonometrischen Funktionen in Gleichung (2.52) können in

$$\cos \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2} e^{i\omega t/2} (1 - h) \quad \text{und} \quad i \tan \frac{\omega t}{2} = \frac{1 + h}{1 - h} = 1 + \frac{2h}{1 - h} \quad (2.54)$$

umgeformt werden, so daß sich das Sternexponential durch

$$\text{Exp}(Ht) = \frac{2e^{-i\omega t/2}}{1 - h} \exp\left(-\frac{2H}{\hbar\omega} \left(1 + \frac{2h}{1 - h}\right)\right) = e^{-i\omega t/2} 2e^{-2H/\hbar\omega} \frac{1}{1 - h} \exp\left(\frac{4H}{\hbar\omega} \frac{h}{h - 1}\right) \quad (2.55)$$

ausdrücken läßt.

Der Vergleich mit Gleichung (2.44) zeigt, daß $(1 - h)^{-1} \exp[zh/(h - 1)]$ die Erzeugende der Sheffer-Polynome $s_n(z)$ zu

$$(g, f) = \left(\frac{1}{1 - h}, \frac{h}{h - 1}\right) \quad (2.56)$$

ist, wobei es sich laut [Rom1984] und [Weib]⁶ bei $s_n(z)/n!$ gerade um die Laguerre-Polynome $L_n(z)$ handelt. Daher ist die gesuchte Entwicklung

$$\text{Exp}(Ht) = e^{-i\omega t/2} \sum_{n=0}^{\infty} 2e^{-2H/\hbar\omega} L_n\left(\frac{4H}{\hbar\omega}\right) (h(t))^n \quad (2.57)$$

und durch einen Vergleich mit (2.53) liest man ab, daß die Wigner-Funktionen π_n gerade

$$\pi_n = 2(-1)^n e^{-2H/\hbar\omega} L_n\left(\frac{4H}{\hbar\omega}\right) \quad (2.58)$$

lauten⁷. Das Ergebnis ist also identisch mit der normierten Lösung der Sterneigenwertgleichung, die bereits in Gleichung (2.8) bzw. (2.39) angegeben wurde. Nach Gleichung (1.102) gilt die Vollständigkeitsrelation $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$, was beweist, daß tatsächlich alle Wigner-Funktionen gefunden wurden.

⁶Hier wird von der Definition aus [Rom1984, S. 108ff.] abgewichen und wie in [Weib] die üblichere Normierung $L_n(0) = 1$ verwendet.

⁷Da man hier zwei verschiedene Sheffer-Entwicklungen der (im wesentlichen) gleichen Funktion macht, wäre es interessant zu klären, ob man durch die Transfer-Formel (Roman, Seite 50ff., insb. Theorem 3.8.3) direkt von den Sheffer-Polynomen y^{k*} zu den Projektoren π_n gelangen kann. Dieser Ansatz wird hier aber nicht weiter verfolgt.

Die geschlossene Darstellung des Sternexponentials (2.52) und dessen Fourier-Dirichlet-Entwicklung wurden bereits in Kapitel B. 6 von [BFF⁺1978b] angegeben, wobei die Herleitung allerdings nicht vom umbralen Kalkül Gebrauch macht.

2.2. Projektoreigenschaft der Wigner-Funktionen

In diesem Kapitel soll die Projektoreigenschaft (1.101) für die Wigner-Funktionen des harmonischen Oszillators (2.27) gezeigt werden, so daß die Gültigkeit der Gleichung

$$\pi_n * \pi_{n'} = \frac{1}{\hbar^{n+n'} n! n'!} \bar{a}^n * \pi_0 * a^n * \bar{a}^{n'} * \pi_0 * a^{n'} = \delta_{n,n'} \pi_n \quad (2.59)$$

$$\text{mit } \pi_0 = 2e^{-2H/\hbar\omega} \quad \text{und} \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \omega \bar{a} a \quad (2.60)$$

zu überprüfen ist.

Zuerst wird bewiesen, daß Gleichung (2.59) gilt, wenn die Projektoreigenschaft für die Wigner-Funktion des Grundzustands

$$\pi_0 * \pi_0 = \pi_0 \quad (2.61)$$

zutrifft, wobei diese Herleitung Kapitel 7 aus [DV2002] entnommen ist. Dazu wird zunächst das Produkt $\bar{a}^n * \bar{a}^{n'}$, das zwischen den beiden π_0 in (2.59) auftritt, umgeformt.

Die erste Gleichung aus (2.21) kann als

$$a * \bar{a}^n = \bar{a}^n * a + \hbar n \bar{a}^{n-1} = \bar{a}^{n-1} * (\bar{a} * a + \hbar n) = \bar{a}^{n-1} * (N + \hbar n) \quad (2.62)$$

geschrieben werden, so daß man durch m -fache Rekursion

$$a^n * \bar{a}^{n'} = a^{n-m} * \bar{a}^{n'-m} * \prod_{j=n'-m+1}^{n'} (N' + j)_* \quad (2.63)$$

erhält. Für $m = \min(n, n')$ müssen dann die zwei Fälle

$$a^n * \bar{a}^{n'} = \begin{cases} \bar{a}^{n'-n} * \prod_{j=n'-n+1}^{n'} (N + j)_* & , \text{ für } n' > n \\ a^{n-n'} * \prod_{j=1}^{n'} (N + j)_* & , \text{ für } n' \leq n \end{cases} \quad (2.64)$$

unterschieden werden.

Wegen der aus den Gleichungen (2.24) und (2.26) bekannten Eigenschaften $N * \pi_0 = 0$ bzw. $a * \pi_0 = \pi_0 * \bar{a} = 0$, ist daher $\pi_n * \pi_{n'}$ nur dann von Null verschieden, wenn $n' = n$ gilt, so daß sich Gleichung (2.59) auf

$$\pi_n * \pi_{n'} = \delta_{n,n'} \frac{1}{(n!)^2} \bar{a}^n * \pi_0 * \prod_{j=1}^n j * \pi_0 * a^n = \delta_{n,n'} \frac{1}{n!} \bar{a}^n * \underbrace{\pi_0 * \pi_0}_{\pi_0} * a^n = \delta_{n,n'} \pi_n \quad (2.65)$$

reduziert. Da der letzte Schritt nur unter der Annahme möglich war, daß Gleichung (2.26) zutrifft, ist die Behauptung bewiesen.

In den folgenden drei Unterabschnitten wird die Projektoreigenschaft (2.61) jeweils mit verschiedenen Methoden bestätigt:

1. Als erstes wird die Gleichung (2.61) über die Vernichtereigenschaft $a * \pi_0 = 0$ bewiesen. Dazu ist π_0 als Reihe in normalgeordneten Termen zu entwickeln, wobei hier wiederum das umbrale Kalkül zum Einsatz kommt.

2. Dann wird die Projektoreigenschaft durch direkte Rechnung mit der Reihendarstellung des Moyal-Produkts (2.19) gezeigt.
3. Abschließend soll gezeigt werden, wie man (2.61) durch die Integraldarstellung des Moyal-Produkts (1.50) beweisen kann.

An diesem Beispiel werden die verschiedenen Möglichkeiten verglichen, das Moyal-Produkt zu berechnen, wobei sicherlich die Gegenüberstellung der letzten beiden Varianten aufschlußreich ist. Die erste Methode nutzt die besondere Eigenschaft der holomorphen Koordinaten aus. Dadurch läßt sich die Rechnung im wesentlichen auf das kombinatorische Problem des Umordnens von Faktoren reduzieren, wobei sich in diesem Kontext wiederum die Nützlichkeit des umbralen Kalküls zeigt.

2.2.1. Projektoreigenschaft mit algebraischen Methoden

Hier beruht die Idee des Beweises von (2.61) auf der Beziehung $a * \pi_0 = 0$ an, die aus Gleichung (2.26) bekannt ist. Dieser Ansatz ist bereits in [DV2002] zu finden, wurde aber fehlerhaft umgesetzt. Erst die überarbeitete Version⁸ enthält einen korrekten Beweis, der aber stark von dem hier gezeigten Weg abweicht.

Im folgenden wird gezeigt, daß man jeden Term der Taylor-Entwicklung

$$2e^{-\xi 2\bar{a}a/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{n!} x^n \quad \text{mit} \quad x = \frac{2}{\hbar} \bar{a}a \quad (2.66)$$

als Summe von normalgeordneten Termen proportional zu $\bar{a}^k * a^k$ schreiben kann. In dem Produkt $2e^{-\xi 2\bar{a}a/\hbar} * \pi_0$ muß man dann nur die Terme mit $k = 0$ berücksichtigen. Die übrigbleibende Reihe über n sollte dann gemäß (2.61) für $\xi \rightarrow 1$ gerade den skalaren Faktor 1 ergeben. Zuerst wird hergeleitet, wie man $\bar{a}^k * a^k$ als Polynom in $\bar{a}a$ schreiben kann, und anschließend wird daraus mit Methoden des umbralen Kalküls die Reihenentwicklung von $(\bar{a}a)^n$ in $\bar{a}^k * a^k$ gefolgert.

Ähnlich wie in Gleichung (2.37) kann man die Umformungen

$$\left(-\frac{2}{\hbar}\right)^k \bar{a}^k * a^k = \left(-\frac{2}{\hbar}\right)^k \left(\bar{a} - \frac{\hbar}{2} \partial_a\right) a^k = (\partial_x - 1)^k x^k \quad (2.67)$$

durchführen und anschließend die Operatoridentität (2.38) in der Form $(\partial_x - 1)^n = e^x \partial_x^n e^{-x}$ benutzen, um schließlich

$$\left(-\frac{2}{\hbar}\right)^k \bar{a}^k * a^k = e^x \partial_x^n \left(x^k e^{-x}\right) = k! L_k(x) \quad (2.68)$$

zu erhalten, wobei die Rodrigues-Formel für die Laguerre-Polynome $L_n(x) = e^x \partial_x^n (x^n e^{-x}) / n!$ erneut verwendet wurde. Um aus Gleichung (2.68) eine Darstellung von x als Summe über $\bar{a}^k * a^k$ herleiten zu können, werden folgende Definitionen und Sätze zur Umbral-Theorie von den Seiten 41 und 44 aus [Rom1984] wiedergegeben.

Wenn $p_n(x)$ und $q_n(x) = \sum_{k=0}^n q_{n,k} x^k$ Folgen von Polynomen sind, dann wird die *umbrale Verkettung* („umbral composition“) von $q_n(x)$ und $p_n(x)$ als die Folge

$$q_n(\mathbf{p}(x)) = \sum_{k=0}^n q_{n,k} p_k(x) \quad (2.69)$$

definiert. Die Menge der Sheffer-Folgen ist eine Gruppe unter umbraler Verkettung. Wenn $s_n(x)$ und $r_n(x)$ Sheffer-Folgen zu $(g(t), f(t))$ bzw. $(h(t), l(t))$ sind, dann ist $r_n(\mathbf{s}(x))$ eine Sheffer-Folge

⁸Erhältlich unter arXiv:quant-ph/0211115v2 (2003).

zu $(g(t)h(f(t)), l(f(t)))$. Die Identität unter umbraler Verkettung ist die Folge x^n zu $(1, t)$ und die inverse Folge zu $s_n(x)$ ist die Sheffer-Folge zu $([g(f^{-1}(t))]^{-1}, f^{-1}(t))$.

Wie bereits in Gleichung (2.56) angegeben wurde, handelt es sich bei $k!L_k(x)$ um die Sheffer-Folge zu $(g(t), f(t)) = ((1-t)^{-1}, t/(t-1))$, wobei bemerkenswerterweise

$$f^{-1}(t) = f(t) \quad (2.70)$$

gilt. Da man außerdem

$$[g(f^{-1}(t))]^{-1} = 1 - \frac{t}{t-1} = \frac{1}{1-t} = g(t) \quad (2.71)$$

erhält, ist nach dem obigen Theorem die Sheffer-Folge⁹ $s_k(x) = k!L_k(x)$ ihr eigenes Inverses unter umbraler Komposition und daher folgt

$$s_n(s(x)) = n! \sum_{k=0}^n L_{n,k} k!L_k(x) = x^n \quad \text{mit} \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n L_{n,k} x^k. \quad (2.72)$$

Durch Ersetzen von $k!L_k(x)$ durch den Ausdruck aus Gleichung (2.68) erhält man

$$x^n = n! \sum_{k=0}^n L_{n,k} \left(-\frac{2}{\hbar}\right)^k \bar{a}^k * a^k, \quad (2.73)$$

was wiederum in (2.66) eingesetzt werden kann, so daß man schließlich die gesuchte Darstellung¹⁰

$$2e^{-\xi 2\bar{a}a/\hbar} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n \sum_{k=0}^n L_{n,k} \left(-\frac{2}{\hbar}\right)^k \bar{a}^k * a^k \quad (2.74)$$

gewinnt. Bildet man das Moyal-Produkt dieser Reihe mit π_0 , so muß man, wie bereits erwähnt, nur den Term mit $k=0$ berücksichtigen. Wegen der Normierung der Laguerre-Polynome $L_n(0) = 1$ gilt offensichtlich $L_{n,0} = 1$ für alle $n = 0, 1, 2, \dots$ und es ergibt sich

$$2e^{-\xi 2\bar{a}a/\hbar} * \pi_0 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n L_{n,0} \pi_0 = \pi_0 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n = \frac{2}{1+\xi} \pi_0, \quad (2.75)$$

so daß man für den Grenzfall¹¹ $\xi \rightarrow 1$ zu

$$\pi_0 * \pi_0 = \lim_{\xi \nearrow 1} 2e^{-\xi 2\bar{a}a/\hbar} * \pi_0 = \pi_0 \quad (2.76)$$

gelangt, was zu beweisen war.

Bemerkung: Gleichung (2.75) ist ein Spezialfall der Gleichung

$$\exp\left(-\xi \frac{2\bar{a}a}{\hbar}\right) * \exp\left(-\zeta \frac{2\bar{a}a}{\hbar}\right) = \frac{1}{1+\xi\zeta} \exp\left(-\frac{\xi+\zeta}{1+\xi\zeta} \frac{2\bar{a}a}{\hbar}\right), \quad (2.77)$$

die in [CUZ2001] auf andere Weise hergeleitet wurde (siehe Gleichung (34) und die dortige Literaturangabe).

⁹In [Rom1984] werden die Polynome $s_k(x) = k!L_k(x)$ als Laguerre-Polynome bezeichnet.

¹⁰Im Gegensatz zur Vorgehensweise aus [DV2002] erhält man auf diesem Weg eine neue Darstellung von π_0 , die zusammen mit der Gleichung $\pi_n = \bar{a}^n * \pi_0 * a^n / (\hbar^n n!)$ aus (2.27) auch zu einer alternativen Definition der übrigen Lösungen führt. Die *Sheffer-Identität* $s_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k(x) s_{n-k}(y)$ für $s_n(x) = n!L_n(x)$ [Rom1984, S. 110] bietet einen Ansatz, um aus diesem Ergebnis die herkömmliche Darstellung der Lösungen aus (2.39) zu gewinnen.

¹¹In [Car2000] wird die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-\xi)^n$ diskutiert. Euler hat bereits den Wert der Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ mit $1/2$ angegeben.

2.2.2. Projektoreigenschaft mit der Reihendarstellung des Moyal-Produkts

In diesem Unterabschnitt wird Gleichung (2.61) mit Hilfe der Reihendarstellung des Moyal-Produkts in holomorphen Koordinaten (2.19) gezeigt.

Mit (2.60) wird $\pi_0 * \pi_0$ zu

$$2e^{-2\bar{a}a} * 2e^{-2\bar{a}a} = 4 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} (-2\bar{a}a)^r * (-2\bar{a}a)^s, \quad (2.78)$$

so daß zuerst das Produkt $(\bar{a}a)^r * (\bar{a}a)^s$ zu bestimmen ist. Dazu wird das Moyal-Produkt aus Gleichung (2.19) entwickelt, so daß man die Darstellung

$$f * g = f e^{\hbar(\bar{\partial}_a \bar{\partial}_{\bar{a}} - \bar{\partial}_{\bar{a}} \bar{\partial}_a)/2} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} \left(\partial_a^l \partial_{\bar{a}}^{n-l} f\right) \left(\partial_{\bar{a}}^l \partial_a^{n-l} g\right) \quad (2.79)$$

erhält.

Mit den absteigenden Fakultäten $(n)_k = n!/(n-k)!$ erhält man als Zwischenschritt

$$\partial_a^l \partial_{\bar{a}}^{n-l} (\bar{a}a)^r = \begin{cases} (r)_l a^{r-l} (r)_{n-l} \bar{a}^{r-(n-l)}, & \text{für } n-r \leq l \leq r \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.80)$$

$$\text{und } \partial_{\bar{a}}^l \partial_a^{n-l} (\bar{a}a)^s = \begin{cases} (s)_l \bar{a}^{s-l} (s)_{n-l} a^{s-(n-l)}, & \text{für } n-s \leq l \leq s \\ 0 & , \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.81)$$

so daß die Anzahl der Terme, die in Gleichung (2.79) in der Summe über $l = 0, 1, \dots, n$ zu berücksichtigen sind, eingeschränkt wird. Tatsächlich genügt es, nur über solche l zu summieren, die die Bedingung

$$n - \min(n, r, s) \leq l \leq \min(n, r, s) \quad (2.82)$$

erfüllen, wodurch es wiederum möglich ist, die Summe über n auf $n = 0, 1, \dots, 2 \min(r, s)$ zu begrenzen, denn für andere n besitzt die Ungleichung (2.82) keine Lösung für l .

Mit diesen Zwischenüberlegungen folgt aus Gleichung (2.79) schließlich

$$(\bar{a}a)^r * (\bar{a}a)^s = (\bar{a}a)^{r+s} \sum_{n=0}^{2 \min(r,s)} \left(\frac{1}{-2\bar{a}a}\right)^n \frac{1}{n!} \sum_l (-1)^l \binom{n}{l} (r)_l (r)_{n-l} (s)_l (s)_{n-l}. \quad (2.83)$$

Dieses Ergebnis kann man zu

$$(-2\bar{a}a)^r * (-2\bar{a}a)^s = \sum_{n=0}^{2 \min(r,s)} C_n(r, s) (-2\bar{a}a)^{r+s-n} \quad (2.84)$$

$$\text{mit } C_n(r, s) \equiv \frac{1}{n!} \sum_l (-1)^l \binom{n}{l} (r)_l (r)_{n-l} (s)_l (s)_{n-l} \quad (2.85)$$

zusammenfassen, wobei in $C_n(r, s)$ die Summe über l durch Gleichung (2.82) beschränkt ist.

Wird $C_n(r, s)$ in der Form

$$C_n(r, s) = \sum_l \frac{(-1)^l}{(n-l)!} \frac{r!r!}{(r-l)!(r-(n-l))!} \frac{s!s!}{(s-l)!(s-(n-l))!} \quad (2.86)$$

geschrieben, so ist offensichtlich, daß jeder Summand bei der Ersetzung von l durch $n-l$ bis auf einen zusätzlichen Faktor $(-1)^n$ in sich selbst übergeht. Man kann sich leicht davon überzeugen,

daß bei dieser Ersetzung für $n - l$ die gleichen Grenzen¹² gelten, wie nach Gleichung (2.82) für l . Für ungerade n heben sich daher alle Terme in $C_n(r, s)$ paarweise auf, so daß man in Gleichung (2.84) nur über gerade n summieren muß.

Mit einer Fallunterscheidung für die drei Fälle $\min(2n, r, s) = 2n, r, s$ kann man mit Hilfe von Maple

$$C_{2n} = (-1)^n \binom{r+s-n}{n} (r)_n (s)_n \quad (2.87)$$

bestimmen, so daß man schließlich mit Gleichung (2.84) das Ergebnis

$$(-2\bar{a}a)^r * (-2\bar{a}a)^s = \sum_{n=0}^{\min(r,s)} (-1)^n \binom{r+s-n}{n} (r)_n (s)_n (-2\bar{a}a)^{r+s-2n} \quad (2.88)$$

erhält. Durch Einsetzen dieser Gleichung in (2.78) folgt

$$2e^{-2\bar{a}a} * 2e^{-2\bar{a}a} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=n}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^n \binom{r+s-n}{n} \frac{1}{(r-n)!} \frac{1}{(s-n)!} (-2\bar{a}a)^{r+s-2n}, \quad (2.89)$$

wobei hier die Bedingung $n \leq \min(r, s)$ bzw. $n \leq r \wedge n \leq s$ von der Summe über n auf die Summen über r und s übertragen wurde.

Nun ist es notwendig, daß obige Zwischenergebnis in die Form $\sum_{m=0}^{\infty} \dots (-2\bar{a}a)^m$ zu überführen, um die Koeffizienten dieser Reihe berechnen und somit das Ergebnis in geschlossener Form darstellen zu können. Dazu werden die Indizes der Summation über r und s durch

$$m = r + s - 2n = (r - n) + (s - n) \quad \text{und} \quad t = r - n \quad (2.90)$$

ersetzt. Da $t = r - n \geq 0$ und $s - n \geq 0$ gilt, ist m offensichtlich immer nicht-negativ. Genau wie die Summe über s ist die Summation über m nicht nach oben beschränkt. Da auch r bis ∞ läuft, kann auch t alle ganzzahligen Werte von 0 bis ∞ annehmen. Es ist aber zu beachten, daß nach $m = t + (s - m)$ immer $m \geq t$ gilt, was dadurch berücksichtigt werden kann, daß man die Summe über t auf $0, 1, \dots, m$ einschränkt. Somit kann man Gleichung (2.89) in

$$2e^{-2\bar{a}a} * 2e^{-2\bar{a}a} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{t=0}^m (-1)^n \binom{m+n}{n} \frac{1}{t! (m-t)!} (-2\bar{a}a)^m \quad (2.91)$$

umformen.

Mit den Regeln¹³

$$\sum_{t=0}^m \frac{1}{t! (m-t)!} = \frac{2^m}{m!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n}{n} = \frac{1}{2} 2^{-m} \quad (2.92)$$

kann man zwei Summen in (2.91) explizit ausführen, so daß sich schließlich

$$2e^{-2\bar{a}a} * 2e^{-2\bar{a}a} = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n}{n} \right) \left(\sum_{t=0}^m \frac{1}{t! (m-t)!} \right) (-2\bar{a}a)^m = 2e^{-2\bar{a}a} \quad (2.93)$$

ergibt, was zu beweisen war.

¹²Um dies zu verdeutlichen, wird Gleichung (2.82) mit (-1) multipliziert und anschließend n hinzuaddiert, so daß sich schließlich folgendes ergibt:

$$n - [n - \min(n, r, s)] \geq n - l \geq n - \min(n, r, s) \quad \Leftrightarrow \quad n - \min(n, r, s) \leq n - l \leq \min(n, r, s).$$

¹³Laut [Com1974, S. 37] gilt für $x \in \mathbb{C}$ im allgemeinen:

$$(1+t)^x = \sum_{n \geq 0} \langle x \rangle_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{t^n}{n!} \quad \text{und} \quad (1-t)^{-x} = \sum_{n \geq 0} \langle x \rangle_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \frac{t^n}{n!},$$

wobei sich die beiden Gleichungen (2.92) als Spezialfälle für $t = 1, x = m$ bzw. $t = -1, x = m + 1$ ergeben.

2.2.3. Projektoreigenschaft mit der Integraldarstellung des Moyal-Produkts

Als letztes wird die Projektoreigenschaft (2.61) mit Hilfe der Integraldarstellung des Moyal-Produkts (1.50) bewiesen. Durch Einsetzen von π_0 aus Gleichung (2.60) erhält man das Integral

$$\begin{aligned} \pi_0 * \pi_0 &= \frac{4}{\hbar^2 \pi^2} \int dp' dp'' dq' dq'' \exp\left(-\frac{p'^2}{\hbar m \omega} - \frac{m \omega}{\hbar} q'^2\right) \exp\left(-\frac{p''^2}{\hbar m \omega} - \frac{m \omega}{\hbar} q''^2\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{2}{i\hbar}(p'(q' - q'') + p'(q'' - q) + p''(q - q'))\right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Diese Gleichung kann man auch in der Form

$$\pi_0 * \pi_0 = \frac{4}{\hbar^2 \pi^2} \int dq' dq'' \exp\left(-\frac{m \omega}{\hbar}(q'^2 + q''^2) + \frac{2}{i\hbar} p'(q' - q'')\right) A(q, q', q'') B(q, q', q'') \quad (2.95)$$

$$\text{mit } A(q, q', q'') = \int dp' \exp\left(-\frac{p'^2}{\hbar m \omega} + \frac{2}{i\hbar} p'(q'' - q)\right) = \sqrt{\pi \hbar m \omega} \exp\left(-\frac{m \omega}{\hbar}(q'' - q)^2\right)$$

$$\text{und } B(q, q', q'') = \int dp'' \exp\left(-\frac{p''^2}{\hbar m \omega} + \frac{2}{i\hbar} p''(q - q')\right) = \sqrt{\pi \hbar m \omega} \exp\left(-\frac{m \omega}{\hbar}(q - q')^2\right)$$

schreiben, wobei die Integration über p' und p'' mit Hilfe des Residuensatzes¹⁴ durchgeführt werden konnte.

Die verbleibenden zwei Integrationen verlaufen analog und daher folgt aus Gleichung (2.95)

$$\pi_0 * \pi_0 = \frac{4m\omega}{\hbar\pi} C(p, q) D(p, q) \quad (2.96)$$

$$\text{mit } C(p, q) = \int dq' \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}(q - q')^2 - \frac{m\omega}{\hbar} q'^2 + \frac{2}{i\hbar} p q'\right) = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2m\omega}} e^{-i q p / \hbar} e^{-H/\hbar\omega}$$

$$\text{und } D(p, q) = \int dq'' \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}(q'' - q)^2 - \frac{m\omega}{\hbar} q''^2 - \frac{2}{i\hbar} p q''\right) = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{2m\omega}} e^{+i q p / \hbar} e^{-H/\hbar\omega}.$$

Die beiden komplexen Faktoren aus C und D heben sich in Gleichung (2.96) gerade gegenseitig auf, so daß man das erwartete Ergebnis

$$\pi_0 * \pi_0 = 2e^{-2H/\hbar\omega} = \pi_0 \quad (2.97)$$

erhält.

Auch wenn die Rechnung in diesem Unterabschnitt bewußt wenig ausführlich dargestellt wurde, so kann man rückblickend auf die letzten beiden Unterabschnitte doch feststellen, daß sich die Projektoreigenschaft $\pi_0 * \pi_0 = \pi_0$ leichter mit der Integraldarstellung des Moyal-Produkts (1.50) als durch die Reihenformel (1.41) beweisen läßt. Dies liegt aber nicht zuletzt daran, daß der Umgang mit Integralen in der Regel vertrauter ist als die Handhabung von Reihen. Die Umbral-Theorie könnte eine Mittel sein, um die Anwendung der Reihendarstellung zu vereinfachen. Ein möglicher Ansatz dazu wurde in Unterabschnitt 2.2.1 geliefert.

¹⁴Dazu muß man das Argument der Exponentialfunktion quadratisch ergänzen, was in der folgenden Rechnung demonstriert wird:

$$A(q, q', q'') = e^{-m\omega(q''-q)^2/\hbar} \int dp' \exp\left(-\frac{1}{\hbar m \omega}(p' + im\omega(q'' - q))^2\right) = e^{-m\omega(q''-q)^2/\hbar} \int dp' \exp\left(-\frac{p'^2}{\hbar m \omega}\right).$$

3. Landau-Niveaus

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Deformationsquantisierung wird in diesem Kapitel ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld betrachtet, wobei das hier geschilderte Vorgehen in [HHS2004] aufgenommen wird.

3.1. Klassische Betrachtung

Wir beginnen mit einer kurzen Diskussion dieses Problems im Rahmen der klassischen Mechanik. Das betrachtete Teilchen habe die Ladung $+e$ und seine Bewegung wird mit Hilfe des Koordinatenvektors $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ beschrieben. Das Koordinatensystem soll so gewählt sein, daß das Magnetfeld in Richtung der q_3 -Achse zeigt. Wir wollen voraussetzen, daß das Teilchen anfangs keinen Impulsanteil in q_3 -Richtung besitzt und sich in der Ebene mit $q_3 = 0$ befindet. Da es sich im Magnetfeld $\mathbf{B} = B(0, 0, 1)^T$ bewegt, erfährt es die Lorentz-Kraft¹ $\mathbf{F} = e\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}/c$. Setzt man dies in die Newtonsche Bewegungsgleichung $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{q}}$ mit der Teilchenmasse m ein, dann müssen die Koordinaten als Funktion der Zeit die Gleichung

$$\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{e}{mc} \mathbf{B} \quad (3.1)$$

erfüllen, wobei $\omega = eB/mc$ die *Zyklotronfrequenz* ist.

Für die dritte Komponente der Geschwindigkeit erhalten wir daraus $\ddot{q}_3 = 0$, so daß die Bewegung des Teilchens vollständig in der q_1q_2 -Ebene stattfindet und wir die q_3 -Koordinate nicht weiter betrachten müssen. Für die verbleibenden beiden Koordinatenfunktionen ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} - \omega i\hat{\sigma}_2 \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad i\hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

wobei offensichtlich $(i\hat{\sigma}_2)^2 = -1$ gilt. Die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{pmatrix} = -r\omega \exp(i\hat{\sigma}_2\omega t) \begin{pmatrix} \sin(\varphi_0) \\ \cos(\varphi_0) \end{pmatrix} = -r\omega \begin{pmatrix} \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \cos(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

wobei $r\omega$ der konstante Betrag der Geschwindigkeit ist und φ_0 der Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor mit der q_2 -Achse zum Zeitpunkt $t = 0$ einschließt.

Durch eine weitere Integration erhält man die Gleichungen der Bewegungsbahn:

$$q_1(t) = X_1 + r \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{und} \quad q_2(t) = X_2 - r \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (3.4)$$

Das Teilchen bewegt sich in der q_1q_2 -Ebene im Uhrzeigersinn auf einem Kreis, der durch den Radius r und den Mittelpunkt (X_1, X_2) definiert ist. Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit ω konstant, so daß $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{X})$ mit $X_3 = 0$ gilt, was man auch direkt mit (3.2) und (3.3) überprüfen kann. Mit dieser Gleichung kann man X_1 und X_2 in Abhängigkeit von den Koordinaten und Impulskomponenten des Teilchens angeben und man erhält

$$X_1 = q_1 + \frac{p_2}{m\omega} \quad \text{und} \quad X_2 = q_2 - \frac{p_1}{m\omega}. \quad (3.5)$$

¹Man beachte, daß hier Heaviside-Lorentz-Einheiten verwendet werden.

3.2. Quantenmechanische Betrachtung

In diesem Abschnitt wird das Landau-Problem mit Methoden der Deformationsquantisierung diskutiert. Dabei werden wir die Sterneigenwertgleichung (1.91) verwenden, so daß zuerst die Hamilton-Funktion bestimmt werden muß. Das Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ kann mit Hilfe des Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ beschrieben werden. Aus der Hamilton-Funktion eines freien Teilchens $\mathbf{p}^2/2m$ erhält man durch minimale Substitution $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{q})/c$ die zugehörige Hamilton-Funktion

$$H_L = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}) \right)^2, \quad (3.6)$$

wobei \mathbf{p} der kanonisch konjugierte Impuls ist.

Wir berücksichtigen das Ergebnis aus dem vorhergehenden Abschnitt, indem die Koordinaten q_3 und p_3 des Phasenraums bei der Diskussion ausgeschlossen werden. Die Bewegung in diese Richtung wird nicht durch das Magnetfeld beeinflußt und entspricht der eines freien Teilchens. Dieses Resultat gilt auch für die quantenmechanische Betrachtung des Problems, was ausführlich in „Complement E_{VI}“ von [CTDL1977] im Rahmen des Operatorformalismus erläutert wird.

Ziel ist es nun, die quantisierten Energieniveaus E_n und die zugehörigen Wigner-Funktionen π_n als Lösung der Sterneigenwertgleichung (1.91)

$$H_L * \pi_n = E_n \pi_n \quad (3.7)$$

zu bestimmen, wobei das Moyal-Produkts (1.45) für einen vierdimensionalen Phasenraum

$$f * g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} (\vec{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{p_1} - \vec{\partial}_{p_1} \vec{\partial}_{q_1} + \vec{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{p_2} - \vec{\partial}_{p_2} \vec{\partial}_{q_2}) \right) g \quad (3.8)$$

lautet. Wie wir sehen werden, handelt es sich um ein entartetes System, so daß man die Projektoren durch Eigenwerte zu einer weiteren Observablen charakterisieren muß.

Der Einfachheit halber nennen wir die Funktion g in Anlehnung an den Operatorformalismus *Eigenfunktion* zu f , wenn sie die Gleichung $f * g = \alpha g$ mit dem *Eigenwert* $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt.

3.2.1. Koordinatentransformation

Bei geeigneter Wahl der Eichung lautet das Vektorpotential zum Magnetfeld $\mathbf{B} = B(0, 0, 1)^T$

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \mathbf{q} \times \mathbf{B} = \frac{B}{2} (-q_2, q_1, 0)^T, \quad (3.9)$$

so daß wir durch Einsetzen in Gleichung (3.6) eine Hamilton-Funktion von der Form

$$H_L = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) \quad (3.10)$$

erhalten. Hier sind

$$P_1 = p_1 - \frac{e}{c} A_1 = p_1 + \frac{m\omega}{2} q_2 \quad \text{und} \quad P_2 = p_2 - \frac{e}{c} A_2 = p_2 - \frac{m\omega}{2} q_1 \quad (3.11)$$

die beiden Komponenten des kinetischen Impulses, wobei es sich bei $\omega = eB/mc$ um die bereits aus (3.1) bekannte Zyklotronfrequenz handelt.

Die Ableitungen ∂_{p_i} in dem Moyal-Produkt (3.8) sollen nun durch Ableitungen nach P_i ersetzt werden, da diese gerade in der Hamilton-Funktion vorkommen. Wie in Anhang A.5 gezeigt wird, lautet das transformierte Moyal-Produkt

$$f * g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} (\vec{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{P_1} - \vec{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{q_1} + \vec{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{P_2} - \vec{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{q_2}) + \frac{i\hbar}{2} m\omega (\vec{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{P_2} - \vec{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{P_1}) \right) g. \quad (3.12)$$

3.2.2. Erhaltungsgrößen

Es ist bemerkenswert, daß H_L aus (3.10) formal der Hamilton-Funktion eines freien Teilchens entspricht und daß außerdem das transformierte Sternprodukt bis auf einen zusätzlichen Term im Exponenten dem gewöhnlichen Moyal-Produkt aus (3.8) gleicht. Das Einfügen des Zusatzterms in (3.12) korrespondiert offensichtlich zur minimalen Substitution in der Hamilton-Funktion. Neben \hbar erscheint ω als ein weiterer Deformationsparameter im Sternprodukt, wobei \hbar der Quantisierungsparameter ist und $\omega \propto eB$ die Stärke der Wechselwirkung festlegt.

Das Moyal-Produkt aus Gleichung (3.12) kann auch in der Form

$$f * g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \left(\vec{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{P_1} - \vec{\partial}_{P_1} (\vec{\partial}_{q_1} - m\omega \vec{\partial}_{P_2}) + \vec{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{P_2} - \vec{\partial}_{P_2} (\vec{\partial}_{q_2} + m\omega \vec{\partial}_{P_1}) \right) \right) g \quad (3.13)$$

geschrieben werden. Falls f nur von P_1 und P_2 abhängt, können wir mit dieser Schreibweise des Sternprodukts leicht den Bopp-Shift

$$f(P_1, P_2) * g = f \left(-(\vec{\partial}_{q_1} - m\omega \vec{\partial}_{P_2}), -(\vec{\partial}_{q_2} + m\omega \vec{\partial}_{P_1}) \right) g \quad (3.14)$$

angeben. Wir stellen fest, daß in dieser Gleichung die Ableitungen nur in den Kombinationen

$$\partial_{q_1} - m\omega \partial_{P_2} \quad \text{und} \quad \partial_{q_2} + m\omega \partial_{P_1} \quad (3.15)$$

auftreten, wobei für $\omega \neq 0$ die Wirkung dieser Differentialoperatoren auf die Funktionen

$$X_1 = q_1 + \frac{1}{m\omega} P_2 = \frac{1}{2} \left(q_1 + \frac{1}{m\omega} p_2 \right) \quad \text{und} \quad X_2 = q_2 - \frac{1}{m\omega} P_1 = \frac{1}{2} \left(q_2 - \frac{1}{m\omega} p_1 \right) \quad (3.16)$$

Null ergibt. Wie der Vergleich mit den Gleichungen aus (3.5) zeigt, sind dies gerade die Koordinaten des Punktes in der $q_1 q_2$ -Ebene, den das Teilchen in der klassischen Lösung umkreist. Dabei ist zu beachten, daß die in (3.5) auftretenden Variablen p_i die kinetischen Impulse sind, die hier den Größen P_i entsprechen.

Mit (3.16) vereinfacht sich Gleichung (3.14) für $g = g(X_1, X_2)$ zu

$$f(P_1, P_2) * g(X_1, X_2) = f(P_1, P_2) g(X_1, X_2). \quad (3.17)$$

Wir nehmen nun an, daß f und g reelle Funktionen sind. Da das Moyal-Produkt entsprechend der Gleichung (1.47) hermitesch ist, geht die letzte Gleichung durch komplexe Konjugation über in

$$g(X_1, X_2) * f(P_1, P_2) = g(X_1, X_2) f(P_1, P_2). \quad (3.18)$$

Aus den letzten beiden Gleichungen folgt, daß jede Funktion von P_i mit jeder Funktion von X_i vertauscht. Somit gilt insbesondere

$$[H_L, X_i]_* = 0, \quad (3.19)$$

so daß es sich bei X_1 und X_2 um Erhaltungsgrößen handelt. Anschaulich bedeutet dies, daß sich die Rotationsachse nicht ändert.

3.2.3. Lösung der Sterneigenwertgleichung

Jede beliebige Funktion auf dem Phasenraum – also insbesondere auch π_n – läßt sich für $\omega \propto B \neq 0$ als Funktion von X_i und P_i aus (3.16) bzw. (3.11) darstellen. Wir machen den Produktansatz $\pi_n = f(P_1, P_2) g(X_1, X_2)$, so daß die linke Seite der Sterneigenwertgleichung (3.7) unter Berücksichtigung von (3.17) in

$$H_L * \pi_n = H_L * (f(P_1, P_2) g(X_1, X_2)) = H_L * f(P_1, P_2) * g(X_1, X_2) \quad (3.20)$$

umgeformt werden kann. Da das Sternprodukt gemäß (1.56) assoziativ ist, kann man zuerst $H_L * f(P_1, P_2)$ berechnen, wobei dieses Produkt selbst auch nur von P_i abhängt. Daher können wir Gleichung (3.17) erneut anwenden und die Sterneigenwertgleichung wird zu

$$(H_L * f(P_1, P_2)) g(X_1, X_2) = (E_n f(P_1, P_2)) g(X_1, X_2). \quad (3.21)$$

Offensichtlich ist in dem Produkt $\pi_n = f(P_1, P_2) g(X_1, X_2)$ nur der Faktor $f(P_1, P_2)$ maßgeblich für die Bestimmung von E_n , so daß es vorerst ausreicht, π_n als Funktion von P_i anzunehmen.

Für $\pi_n = \pi_n(P_1, P_2)$ reduziert sich die Sterneigenwertgleichung (3.7) mit dem Moyal-Produkt (3.12) auf

$$H_L * \pi_n = H_L \exp\left(\frac{i\hbar}{2} m\omega (\vec{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{P_2} - \vec{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{P_1})\right) \pi_n. \quad (3.22)$$

Mit den Definitionen $P_1 = m\omega q$ und $P_2 = p$ ist das Sternprodukt formal identisch mit dem Moyal-Produkt (1.41) im zweidimensionalen Phasenraum

$$f * g = f \exp\left(\frac{i\hbar}{2} (\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q)\right) g \quad (3.23)$$

und die Hamilton-Funktion (3.10) wird zu

$$H_L = \frac{p^2}{2m} + \frac{(m\omega q)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (3.24)$$

Dies entspricht gerade der Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators (2.1), so daß wir die Lösungen direkt aus Gleichung (2.8) entnehmen können. Mit H_L statt H lauten sie

$$\pi_n(P_1, P_2) = 2 (-1)^n \exp\left(-\frac{2H_L}{\hbar\omega}\right) L_n\left(\frac{4H_L}{\hbar\omega}\right) \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

wobei diese Wigner-Funktionen Zustände zu den Energieniveaus

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.26)$$

beschreiben. Diese Energiewerte werden *Landau-Niveaus* genannt.

Wie am Anfang dieses Unterabschnitts gezeigt wurde, bleibt die Wigner-Funktion $\pi_n(P_1, P_2)$ weiterhin Lösung von (3.7), wenn sie mit einer beliebigen Funktion von X_i multipliziert wird. Diese Funktion kann so gewählt werden, daß die Wigner-Funktion Eigenfunktion zu einer weiteren Observablen wird. Erst dann sind alle Wigner-Funktionen durch ihre Eigenwerte – bis auf die Normierung – eindeutig charakterisiert.

3.2.4. Der Drehimpuls als weitere Observable

In diesem Unterabschnitt soll gezeigt werden, daß man die Freiheit in der X_i -Abhängigkeit der Lösungen der Sterneigenwertgleichung (3.7) nutzen kann, um die Wigner-Funktionen eines Landau-Niveaus durch ihre Drehimpulsquantenzahl zu unterscheiden.

Die Definitionen von P_i und X_i aus (3.10) und (3.11) kann man leicht nach p_i und q_i auflösen. Durch Einsetzen der Ergebnisse

$$-m\omega q_1 = P_2 - m\omega X_1, \quad m\omega q_2 = P_1 + m\omega X_2, \quad (3.27a)$$

$$2p_2 = P_2 + m\omega X_1 \quad \text{und} \quad 2p_1 = P_1 - m\omega X_2 \quad (3.27b)$$

in die Definition des Drehimpulses $J = q_1 p_2 - q_2 p_1$ ergibt sich

$$-2m\omega J = (-m\omega q_1)(2p_2) + (m\omega q_2)(2p_1) = P_2^2 - m^2\omega^2 X_1^2 + P_1^2 - m^2\omega^2 X_2^2, \quad (3.28)$$

so daß wir schließlich den Drehimpuls in den Koordinaten P_i und X_i angeben können:

$$J = -\frac{1}{2m\omega} (P_1^2 + P_2^2) + \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) = -\frac{H_L}{\omega} + \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2). \quad (3.29)$$

Dies ist die Summe zweier Erhaltungsgrößen, denn die Hamilton-Funktion H_L ist per Definition erhalten und jede Funktion von X_i ist eine Erhaltungsgröße, wie in Unterabschnitt 3.2.1 gezeigt wurde.

Wir haben bereits festgestellt, daß neben der Funktion $\pi_n(P_1, P_2)$ aus Gleichung (3.25) auch $\pi_n(P_1, P_2) \rho(X_1, X_2)$ Lösung der Sterneigenwertgleichung (3.7) ist. Nehmen wir nun an, daß wir eine Funktion $\rho(X_1, X_2)$ finden können, die die Gleichung

$$\frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) * \rho(X_1, X_2) = \alpha \rho(X_1, X_2) \quad (3.30)$$

erfüllt. Analog zu (3.21) folgt dann aus (3.17)

$$\begin{aligned} \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) * [\pi_n(P_1, P_2) \rho(X_1, X_2)] &= \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) * \rho(X_1, X_2) * \pi_n(P_1, P_2) \\ &= \alpha \rho(X_1, X_2) * \pi_n(P_1, P_2) \\ &= \alpha [\pi_n(P_1, P_2) \rho(X_1, X_2)], \end{aligned} \quad (3.31)$$

so daß auch das Produkt $\pi_n(P_1, P_2) \rho(X_1, X_2)$ den Eigenwert α bezüglich $m\omega (X_1^2 + X_2^2) / 2$ hat. Als Eigenfunktion von H_L und $m\omega (X_1^2 + X_2^2) / 2$ ist diese Funktion gemäß (3.29) dann auch Eigenfunktion von J .

In der folgenden Herleitung werden wir die Lösung $\rho(X_1, X_2)$ der Gleichung (3.30) bestimmen. Auf Grund der speziellen Eigenschaften der Variablen X_1 und X_2 fallen einige Terme im Exponenten des Moyal-Produkts aus (3.13) weg, so daß sich die linke Seite von (3.30) zu

$$\frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) * \rho(X_1, X_2) = \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) \exp\left(\frac{i\hbar}{2} (\vec{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{P_1} + \vec{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{P_2})\right) \rho(X_1, X_2) \quad (3.32)$$

vereinfacht. Da die hier auftretenden Ableitungen nur auf Funktionen von X_1 und X_2 wirken, können die Ableitungen nach (3.16) in diesen Variablen ausgedrückt werden und man erhält

$$\frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) * \rho(X_1, X_2) = \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) \exp\left(\frac{i\hbar}{2m\omega} (\vec{\partial}_{X_1} \vec{\partial}_{X_2} - \vec{\partial}_{X_2} \vec{\partial}_{X_1})\right) \rho(X_1, X_2). \quad (3.33)$$

Nun definieren wir $q = X_1$, $p = m\omega X_2$ und erhalten aus Gleichung (3.33) durch Multiplikation mit ω

$$\frac{m\omega^2}{2} (X_1^2 + X_2^2) * \rho(X_1, X_2) = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2\right) \exp\left(\frac{i\hbar}{2} (\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q)\right) \rho(X_1, X_2). \quad (3.34)$$

Dies entspricht formal wieder der Sterneigenwertgleichung des harmonischen Oszillators, so daß die Eigenfunktionen direkt angegeben werden können, indem man H_L in Gleichung (3.25) durch $m\omega^2 (X_1^2 + X_2^2) / 2$ ersetzt:

$$\rho_l(X_1, X_2) = 2(-1)^l \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} (X_1^2 + X_2^2)\right) L_l\left(\frac{2m\omega}{\hbar} (X_1^2 + X_2^2)\right). \quad (3.35)$$

Da in Gleichung (3.34) gegenüber (3.30) ein zusätzlicher Faktor ω auftritt, lauten die Eigenwerte aus Gleichung (3.30) $\alpha_l = \hbar(l + 1/2)$ mit $l = 0, 1, 2, \dots$, wie ein Vergleich mit (3.26) zeigt.

3.2.5. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Wir haben somit gezeigt, daß die Funktion

$$\Pi_{nl}(P_1, P_2, X_1, X_2) = \pi_n(P_1, P_2) \rho_l(X_1, X_2) \quad \text{für} \quad n, l = 0, 1, 2 \dots \quad (3.36)$$

Eigenfunktion sowohl von H_L als auch von $m\omega^2 (X_1^2 + X_2^2)/2$ ist, wobei die Eigenwerte $E_n = \hbar\omega (n + 1/2)$ bzw. $\alpha_l = \hbar (l + 1/2)$ lauten. Die Faktoren $\pi_n(P_1, P_2)$ und $\rho_l(X_1, X_2)$ sind in (3.25) bzw. (3.35) angegeben und entsprechen von der Form den Wigner-Funktionen des harmonischen Oszillators.

Aus Gleichung (3.29) folgt dann

$$J * \Pi_{nl} = \left(-\frac{H_L}{\omega} + \frac{m\omega}{2} (X_1^2 + X_2^2) \right) * \Pi_{nl} = \hbar(l - n) \Pi_{nl}, \quad (3.37)$$

so daß Π_{nl} auch Eigenfunktion des Drehimpulses ist. Zu jedem n gibt es unendlich viele l und daher sind die Landau-Niveaus E_n unendlich oft entartet. Dies spiegelt die Tatsache wieder, daß die Rotationsachse (X_1, X_2) in der q_1q_2 -Ebene beliebig gewählt werden kann, ohne die Energie zu ändern.

Bemerkungen:

- Für die Herleitung der Landau-Niveaus (3.26) kann man tatsächlich auf die Festlegung der Eichung verzichten. Die Komponenten des kinetischen Impulses $P_1 = p_1 - eA_1/c$ und $P_2 = p_2 - eA_2/c$ liefern in jedem Fall die Moyal-Klammer

$$[P_1, P_2]_* = -\frac{e}{c} ([p_1, A_2]_* + [A_1, p_2]_*) = i\hbar \frac{e}{c} (\partial_{q_1} A_2 - \partial_{p_2} A_1) = i\hbar m\omega, \quad (3.38)$$

wobei das Sternprodukt in der ursprünglichen Form (3.8) verwendet wurde. Mit den bereits zuvor gewählten Definitionen $q = P_1/m\omega$ und $p = P_2$ erhält man daraus $[q, p]_* = i\hbar$, was formal der kanonischen Kommutatorrelation (1.12) entspricht. Außerdem gleicht $H_L = (P_1^2 + P_2^2)/2m$ mit diesen Definitionen wiederum der Hamilton-Funktion eines harmonischen Oszillators wie in Gleichung (3.24), so daß man sofort $E_n = \hbar\omega (n + 1/2)$ folgern kann.

- Im Gegensatz dazu können wir die Wahl der Eichung in Unterabschnitt 3.2.4 nicht umgehen, da nicht in jedem Fall $J = q_1p_2 - q_2p_1$ eine Erhaltungsgröße ist. Tatsächlich entspricht J nur formal einem Drehimpuls, da q_1, q_2 nicht die relativen Koordinaten in Bezug auf die Drehachse sind und p_1, p_2 nicht die kinetischen Impulse. Der physikalische Drehimpuls lautet

$$J = (q_1 - X_1) P_2 - (q_2 - X_2) P_1 = -\frac{1}{m\omega} (P_1^2 + P_2^2) = -\frac{2}{\omega} H_L, \quad (3.39)$$

wovon man sich mit Hilfe von (3.16) leicht überzeugen kann. Er ist zwar erhalten, stellt aber keine von H_L unabhängige Observable dar.

- Die gleichen Ergebnisse können auch direkt mit holomorphen Koordinaten bestimmt werden, was in [DV2002] getan wurde.

II. Fermionische Deformationsquantisierung und Supersymmetrie

Kapitelverzeichnis

4. Deformationsquantisierung der Grassmann-Algebra	43
5. Der supersymmetrische Oszillator	57
6. Landau-Niveaus mit Spin	65

4. Deformationsquantisierung der Grassmann-Algebra

Bisher konnten wir erfolgreich eine quantisierte Mechanik auf dem Phasenraum mit kommutativen Koordinaten¹ formulieren. Wie am Beispiel des Landau-Problems demonstriert wurde, lassen sich damit die bosonischen Freiheitsgrade physikalischer Systeme beschreiben. Ziel dieses Kapitels ist es, mit Hilfe einer deformierten Grassmann-Algebra fermionische Freiheitsgrade in diese Theorie einzubinden. Dabei werden wir ähnlich vorgehen wie in Kapitel 1.

In den Artikeln [Bor1996, DF1998, BHW2000] wurde bereits die Deformationsquantisierung von Systemen mit Fermionen von einem mathematischen Standpunkt betrachtet. Die hier präsentierte Diskussion orientiert sich an [HH2002a], wo der Schwerpunkt auf der physikalischen Anwendung dieser Theorie liegt. Genau wie in diesem Artikel wird die Wahl des Sternprodukts durch die Dirac-Klammer motiviert. Ausgehend von diesem Sternprodukt läßt sich eine neue Klammer konstruieren, deren Definition sich von derjenigen in [HH2002a] unterscheidet.

Das folgende Kapitel ist in fünf Abschnitte eingeteilt. Zunächst werden einige Grundbegriffe in Bezug auf die Grassmann-Algebra erläutert. Anschließend wird mit dieser Algebra eine pseudo-klassische Mechanik konstruiert. Der dritte Abschnitt behandelt die Deformation des Produkts der Grassmann-Algebra zu einem Sternprodukt, das ähnliche Eigenschaften aufweist wie das Moyal-Produkt. Es stellt sich heraus, daß man mit diesem Produkt eine Klammer definieren kann, die zu einer graduierten Lie-Algebra führt. Damit wird der Grundstein für die Diskussion der supersymmetrischen Quantenmechanik gelegt, auf die wir später eingehen werden.

Im vierten Abschnitt diskutieren wir die Zeitentwicklung von Observablen und gehen kurz auf die Spektraltheorie ein. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, wie man die deformierte Grassmann-Algebra mit dem quantisierten bosonischen Phasenraum vereinen kann.

4.1. Grassmann-Algebra

4.1.1. Grundlagen

Wir betrachten die *Grassmann-Algebra* Gr_n , die durch die n Generatoren $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ erzeugt wird. Das Produkt dieser Algebra soll hier *Grassmann-Produkt* genannt werden und es ist durch die elementare Relation

$$\{\vartheta_i, \vartheta_j\} = \vartheta_i \vartheta_j + \vartheta_j \vartheta_i = 0 \quad (4.1)$$

definiert.

Ein Algebraelement der Form $\vartheta_{i_1} \vartheta_{i_2} \dots \vartheta_{i_m}$ wird *homogen vom Grad m* genannt. Jedes beliebige Element $f(\vartheta) \in \text{Gr}_n$ läßt sich als endliche Summe solcher homogenen Monome $f_k(\vartheta)$ darstellen:

$$f(\vartheta) = \sum_{k=0}^n f_k(\vartheta) \quad \text{mit} \quad f_k(\vartheta) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} f_k^{i_1 i_2 \dots i_k} \vartheta_{i_1} \vartheta_{i_2} \dots \vartheta_{i_k}, \quad (4.2)$$

wobei die Argumente $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ zu ϑ zusammengefaßt wurden. In der Summe über i_1, i_2, \dots, i_k nehmen die Indizes alle möglichen Werte aus $\{1, 2, \dots, n\}$ an. Wenn keine Fehldeutung möglich ist, werden wir im folgenden Summenzeichen weglassen, wobei dann über doppelt vorkommende

¹Diesen Phasenraum nennen wir im folgenden auch *qp-Phasenraum* oder *bosonischen Phasenraum*.

Indizes zu summieren ist. Da die Monome $\vartheta_{i_1} \vartheta_{i_2} \dots \vartheta_{i_k}$ total antisymmetrisch in den Indizes sind, muß das gleiche auch für die komplexen Koeffizienten $f_k^{i_1 i_2 \dots i_k}$ aus (4.2) angenommen werden.

Mit einem Index an einer Funktion soll angedeutet werden, daß es sich um einen Term der Entwicklung gemäß (4.2) handelt. Einige Gleichungen werden nur für diese homogenen Terme angegeben, wobei sie sich – sofern sie linear in den Funktionen sind – für beliebige Funktionen aus Gr_n durch eine Reihenentwicklung wie in (4.2) verallgemeinern lassen.

Elemente der Algebra, deren Entwicklung der Form (4.2) nur Terme mit (un)geraden k besitzt, nennt man (*un*)gerade. Offensichtlich läßt sich die Grassmann-Algebra Gr_n als direkte Summe

$$\text{Gr}_n = \text{Gr}_n^{(0)} \oplus \text{Gr}_n^{(1)} \quad (4.3)$$

schreiben, wobei $\text{Gr}_n^{(0)}$ nur gerade und $\text{Gr}_n^{(1)}$ nur ungerade Element enthält. Eine Größe f_l vom Grad l ist daher Element aus $\text{Gr}_n^{(l \bmod 2)}$, wobei die Zahl 0 jeden Grad hat. Mit diesen Definitionen ergibt sich

$$f_l g_m \in \text{Gr}_n^{(l+m \bmod 2)}, \quad (4.4)$$

wovon man sich leicht überzeugen kann. Eine Algebra mit dieser Eigenschaft nennt man \mathbb{Z}_2 -graduiert. Aus der Gleichung (4.4) folgt, daß $\text{Gr}_n^{(0)}$ eine Unteralgebra von Gr_n ist.

Betrachten wir nun zwei homogene Elemente f_l und g_m der Grassmann-Algebra. Da alle Generatoren entsprechend der Gleichung (4.1) antivertauschen, erhält man

$$f_l g_m = (-1)^{lm} g_m f_l. \quad (4.5)$$

Das Grassmann-Produkt für beliebige zwei Elemente aus der Unteralgebra $\text{Gr}_n^{(0)}$ ist daher symmetrisch.

4.1.2. Involution und Hodge-Dual

Die *Involution* entspricht der komplexen Konjugation der komplexen Zahlen bzw. dem Adjungieren von Operatoren. Sie ist als bijektive Abbildung $f \mapsto \bar{f}$ der Grassmann-Algebra auf sich selbst definiert, die die folgenden Regeln erfüllt:

$$\overline{\vartheta_i} = \vartheta_i, \quad \overline{fg} = \bar{g}\bar{f}, \quad \overline{\alpha f} = \bar{\alpha}\bar{f}, \quad \bar{\bar{f}} = f \quad \forall g, f \in \text{Gr}_n, \alpha \in \mathbb{C}. \quad (4.6)$$

Eine Funktion f , für die $\bar{f} = f$ gilt, soll *reell* genannt werden.

Um $\overline{\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_m}} = \vartheta_{i_m} \dots \vartheta_{i_1}$ wieder auf die Form $\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_m}$ zu bringen, benötigt man $1 + 2 + \dots + m = \frac{1}{2}m(m-1)$ Vertauschungen, so daß wir die Gleichung

$$\overline{g_m} = (-1)^{m(m-1)/2} g_m \quad (4.7)$$

für ein beliebiges Algebraelement g_m vom Grad m erhalten.

Als weitere Selbstabbildung der Grassmann-Algebra wird das Hodge-Dual \star definiert. Für Monome ist diese Abbildung durch die Vorschrift

$$\star(\vartheta_{i_1} \vartheta_{i_2} \dots \vartheta_{i_m}) = \frac{1}{(n-m)!} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1} i_{m+2} \dots i_n} \vartheta_{i_{m+1}} \vartheta_{i_{m+2}} \dots \vartheta_{i_n} \quad (4.8)$$

festgelegt, wobei $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ der total antisymmetrische Tensor ist und über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Offensichtlich bildet das Hodge-Dual ein Monom vom Grad m in ein Monom vom Grad $n-m$ ab. Die Erweiterung auf beliebige Elemente der Grassmann-Algebra erfolgt durch Linearität.

4.1.3. Differentiation

Analog zu $\partial_{q_i} q_j = \delta_{ij}$ lautet die elementare Ableitung für Funktionen auf der Grassmann-Algebra $\partial_{\vartheta_i} \vartheta_j = \delta_{ij}$. Diese Definition läßt sich verallgemeinern, indem man die Leibnitz-Regel benutzt. Betrachtet man z.B. die Ableitung eines Monoms vom Grad m , $\partial_{\vartheta_i} (\vartheta_{j_1} \vartheta_{j_2} \dots \vartheta_{j_m})$, dann kann man dies als Summe von m Termen schreiben, wobei im k -ten Term die Ableitung ∂_{ϑ_i} auf den Faktor ϑ_{j_k} wirkt. Um nun die Regel für die elementare Ableitung anwenden zu können, muß man ϑ_{j_k} mit den ersten $k - 1$ Faktoren des Monoms vertauschen, so daß ϑ_{j_k} direkt neben ∂_{ϑ_i} steht. Dieser Argumentation folgend erhalten wir

$$\partial_{\vartheta_i} (\vartheta_{j_1} \vartheta_{j_2} \dots \vartheta_{j_m}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \delta_{i,j_k} \vartheta_{j_1} \vartheta_{j_2} \dots \vartheta_{j_{k-1}} \vartheta_{j_{k+1}} \dots \vartheta_{j_m}. \quad (4.9)$$

Wenn g_m eine Funktion vom Grad m ist, dann hat $\partial_{\vartheta_i} g_m$ folglich den Grad $m - 1$.

Im Gegensatz zur Ableitung von Funktionen auf dem qp -Phasenraum muß man die Wirkung der Ableitungen $\vec{\partial}_{\vartheta_i} = \partial_{\vartheta_i}$ und $\overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i}$ auf eine Funktion unterscheiden. Für Monome vom Grad 1 liefern beide per Definition $\vartheta_j \vec{\partial}_{\vartheta_i} = \delta_{ij} = \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i} \vartheta_j$ das gleiche Ergebnis. Da nun aber die Ableitung $\overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i}$ rechts von dem Monom steht, muß man bei der Anwendung der Leibnitz-Regel die Faktoren des Monoms nach rechts durchkommutieren, so daß sich ein anderes Vorzeichen ergibt. Der Zusammenhang zwischen den beiden Ableitungen lautet

$$(\vartheta_{j_1} \vartheta_{j_2} \dots \vartheta_{j_m}) \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i} = (-1)^{m-1} \vec{\partial}_{\vartheta_i} (\vartheta_{j_1} \vartheta_{j_2} \dots \vartheta_{j_m}), \quad (4.10)$$

wie man leicht zeigen kann.

Wenn wir im folgenden $\partial_{\vartheta_2} \partial_{\vartheta_1} (\vartheta_1 \vartheta_2)$ schreiben, dann sind die Ableitungen in der Reihenfolge von rechts nach links durchzuführen, d. h. es wird die Klammerung $\partial_{\vartheta_2} [\partial_{\vartheta_1} (\vartheta_1 \vartheta_2)]$ impliziert. Für die Ableitungen $\overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i}$ gilt dementsprechend $\vartheta_2 \vartheta_1 \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} = [(\vartheta_2 \vartheta_1) \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1}] \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2}$. Da die Elemente der Grassmann-Algebra antikommutieren, gilt dies auch für die Ableitungen, wie man durch Vergleich der beiden Gleichungen

$$\partial_{\vartheta_2} \partial_{\vartheta_1} (\vartheta_1 \vartheta_2) = \partial_{\vartheta_2} \vartheta_2 = 1 \quad \text{und} \quad \partial_{\vartheta_1} \partial_{\vartheta_2} (\vartheta_1 \vartheta_2) = -\partial_{\vartheta_1} \partial_{\vartheta_2} (\vartheta_2 \vartheta_1) = -\partial_{\vartheta_1} \vartheta_1 = -1 \quad (4.11)$$

sehen kann.

Die Ableitung $\partial_{\vartheta_i} g_m$ einer Funktion g_m vom Grad m hat den Grad $m - 1$, so daß aus den Gleichungen (4.7) und (4.10)

$$\overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i} g_m = (-1)^{(m-1)(m-2)/2} \vec{\partial}_{\vartheta_i} g_m = (-1)^{m-1} \vec{\partial}_{\vartheta_i} ((-1)^{m(m-1)/2} g_m) = \bar{g}_m \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i} \quad (4.12)$$

folgt. Durch Iteration ist diese Regel auch auf mehr als eine Ableitung erweiterbar, wie das Beispiel

$$\overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} g = \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} g = \bar{g} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} \quad (4.13)$$

für zwei Ableitungen zeigt. Durch den Vergleich mit $\overleftarrow{\partial} f g = \bar{g} \overleftarrow{\partial} f$ kann man ablesen, daß die Involution der Ableitungen durch

$$\overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} = \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} = \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_2} \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_1} \quad \text{mit} \quad \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i} = \overleftarrow{\partial}_{\vartheta_i} \quad (4.14)$$

definiert werden kann. Die Verallgemeinerung für mehr als zwei Faktoren ist offensichtlich.

4.1.4. Integration

Die Integration von Funktionen auf der Grassmann-Algebra wurde von Berezin [Ber1966] entwickelt. Sie wird der Integration $\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x)$ für Funktionen auf \mathbb{C} nachempfunden, indem man folgendes verlangt:

1. Das Integral $\int d\vartheta_i$ ordnet einer Funktion auf Gr_n eine komplexe Zahl zu.
2. Die Integration ist *linear*, also $\int d\vartheta_i(f(\vartheta) + g(\vartheta)) = \int d\vartheta_i f(\vartheta) + \int d\vartheta_i g(\vartheta)$.
3. Sie ist *invariant unter Translation*, d.h. $\int d\vartheta_i f(\vartheta_i + \vartheta_j) = \int d\vartheta_i f(\vartheta_i)$ für $i \neq j$.

Um die letzte Bedingung zu verstehen, machen wir uns klar, daß auf Grund von (4.2) die allgemeine Form der betrachteten Funktion $f(\vartheta_i) = a + b\vartheta_i$ lautet. Wegen der geforderten Linearität erhält man somit

$$\int d\vartheta_i f(\vartheta_i + \vartheta_j) = \int d\vartheta_i (a + b(\vartheta_i + \vartheta_j)) = (a + b\vartheta_j) \int d\vartheta_i + b \int d\vartheta_i \vartheta_i. \quad (4.15a)$$

Die Translationsinvarianz verlangt aber, daß

$$\int d\vartheta_i f(\vartheta_i + \vartheta_j) = \int d\vartheta_i f(\vartheta_i) = a \int d\vartheta_i + b \int d\vartheta_i \vartheta_i \quad (4.15b)$$

gilt. Die letzten beiden Gleichungen sind nur dann miteinander verträglich, wenn wir $\int d\vartheta_i 1 = 0$ annehmen. Das Integral $\int d\vartheta_i \vartheta_i$ kann man auf eine beliebige Konstante normieren. Wir wählen $\int d\vartheta_i \vartheta_i = \hbar$, so daß die Generatoren ϑ_i implizit die Dimension $\sqrt{\hbar}$ tragen.

Zusammenfassend ist somit die Integration auf der Grassmann-Algebra durch die Linearität und die elementaren Integrale

$$\int d\vartheta_i 1 = 0 \quad \text{und} \quad \int d\vartheta_i \vartheta_i = \hbar \quad (4.16)$$

eindeutig bestimmt. Mehrfache Integrale werden hintereinander ausgeführt, z.B.

$$\int d\vartheta_i \int d\vartheta_j f(\vartheta_i, \vartheta_j) = \int d\vartheta_i \left(\int d\vartheta_j f(\vartheta_i, \vartheta_j) \right) \quad \text{für } i \neq j. \quad (4.17)$$

4.2. Grassmann-Mechanik

Ähnlich zu Abschnitt 1.1 wird hier eine Mechanik mit Hilfe der Grassmann-Algebra formuliert. Dabei stellt sich heraus, daß man im Gegensatz zur konventionellen Mechanik in jedem Fall Zwangsbedingungen zu berücksichtigen hat, was die Bestimmung der Bewegungsgleichungen erschwert. Die folgende Diskussion basiert auf Abschnitt 6.2 aus dem Buch [KS1997].

4.2.1. Hamilton-Formalismus

Den Lagrange-Formalismus kann man auf Funktionen von Grassmann-Variablen übertragen, wie z.B. Berezin und Marinov in [BM1977] und Casalbuoni in [Cas1976] gezeigt haben. Dazu betrachten wir die Lagrange-Funktion $L(\vartheta, \dot{\vartheta})$ und fordern, daß die Variation der Wirkung $S = \int L(\vartheta, \dot{\vartheta}) dt$ verschwindet. Genau wie auf dem Phasenraum mit kommutierenden Variablen ergibt sich auf diese Weise die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$.

Mit dem kanonischen Impuls $\pi = \partial_{\dot{\vartheta}} L$ erhalten wir durch eine Legendre-Transformation² die Hamilton-Funktion $H(\vartheta, \pi) = \dot{\vartheta}\pi - L(\vartheta, \pi)$. Die Bewegungsgleichungen folgen dann aus der Bedingung $\delta S = 0$, wobei die Wirkung $S = \int L(\vartheta, \pi) dt$ nun eine Funktion von ϑ und π ist. Partielle Integration führt zu

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \dot{\vartheta} \pi + \dot{\vartheta} \delta \pi - \delta \vartheta \partial_{\vartheta} H - \delta \pi \partial_{\pi} H \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \vartheta (\dot{\pi} + \partial_{\vartheta} H) + \delta \pi (\dot{\vartheta} + \partial_{\pi} H) \right) dt, \quad (4.18)$$

²Mit der Definition $\pi = \partial_{\dot{\vartheta}} L$ folgt unabhängig von L direkt $\partial_{\dot{\vartheta}} \pi = \partial_{\dot{\vartheta}} \partial_{\dot{\vartheta}} L = 0$, so daß die Voraussetzung $\partial_{\dot{\vartheta}} \pi \neq 0$ für die Gültigkeit der Legendre-Transformation nicht erfüllt sein kann. In Unterabschnitt 4.2.2 werden wir auf dieses Problem zurückkommen.

wobei die Vertauschung der Faktoren in dem Term $\dot{\vartheta} \delta\pi$ ein negatives Vorzeichen liefert. Mit der Bedingung $\delta S = 0$ liest man aus (4.18) schließlich folgende Hamilton-Gleichungen ab:

$$\dot{\vartheta} = -\partial_\pi H \quad \text{und} \quad \dot{\pi} = -\partial_\vartheta H. \quad (4.19)$$

Bis auf die Struktur der Vorzeichen ähneln diese Gleichungen denen in (1.3). Da $\dot{\vartheta}$ und $\dot{\pi}$ vom Grad eins sind, muß H eine Funktion vom Grad zwei sein.

Die Hamilton-Gleichungen kann man benutzen, um die Poisson-Klammer der Grassmann-Mechanik zu bestimmen. Dazu leiten wir die Observable $f(\vartheta, \pi; t)$ nach der Zeit ab:

$$\frac{df}{dt} = \dot{\vartheta} \partial_\vartheta f + \dot{\pi} \partial_\pi f + \frac{\partial f}{\partial t} = -((\partial_\pi H)(\partial_\vartheta f) + (\partial_\vartheta H)(\partial_\pi f_m)) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.20)$$

Diese Gleichung ist linear in f , so daß man sie für jeden Term f_m der Entwicklung von f getrennt betrachten kann. Da H vom Grad 1 ist und $\partial_\vartheta f_m$ vom Grad $m-1$, folgt aus (4.5):

$$(\partial_\pi H)(\partial_\vartheta f_m) = (-1)^{m-1} (\partial_\vartheta f_m)(\partial_\pi H) = (f_m \vec{\partial}_\vartheta)(\vec{\partial}_\pi H), \quad (4.21)$$

wobei im letzten Schritt (4.10) benutzt wurde. Die entsprechende Gleichung für $(\partial_\vartheta H)(\partial_\pi f_m)$ erhält man durch die Vertauschung von ϑ und π .

Die Bewegungsgleichung (4.20) kann daher in

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_P + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{mit} \quad \{f, g\}_P = -f(\vec{\partial}_\vartheta \vec{\partial}_\pi + \vec{\partial}_\pi \vec{\partial}_\vartheta)g \quad (4.22)$$

umgeformt werden, wobei analog zur Bewegungsgleichung (1.6) die Poisson-Klammer $\{f, g\}_P$ eingeführt wurde.

4.2.2. Diskussion der Zwangsbedingungen

In diesem Unterabschnitt überlegen wir uns, welche Form die Lagrange-Funktion haben kann. In der herkömmlichen Mechanik wird das freie Teilchen durch $L = m\dot{q}^2/2$ beschrieben. Daher könnte man annehmen, daß die Lagrange-Funktion des freien Teilchens in der Grassmann-Mechanik proportional zu $\dot{\vartheta}^2$ ist. Diese Größe ist aber identisch Null, so daß L nur linear in $\dot{\vartheta}$ sein kann.

Dies führt zu dem Problem, daß der kanonische Impuls $\pi = \partial_{\dot{\vartheta}} L$ nicht mehr von $\dot{\vartheta}$ abhängt, so daß $\partial_{\dot{\vartheta}} \pi = 0$ gilt. Daher kann man L nicht mehr als Funktion von ϑ und π darstellen, was aber gerade die Voraussetzung bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen war. Um dennoch mit $H = \dot{\vartheta}\pi - L(\vartheta, \dot{\vartheta})$ eine Funktion zu erhalten, die nicht mehr von $\dot{\vartheta}$ abhängt, muß die Lagrange-Funktion von der Form $L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \dot{\vartheta}\pi - V(\vartheta)$ sein. Auf diese Weise hängt die Hamilton-Funktion nur noch von ϑ ab und man erhält $H = V(\vartheta)$.

Mit dieser Wahl von L wird die Definition des kanonischen Impulses $\pi = \partial_{\dot{\vartheta}} L$ trivial. Da H nur von ϑ abhängt, nehmen wir an, daß das gleiche auch für π gilt. Wie zuvor muß der kanonische Impuls vom Grad 1 sein und folglich ist π proportional zu ϑ . Wir verlangen, daß sowohl $H = V(\vartheta)$ als auch L reell sind, so daß π einen imaginären Vorfaktor haben muß. Eine mögliche Wahl lautet daher $\pi = -i\vartheta/2$, womit sich die Lagrange-Funktion

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \dot{\vartheta}\pi - V(\vartheta) = \frac{i}{2}\vartheta\dot{\vartheta} - V(\vartheta) \quad (4.23)$$

ergibt.

Bei der Gleichung $\pi = -i\vartheta/2$ handelt es sich um eine *Zwangsbedingung*, die in diesem Fall aussagt, daß die Größe ϑ und der dazugehörige kanonische Impuls voneinander abhängen. Die offensichtliche Verallgemeinerung für Gr_n lautet

$$L(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m) = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^m \vartheta_i \dot{\vartheta}_i - V(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m) \quad \text{mit} \quad \pi_i = \partial_{\dot{\vartheta}_i} L = -\frac{i}{2} \vartheta_i. \quad (4.24)$$

4.2.3. Die Dirac-Klammer

Die Gleichung $\pi = -i\vartheta/2$ läßt sich auch in der Form $\chi = \pi + i\vartheta/2 = 0$ ausdrücken. Da die Poisson-Klammer $\{\chi, \chi\}_P = i\{\vartheta, \pi\} = -i$ von Null verschieden ist, handelt es sich um eine Zwangsbedingung *zweiter Art*.

Um eine solche Zwangsbedingung zu berücksichtigen, muß man die Poisson-Klammer aus (4.22) durch die *Dirac-Klammer* ersetzen. In diesem Fall lautet sie

$$\{f, g\}_D = \{f, g\}_P - \frac{\{f, \chi\}_P \{\chi, g\}_P}{\{\chi, \chi\}_P} = \{f, g\}_P - i\{f, \chi\}_P \{\chi, g\}_P = -if(\vec{\partial}_\vartheta \vec{\partial}_\vartheta)g. \quad (4.25)$$

Für ein System, das mit n Generatoren ϑ_i beschrieben wird, erhält man analog dazu

$$\{f, g\}_D = -if \left(\sum_{i=1}^n \vec{\partial}_{\vartheta_i} \vec{\partial}_{\vartheta_i} \right) g. \quad (4.26)$$

Eine ausführlichere Herleitung von (4.26) ist in [HH2002a] zu finden. Die Definition der Dirac-Klammer geht auf [Dir1966] zurück.

Mit der Dirac-Klammer (4.26) können wir schließlich die korrigierte Bewegungsgleichung

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_D + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.27)$$

angeben.

Nun soll noch die Symmetrie der Dirac-Klammer (4.26) bestimmt werden. Da $f_i \vec{\partial}_{\vartheta_i}$ vom Grad $l-1$ ist und $\vec{\partial}_{\vartheta_i} g_m$ vom Grad $m-1$, folgt aus Gleichung (4.5)

$$\{f_l, g_m\}_D = -i \sum_{i=1}^n (f_i \vec{\partial}_{\vartheta_i})(\vec{\partial}_{\vartheta_i} g_m) = -i(-1)^{(l-1)(m-1)} \sum_{i=1}^n (\vec{\partial}_{\vartheta_i} g_m)(f_i \vec{\partial}_{\vartheta_i}). \quad (4.28)$$

Um dies wieder in der Form einer Dirac-Klammer schreiben zu können, wenden wir Gleichung (4.10) an:

$$\{f_l, g_m\}_D = -i(-1)^{(l-1)(m-1)}(-1)^{m-1}(-1)^{l-1} \sum_{i=1}^n g_m \vec{\partial}_{\vartheta_i} \vec{\partial}_{\vartheta_i} f_l = i(-1)^{lm} \sum_{i=1}^n g_m \vec{\partial}_{\vartheta_i} \vec{\partial}_{\vartheta_i} f_l \quad (4.29)$$

Daher ergibt sich schließlich

$$\{f_l, g_m\}_D = -(-1)^{lm} \{g_m, f_l\}_D. \quad (4.30)$$

4.3. Das Grassmann-Moyal-Produkt

In diesem Abschnitt führen wir ein Sternprodukt für Elemente der Grassmann-Algebra ein, das ähnliche Eigenschaften besitzt wie das Moyal-Produkt des qp -Phasenraums. Mit diesem Produkt läßt sich eine Klammer definieren, mit der die Grassmann-Algebra zu einer graduierten Lie-Algebra wird.

4.3.1. Definition

In Abschnitt 1.4 haben wir das Moyal-Produkt als Deformation der punktweisen Multiplikation von Funktionen auf dem qp -Phasenraum eingeführt. Dabei wurde verlangt, daß das $1/i\hbar$ -fache der Kommutator-Klammer mit diesem Produkt im Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ in die Poisson-Klammer³ übergeht. Dadurch ist das Moyal-Produkt aus Gleichung (1.41) eindeutig bestimmt.

³Da dort keine Zwangsbedingungen vorliegen, ist die Poisson-Klammer identisch mit der Dirac-Klammer.

Auf ähnliche Weise wollen wir hier ein Sternprodukt für Funktionen auf Gr_n definieren. Da dieses Produkt eine Deformation des Grassmann-Produkts ist, soll es hier *Grassmann-Moyal-Produkt* genannt werden. Eine auf diesem Produkt basierende Klammer, die mit der Dirac-Klammer vergleichbar sein soll, muß notwendigerweise die gleiche Symmetrie aufweisen. Wir wählen daher

$$\{f_l, g_m\}_* = f_l * g_m - (-1)^{lm} g_m * f_l \quad (4.31)$$

als Ansatz für die *Grassmann-Moyal-Klammer*. Auf Grund der Linearität in beiden Argumenten f_l und g_m ist diese Klammer auf alle Elemente der Grassmann-Algebra anwendbar.

Mit der Definition der Grassmann-Moyal-Klammer aus (4.31) lassen sich die wesentlichen Forderungen an das Grassmann-Moyal-Produkt in den beiden Gleichungen

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} f * g = fg \quad \text{und} \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} \{f, g\}_* = \{f, g\}_D = -if \left(\sum_{i=1}^n \vec{\partial}_{\vartheta_i} \vec{\partial}_{\vartheta_i} \right) g \quad (4.32)$$

zusammenfassen. Es ist leicht zu zeigen, daß das Sternprodukt

$$f * g = f \exp \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^n \vec{\partial}_{\vartheta_i} \vec{\partial}_{\vartheta_i} \right) g \quad (4.33)$$

diese Voraussetzungen erfüllt. Man beachte, daß zur Reihenentwicklung des Grassmann-Moyal-Produkts im Gegensatz zum Moyal-Produkt aus Abschnitt (1.4) immer nur endlich viele Terme beitragen, wie an zwei Beispielen im Anhang B.1 demonstriert wird.

Bemerkungen:

- Die fundamentale Grassmann-Moyal-Klammer lautet $\{\vartheta_i, \vartheta_j\}_* = \hbar \delta_{ij}$, so daß die Generatoren ϑ_i mit dem Grassmann-Moyal-Produkt eine Clifford-Algebra erzeugen. Dies wurde bereits in [BFF⁺1978b, S. 123] angedeutet. Deformiert man also das Produkt der Grassmann-Algebra zu dem Grassmann-Moyal-Produkt (4.33), dann kann man von einer *Cliffordisierung* sprechen. Andere Zugänge zu Clifford-Algebren wurden von B. Fauser untersucht, wobei hier insbesondere auf seine umfassende Habilitationsschrift [Fau2002] verwiesen werden soll. Dort wird gezeigt, wie man diese Methoden für die Quantenfeldtheorie nutzbar machen kann.
- Genau wie in [HH2002a] basiert diese Herleitung des fermionischen Moyal-Produkts auf der Dirac-Klammer. Man beachte aber, daß die Definition der Klammer $\{f, g\}_*$ von derjenigen in [HH2002a] abweicht.
- Bei der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Grassmann-Mechanik handelt es sich um sogenannte *pseudoklassische* Physik, die eine Verallgemeinerung des Begriffs der klassischen Physik darstellt. Obwohl bekannt ist, daß Clifford-Algebren eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik spielen, handelt es sich bei der hier diskutierten Deformation des Grassmann-Produkts daher nicht um eine „Quantisierung“ im engeren Sinne.

4.3.2. Elementare Eigenschaften des Grassmann-Moyal-Produkts

Das in Gleichung (4.33) definierte Grassmann-Moyal-Produkt ist assoziativ:

$$(f * g) * h = f * (g * h). \quad (4.34)$$

Für eine Algebra mit nur einem Generator wird die Assoziativität dieses Sternprodukts im Anhang B.2 bewiesen.

Genau wie das Moyal-Produkt für Funktionen auf dem qp -Phasenraum ist auch das Grassmann-Moyal-Produkt aus (4.33) hermitesch im Sinne von Gleichung (1.47). Unter Anwendung von Gleichung (4.12) erhalten wir z. B. für den Fall $n = 1$:

$$\overline{f * g} = \overline{fg} + \frac{\hbar}{2} \overline{(f \tilde{\partial}_\vartheta)(\tilde{\partial}_\vartheta g)} = \bar{g} \bar{f} + \frac{\hbar}{2} \overline{(\tilde{\partial}_\vartheta g)(f \tilde{\partial}_\vartheta)} = \bar{g} \bar{f} + \frac{\hbar}{2} (\bar{g} \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta \bar{f}) = \bar{g} * \bar{f}. \quad (4.35)$$

Die Verallgemeinerung für beliebige Werte von n ist ebenfalls möglich.

Darüber hinaus kann man auch hier das Grassmann-Moyal-Produkt bei der Integration über den gesamten Phasenraum durch das gewöhnliche Produkt der Grassmann-Algebra ersetzen:

$$\int d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n f * g = \int d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n fg. \quad (4.36)$$

Im folgenden wird diese Gleichung für $n = 1$ bewiesen, wohingegen der allgemeine Beweis im Anhang B.3 zu finden ist.

Wir betrachten die beiden Funktionen f und g auf einer Grassmann-Algebra mit nur einem Erzeuger ϑ . Die allgemeine Form dieser beiden Funktionen lautet dann $f = a + b\vartheta$ und $g = c + d\vartheta$, wobei a, b, c und d beliebige komplexe Zahlen sind. Damit folgt

$$fg = ac + (b + d)\vartheta \quad \text{und} \quad f * g = fg + (a + b\vartheta) \tilde{\partial}_\vartheta \tilde{\partial}_\vartheta (c + d\vartheta) = ac + (b + d)\vartheta + bd. \quad (4.37)$$

Der Gleichung (4.16) zufolge trägt bei der Integration $\int d\vartheta$ dieser beiden Gleichungen nur der Term proportional zu ϑ bei, so daß man sowohl für $\int d\vartheta fg$ als auch für $\int d\vartheta f * g$ das Ergebnis $b + d$ erhält.

Wie bereits in Gleichung (4.3) angegeben wurde, kann man die Grassmann-Algebra Gr_n als direkte Summe

$$\text{Gr}_n = \text{Gr}_n^{(0)} \oplus \text{Gr}_n^{(1)} \quad (4.38)$$

schreiben, wobei die Funktion f_l vom Grad l ein Element aus $\text{Gr}_n^{(l \bmod 2)}$ ist.

Aus der Definition des Grassmann-Moyal-Produkts (4.33) geht hervor, daß die Ableitungen dort nur in der Form von Bidifferentialoperatoren $\tilde{\partial}_{\vartheta_i} \tilde{\partial}_{\vartheta_i}$ auftreten. Da die Erzeuger in $\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_k} * \vartheta_{j_1} \dots \vartheta_{j_l}$ somit immer paarweise wegfallen, bleibt die \mathbb{Z}_2 -Graduierung der Grassmann-Algebra auch mit dem deformierten Produkt erhalten. Dies kommt in der Gleichung

$$f_l * g_m \in \text{Gr}_n^{(l+m \bmod 2)} \quad (4.39)$$

zum Ausdruck, wobei der Grenzfall $\hbar \rightarrow 0$ wieder zu der Gleichung (4.4) führt.

4.3.3. Eine graduierte Lie-Algebra

Betrachten wir nun die Grassmann-Moyal-Klammer, die in Gleichung (4.31) definiert wurde:

$$\{f_l, g_m\}_* = f_l * g_m - (-1)^{lm} g_m * f_l. \quad (4.40)$$

Da die beiden Terme jeweils Elemente aus $\text{Gr}_n^{(l+m \bmod 2)}$ sind, erhält man auch mit diesem Produkt die gleiche Graduierung wie in Gleichung (4.39):

$$\{f_l, g_m\}_* \in \text{Gr}_n^{(l+m \bmod 2)}. \quad (4.41a)$$

Die in (4.31) bzw. (4.40) angegebene Definition wurde so gewählt, daß die Grassmann-Moyal-Klammer die gleiche Symmetrie aufweist wie die Dirac-Klammer. Entsprechend zur Gleichung (4.30) gilt daher

$$\{f_l, g_m\}_* = -(-1)^{lm} \{g_m, f_l\}_*. \quad (4.41b)$$

Mit der Assoziativität des Grassmann-Moyal-Produkts führt die letzte Gleichung zu der verallgemeinerten Jacobi-Identität

$$(-1)^{km} \{f_k, \{g_l, h_m\}_*\}_* + (-1)^{lk} \{g_l, \{h_m, f_k\}_*\}_* + (-1)^{ml} \{h_m, \{f_k, g_l\}_*\}_* = 0. \quad (4.41c)$$

Die letzten drei Gleichungen zeigen, daß es sich bei dem Vektorraum Gr_n mit der Grassmann-Moyal-Klammer als Produkt um eine *graduierte Lie-Algebra* handelt.

4.4. Zeitentwicklung und Spektraltheorie

Im ersten Unterabschnitt werden wir zunächst die Herleitung der quantisierten Bewegungsgleichung abschließen. Die darauf basierende Spektraltheorie wird im darauffolgenden Unterabschnitt analog zur bosonischen Deformationsquantisierung definiert. Schließlich gehen wir im letzten Unterabschnitt noch auf die Definition der Spur ein, mit der man Erwartungswerte bestimmen kann.

4.4.1. Zeitentwicklung von Observablen

In Gleichung (4.27) wurde bereits die Bewegungsgleichung der pseudoklassischen Mechanik angegeben, die unter Verwendung der Dirac-Klammer auch die vorliegenden Zwangsbedingungen berücksichtigt.

Die Quantisierung wird nun durchgeführt, indem man die Dirac-Klammer durch die Grassmann-Moyal-Klammer aus Gleichung (4.31) ersetzt. Auf diese Weise ergibt sich die quantenmechanische Bewegungsgleichung

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \{f, H\}_* + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} (f * H - H * f) + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [f, H]_* + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.42)$$

Da die Hamilton-Funktion H vom Grad 2 ist, kann die Grassmann-Moyal-Klammer hier durch die gewöhnliche Kommutatorklammer ersetzt werden.

Die Bewegungsgleichung (4.42) ist bis auf das verwendete Sternprodukt identisch mit (1.86). Für eine zeitunabhängige Hamilton-Funktion kann man daher auch hier die formale Lösung auf die gleiche Weise angeben. Sie lautet

$$f(t) = \overline{\text{Exp}(Ht)} * f(0) * \text{Exp}(Ht) \quad \text{mit} \quad \text{Exp}(Ht) = e_*^{-iHt/\hbar} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{i\hbar} \right)^k H^{k*}, \quad (4.43)$$

wobei im Sternexponential $\text{Exp}(Ht)$ hier das Grassmann-Moyal-Produkt benutzt wird.

4.4.2. Spektraltheorie

Wie sich gezeigt hat, gleicht das Grassmann-Moyal-Produkt dem bosonischen Moyal-Produkt. Außerdem ergibt sich in der fermionischen Deformationsquantisierung für die Observablen eine Zeitentwicklung, die formal identisch mit derjenigen in der bosonischen Theorie ist. Daher nehmen wir an, daß auch in der fermionischen Theorie die Projektoren und deren Energieniveaus wie in Abschnitt 1.7 über das Sternexponential ermittelt werden können. Um die Argumentation aus der bosonischen Deformationsquantisierung nicht wiederholen zu müssen, übernehmen wir die Ergebnisse zur Spektraltheorie aus der bosonischen Theorie, ohne daß hier eine ausführliche Herleitung präsentiert wird.

Für eine zeitunabhängige Hamilton-Funktion H ist das Sternexponential aus Gleichung (4.43) gerade die Lösung der Differentialgleichung

$$i\hbar \frac{d}{dt} \text{Exp}(Ht) = H * \text{Exp}(Ht). \quad (4.44)$$

Über die Fourier-Dirichlet-Entwicklung

$$\text{Exp}(Ht) = \sum_E \pi_E e^{-iEt/\hbar} \quad (4.45)$$

legt das Sternexponential das Spektrum der Eigenwerte E zur Hamilton-Funktion H und die zugehörigen Projektoren π_E fest. Die auf diese Weise definierten Projektoren erfüllen die Gleichungen

$$H * \pi_E = E \pi_E, \quad \pi_E * \pi_{E'} = \delta_{E,E'} \pi_E \quad \text{und} \quad \sum_E \pi_E = 1, \quad (4.46)$$

wobei die erste die Sterneigenwertgleichung ist und die letzten beiden Gleichungen die Projektor-eigenschaft der Projektoren wiedergeben.

4.4.3. Definition der Spur und Normierung

Die (fermionischen) Projektoren auf der Grassmann-Algebra liefern nur dann eine sinnvolle quantenmechanische Beschreibung, wenn man mit ihnen Erwartungswerte von Observablen bestimmen kann. Wie in Gleichung (1.37) zu sehen ist, geschieht dies für herkömmliche (bosonische) Wigner-Funktionen mit Hilfe einer Spur, die durch eine Integration über den gesamten qp -Phasenraum definiert ist. Für fermionische Projektoren werden wir die Spur auf ähnliche Weise festlegen.

Mit Hilfe des Hodge-Duals aus Gleichung (4.8) definieren wir die *Spur* der Grassmann-Algebra als die lineare Abbildung

$$\mathrm{Tr}(f) \propto \int d\vartheta_n d\vartheta_{n-1} \dots d\vartheta_1 \star f. \quad (4.47)$$

Die Bezeichnung als Spur ist unter anderem durch die Gültigkeit der Gleichung

$$\mathrm{Tr}(f \star g) = \mathrm{Tr}(g \star f) \quad (4.48)$$

gerechtfertigt, die in Anhang B.4 bewiesen wird. Das Hodge-Dual in der Definition (4.47) ist notwendig, damit nur solche Terme von f zur Spur beitragen, die den Grad 0 haben.

Der Proportionalitätsfaktor in (4.47) ist so zu wählen, daß die Projektoren die Normierungsbedingung

$$\mathrm{Tr}(\pi_E) = 1, \quad (4.49)$$

erfüllen. Wenn sich das betrachtete System in dem Zustand befindet, der durch den Projektor π_E beschrieben wird, dann kann der Erwartungswert der Observablen f durch

$$\langle f \rangle = \mathrm{Tr}(f \star \pi_E) \quad (4.50)$$

bestimmt werden.

Implizit ist die Normierung der Projektoren bereits durch die Gleichung $\pi_E \star \pi_E = \pi_E$ aus (4.46) festgelegt. Im Abschnitt 1.7 wurde gezeigt, daß alle bosonischen Projektoren die gleiche Normierung (1.104) besitzen. Daher wollen wir annehmen, daß auch hier die Spur von allen Projektoren das gleiche Ergebnis liefert. Nur dann kann man die Normierungsbedingung (4.49) einfach durch die Wahl des Proportionalitätsfaktors in (4.47) anpassen.

Wir nehmen also an, daß

$$\int d\vartheta_n d\vartheta_{n-1} \dots d\vartheta_1 \star \pi_E = C \quad (4.51)$$

für alle Projektoren π_E die gleiche Zahl C ergibt. Der Proportionalitätsfaktor der Spur (4.47) wird dann durch die letzte Gleichung aus (4.46) festgelegt. Durch Anwendung von $\int d\vartheta_n \dots d\vartheta_1 \star$ auf beiden Seiten erhält man

$$\sum_E C = \#(E) C \stackrel{!}{=} \int d\vartheta_n d\vartheta_{n-1} \dots d\vartheta_1 \star 1 = \hbar^n \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{\hbar^n}{\#(E)}, \quad (4.52)$$

wobei $\#(E)$ die Anzahl der Energieniveaus im Spektrum angibt. Der Vergleich von (4.51) mit (4.47) zeigt, daß der Proportionalitätsfaktor C^{-1} ist. Die Spur lautet daher

$$\mathrm{Tr}(f) = \frac{\#(E)}{\hbar^n} \int d\vartheta_n d\vartheta_{n-1} \dots d\vartheta_1 \star f. \quad (4.53)$$

Falls die Energieniveaus entartet sind und man die Projektoren eines Niveaus mit weiteren Indizes differenziert, dann ist $\#(E)$ durch die Anzahl der unterschiedenen Zustände zu ersetzen.

Bemerkung: In Kapitel 7 werden wir die Spur (4.47) in einem anderen Kontext verwenden. Dort wird der Proportionalitätsfaktor so gewählt, das die Spur (4.47) über einen Isomorphismus einer Matrixspur entspricht.

4.5. Vereinigung mit der bosonischen Theorie

Da im folgenden verschiedene Sternprodukte auftreten, werden wir sie mit einem Index unterscheiden. Das (bosonische) Moyal-Produkt wird mit $*_M$ bezeichnet, während das Symbol $*_G$ das (fermionische) Grassmann-Moyal-Produkt repräsentiert.

4.5.1. Das Super-Moyal-Produkt

Um Systeme im $qp\vartheta$ -Phasenraum quantisieren zu können, müssen das Moyal- und das Grassmann-Moyal-Produkt zu einem Sternprodukt vereint werden. Die Gleichungen (1.45) und (4.33) legen die Definition

$$g *_S G = g \exp \left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{i=1}^{n_M} (\tilde{\partial}_{q_i} \tilde{\partial}_{p_i} - \tilde{\partial}_{p_i} \tilde{\partial}_{q_i}) + \frac{\hbar}{2} \sum_{j=1}^{n_G} \tilde{\partial}_{\vartheta_j} \tilde{\partial}_{\vartheta_j} \right) G \quad (4.54)$$

nahe, wobei wir dieses Produkt *Super-Moyal-Produkt* nennen wollen. Ein ähnliches Produkt wird auch in [Zac2000b] erwähnt.

Jede Funktion auf dem $qp\vartheta$ -Phasenraum kann man wie in Gleichung (4.2) in der Form

$$g(q, p, \vartheta) = \sum_{k=0}^{n_G} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} g_k^{i_1 i_2 \dots i_k}(q, p) \vartheta_{i_1} \vartheta_{i_2} \dots \vartheta_{i_k} \quad (4.55)$$

angeben, wobei die Koeffizienten $g_k^{i_1 i_2 \dots i_k}(q, p)$ jetzt Funktionen auf dem qp -Phasenraum sind. In der letzten Gleichung stehen q , p und ϑ als Abkürzung für alle Variablen q_i , p_i bzw. ϑ_j .

Wie die Gleichung (4.55) zeigt, kann jede Funktion als endliche Summe von Termen der Form

$$g_k(q, p, \vartheta) = b(q, p) f_k(\vartheta) \quad (4.56)$$

geschrieben werden, wobei $f_k(\vartheta)$ eine Funktion vom Grad k ist. Der Funktion $g_k(q, p, \vartheta)$ wollen wir daher auch den Grad k zuordnen. Die Zerlegung der Grassmann-Algebra Gr_{n_G} aus (4.38) kann man direkt auf den $qp\vartheta$ -Phasenraum übertragen:

$$\text{SGr}_{n_M, n_G} = \text{SGr}_{n_M, n_G}^{(0)} \oplus \text{SGr}_{n_M, n_G}^{(1)}, \quad (4.57)$$

wobei $\text{SGr}_{n_M, n_G}^{(0)}$ nur gerade und $\text{SGr}_{n_M, n_G}^{(1)}$ nur ungerade Elemente enthält. Im folgenden betrachten wir nur Funktionen von der in (4.56) angegebenen Art, wobei die Verallgemeinerung immer mittels (4.55) möglich ist.

In dem Super-Moyal-Produkt aus Gleichung (4.54) treten keine Bidifferentialoperatoren auf, die bosonische und fermionische Ableitungen gemeinsam enthalten. Daher kann man den bosonischen und fermionischen Anteil eines Sternprodukts getrennt berechnen, was in der Gleichung

$$(b(p, q) f_l(\vartheta)) *_S (B(p, q) F_m(\vartheta)) = (b(p, q) *_M B(p, q)) (f_l(\vartheta) *_G F_m(\vartheta)) \quad (4.58)$$

zum Ausdruck gebracht wird. Diese Gleichung zeigt, daß sich ein Produkt der Form $b(p, q) f_l(\vartheta)$ ähnlich einem Tensorprodukt verhält. Daher kann man Regeln wie z.B.

$$\begin{aligned} [b(p, q) f_l(\vartheta), B(p, q) F_m(\vartheta)]_{*_S} &= \frac{1}{2} \left(\{b(p, q), B(p, q)\}_{*_M} [f_l(\vartheta), F_m(\vartheta)]_{*_P} \right. \\ &\quad \left. + [b(p, q), B(p, q)]_{*_M} \{f_l(\vartheta), F_m(\vartheta)\}_{*_P} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

aus der Tensoralgebra übernehmen.

Da die beiden Sternprodukte $*_M$ und $*_G$ hermitesch sind, folgt aus Gleichung (4.58), daß das gleiche auch für das Super-Moyal-Produkt

$$\overline{g *_S G} = \bar{G} *_S \bar{g} \quad (4.60)$$

gültig ist.

Die Gleichung (4.39) besagt, daß das Produkt $f_l(\vartheta) *_G F_m(\vartheta)$ aus (4.58) ein Element aus $\text{Gr}_n^{(l+m \bmod 2)}$ ist. Mit den Definitionen

$$g_l(q, p, \vartheta) = b(q, p) f_l(\vartheta) \quad \text{und} \quad G_m(q, p, \vartheta) = B(q, p) F_m(\vartheta) \quad (4.61)$$

folgt aus (4.58) daher

$$g_l(q, p, \vartheta) *_S G_m(q, p, \vartheta) \in \text{SGr}_{n_M, n_G}^{(l+m \bmod 2)}. \quad (4.62)$$

Dies zeigt, daß der $qp\vartheta$ -Phasenraum mit dem Super-Moyal-Produkt ebenfalls eine \mathbb{Z}_2 -graduierte Algebra bildet.

4.5.2. Die Super-Moyal-Klammer

Bisher sind wir den beiden Klammern

$$[b(q, p), B(q, p)]_{*_M} = b(q, p) *_M B(q, p) - B(q, p) *_M b(q, p) \quad (4.63a)$$

$$\text{und} \quad \{f_l(\vartheta), F_m(\vartheta)\}_{*_G} = f_l(\vartheta) *_G F_m(\vartheta) - (-1)^{lm} F_m(\vartheta) *_G f_l(\vartheta) \quad (4.63b)$$

begegnet, wobei es sich hier um die Moyal-Klammer (1.43) und die Grassmann-Moyal-Klammer (4.31) handelt. Mit Hilfe des Super-Moyal-Produkts kann man diese beiden Klammern zur *Super-Moyal-Klammer*

$$\{g_l(q, p, \vartheta), G_m(q, p, \vartheta)\}_{*_S} = g_l(q, p, \vartheta) *_S G_m(q, p, \vartheta) - (-1)^{lm} G_m(q, p, \vartheta) *_S g_l(q, p, \vartheta) \quad (4.64)$$

vereinen. Für $l = m = 0$, also ohne ϑ -Abhängigkeit, erhält man einerseits die Moyal-Klammer zurück. Falls die Funktionen g_l und G_m nicht von q oder p abhängen, ergibt sich andererseits die Grassmann-Moyal-Klammer.

Analog zur Argumentation aus Unterabschnitt 4.3.3 folgt aus den Gleichungen (4.62) und (4.64), daß es sich bei dem Phasenraum SGr_{n_M, n_G} zusammen mit der Super-Moyal-Klammer um einen graduierte Lie-Algebra handelt. Dies kommt in den folgenden drei Zeilen zum Ausdruck:

$$\{g_l(q, p, \vartheta), G_m(q, p, \vartheta)\}_{*_S} \in \text{SGr}_{n_M, n_G}^{(l+m \bmod 2)}, \quad (4.65a)$$

$$\{g_l(q, p, \vartheta), G_m(q, p, \vartheta)\}_{*_S} = -(-1)^{lm} \{G_m(q, p, \vartheta), g_l(q, p, \vartheta)\}_{*_S} \quad \text{und} \quad (4.65b)$$

$$(-1)^{km} \{h_k, \{g_l, G_m\}_{*_S}\}_{*_S} + (-1)^{lk} \{g_l, \{G_m, h_k\}_{*_S}\}_{*_S} + (-1)^{ml} \{G_m, \{h_k, g_l\}_{*_S}\}_{*_S} = 0, \quad (4.65c)$$

wobei in der letzten Gleichung auch h_k von der Form ist, die in Gleichung (4.56) angegeben wurde.

4.5.3. Bewegungsgleichung und Spektraltheorie.

Die beiden Bewegungsgleichungen aus (1.86) und (4.42), die sich in der Form

$$\frac{d}{dt} b(q, p; t) = \frac{1}{i\hbar} [b(q, p; t), H(q, p; t)]_{*_M} + \frac{\partial}{\partial t} b(q, p; t) \quad (4.66a)$$

$$\text{und} \quad \frac{d}{dt} f(\vartheta; t) = \frac{1}{i\hbar} [f(\vartheta, t), H(\vartheta, t)]_{*_G} + \frac{\partial}{\partial t} f(\vartheta; t) \quad (4.66b)$$

schreiben lassen, können wir zu

$$\frac{d}{dt} g(q, p, \vartheta; t) = \frac{1}{i\hbar} [g(q, p, \vartheta; t), H(q, p, \vartheta; t)]_{*_S} + \frac{\partial}{\partial t} g(q, p, \vartheta; t) \quad (4.67)$$

vereinen. Wenn man die Funktion $g(q, p, \vartheta; t)$ durch $b(q, p; t)$ oder $f(\vartheta; t)$ ersetzt, erhält man mit Hilfe von Gleichung (4.58) jeweils eine der beiden zuvor genannten Gleichungen zurück. Für eine zeitunabhängige Hamilton-Funktion lautet die formale Lösung dieser Differentialgleichung wie im bosonischen und fermionischen Fall

$$g(q, p, \vartheta; t) = \overline{\text{Exp}_{*S}(Ht)} *_S g(q, p, \vartheta; 0) *_S \text{Exp}_{*S}(Ht), \quad (4.68)$$

wobei im Sternexponential diesmal das Super-Moyal-Produkt auftritt.

Das Sternexponential bildet wie in den Abschnitten 1.7 und 4.3 die Grundlage der Spektraltheorie. Über seine Fourier-Dirichlet-Entwicklung bestimmt es das Spektrum des Energieniveaus E_S und die dazugehörigen Projektoren $\pi_{E_S}^S$:

$$\text{Exp}_{*S}(H_S(q, p, \vartheta) t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{i\hbar} \right)^k H_S^{k*S} = \sum_{E_S} \pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta) e^{-iE_S t/\hbar}. \quad (4.69)$$

4.5.4. Ein Spezialfall

Eine besonders einfache Situation tritt auf, wenn die Hamilton-Funktion von der Form

$$H_S(q, p, \vartheta) = H_B(q, p) + H_F(\vartheta) \quad (4.70)$$

ist, wobei wir in Abschnitt 5.2 ein Beispiel eines solchen Systems diskutieren werden. Auf Grund von Gleichung (4.58) zerfällt das Sternexponential in zwei Faktoren, wie die Gleichung

$$\text{Exp}_{*S}(H_S(q, p, \vartheta) t) = \text{Exp}_{*M}(H_B(q, p) t) \text{Exp}_{*G}(H_F(\vartheta) t) \quad (4.71)$$

zeigt. Den bosonischen und den fermionischen Teil dieses Problems kann man daher separat behandeln.

Wenn wir die Fourier-Dirichlet-Entwicklung des bosonischen und des fermionischen Sternexponentials als

$$\text{Exp}_{*M}(H_B(q, p) t) = \sum_{E_B} \pi_{E_B}^B(q, p) e^{-iE_B t/\hbar} \quad \text{und} \quad \text{Exp}_{*G}(H_F(\vartheta) t) = \sum_{E_F} \pi_{E_F}^F(\vartheta) e^{-iE_F t/\hbar} \quad (4.72)$$

schreiben, dann folgt aus Gleichung (4.71)

$$\text{Exp}_{*S}(H_S(q, p, \vartheta) t) = \sum_{E_B, E_F} \pi_{E_B}^B(q, p) \pi_{E_F}^F(\vartheta) e^{-i(E_B + E_F)t/\hbar}. \quad (4.73)$$

Aus dem Vergleich mit (4.69) liest man

$$\pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta) = \pi_{E_B}^B(q, p) \pi_{E_F}^F(\vartheta) \quad \text{und} \quad E_S = E_B + E_F \quad (4.74)$$

ab. Die Projektoren sind also gerade die Produkte der bosonischen und fermionischen Projektoren und die Werte des Energiespektrum ergeben sich aus der Summe der Energieniveaus der beiden Teilsysteme.

Bemerkung: Die in (4.74) angegebene Form des Projektors stellt außerdem sicher, daß die Stern-eigenwertgleichung erfüllt ist. Um dies zu zeigen, benutzen wir die Tatsache, daß die Projektoren aus (4.72) die beiden Sterneigenwertgleichungen

$$H_B(q, p) *_M \pi_{E_B}^B(q, p) = E_B \pi_{E_B}^B(q, p) \quad \text{und} \quad H_F(\vartheta) *_G \pi_{E_F}^F(\vartheta) = E_F \pi_{E_F}^F(\vartheta) \quad (4.75)$$

erfüllen. Dies führt mit Gleichung (4.58) zu

$$\begin{aligned} H_S(q, p, \vartheta) *_S \pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta) &= (H_B(q, p) *_G \pi_{E_B}^B(q, p)) \pi_{E_F}^F(\vartheta) + \pi_{E_B}^B(q, p) (H_F(\vartheta) *_G \pi_{E_F}^F(\vartheta)) \\ &= (E_B + E_F) \pi_{E_B}^B(q, p) \pi_{E_F}^F(\vartheta) \\ &= E_S \pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta), \end{aligned} \quad (4.76)$$

so daß auch die Sterneigenwertgleichung des Gesamtsystems erfüllt ist.

4.5.5. Definition der Super-Spur

Die Definitionen der bosonischen (1.61) und der fermionischen Spur (4.53) können wir zu einer Spur auf dem $qp\vartheta$ -Phasenraum vereinen. Für $2n_M$ bosonische Freiheitsgrade und n_G Generatoren der Grassmann-Algebra erhält man

$$\mathrm{Tr}_S(g(q, p, \vartheta)) = \frac{\#(E_F)}{\hbar^{n_G}} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{n_M} \int dq_1 \dots dq_{n_M} dp_1 \dots dp_{n_M} \int d\vartheta_{n_G} \dots d\vartheta_1 \star g(q, p, \vartheta), \quad (4.77)$$

wobei $\#(E_F)$ die Anzahl der fermionischen Energieniveaus angibt.

Bei einer Funktion, die sich als Produkt eines bosonischen und eines fermionischen Faktors schreiben läßt, kann man die Spur Tr_S auf folgende Weise in einen bosonischen und einen fermionischen Faktor zerlegen:

$$\mathrm{Tr}_S(b(q, p) f(\vartheta)) = \mathrm{Tr}_{qp}(b(q, p)) \mathrm{Tr}_G(f(\vartheta)). \quad (4.78)$$

Zur Unterscheidung wurde die bosonische Spur mit Tr_{qp} und die fermionische Spur mit Tr_G bezeichnet. Wie sich zeigt, kann der bosonische und der fermionische Beitrag zur Spur in (4.78) getrennt bestimmt werden.

Betrachten wir die in Gleichung (4.74) angegebenen Projektoren

$$\pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta) = \pi_{E_B}^B(q, p) \pi_{E_F}^F(\vartheta). \quad (4.79)$$

Wenn wir annehmen, daß die Projektoren der beiden Teilsysteme gemäß den Gleichungen

$$\mathrm{Tr}_{qp}(\pi_{E_B}^B(q, p)) = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{Tr}_G(\pi_{E_F}^F(\vartheta)) = 1 \quad (4.80)$$

normiert sind, dann folgt aus Gleichung (4.78)

$$\mathrm{Tr}_S(\pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta)) = 1. \quad (4.81)$$

Die Normierung von $\pi_{E_B}^B(q, p)$ und $\pi_{E_F}^F(\vartheta)$ impliziert daher auch die Normierung des Projektors $\pi_{E_S}^S(q, p, \vartheta)$.

5. Der supersymmetrische Oszillator

Als erstes Anwendungsbeispiel der Algebra, die im vorhergehenden Kapitel eingeführt wurde, wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels der sogenannte fermionische Oszillator diskutiert. Auch wenn dieses System zunächst ohne physikalische Motivation eingeführt wird, zeigen sich viele Parallelen zum harmonischen Oszillator, den wir bereits aus Kapitel 2 kennen.

Im zweiten Abschnitt werden der harmonische und der fermionische Oszillator zu einem System zusammengefaßt. Wir demonstrieren, daß es sich bei geeigneter Wahl der Parameter um ein supersymmetrisches System handelt. Diese Ergebnisse dienen als Grundlage, um im darauffolgenden Kapitel das Landau-Problem eines Teilchens mit Spin zu behandeln.

5.1. Der fermionische Oszillator

In diesem Abschnitt gehen wir von einer Grassmann-Algebra mit zwei Generatoren ϑ_1 und ϑ_2 aus. Die allgemeine Form der Lagrange-Dichte ist in Gleichung (4.24) angegeben, wobei der *fermionische Oszillator* durch das (reelle) Potential $V_F(\vartheta_1, \vartheta_2) = i\omega\vartheta_1\vartheta_2$ definiert wird. In Unterabschnitt 4.2.2 wurde gezeigt, daß die zugehörige Hamilton-Funktion H_F identisch mit dem Potential ist und daher erhalten wir sofort¹

$$H_F = i\omega\vartheta_1\vartheta_2. \quad (5.1)$$

Die nun folgende Diskussion orientiert sich in groben Zügen am vierten Kapitel aus [HH2002a].

Der erste Unterabschnitt dient zur Bestimmung der Energieniveaus dieses Systems und der dazugehörigen Projektoren. Zur deutlichen Unterscheidung vom fermionischen Oszillator werden wir den harmonischen Oszillator im folgenden auch als *bosonisch* bezeichnet. Die Ähnlichkeit beider Systeme wird besonders in holomorphen Koordinaten deutlich, auf die wir im zweiten Unterabschnitt eingehen werden.

5.1.1. Bestimmung der Projektoren und Energieniveaus

Wie in Unterabschnitt 4.4.2 beschrieben wurde, kann man die Energieniveaus und die dazugehörigen Projektoren mit Hilfe des Sternexponentials (4.43)

$$\text{Exp}(H_F t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{it}{\hbar} \right)^k H_F^{k*} = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k*} \frac{(-iT)^k}{k!}, \quad (5.2)$$

bestimmen, wobei hier die Abkürzungen

$$y = \frac{2H_F}{\hbar\omega} = \frac{2i}{\hbar}\vartheta_1\vartheta_2 \quad \text{und} \quad T = \frac{\omega t}{2} \quad (5.3)$$

verwendet wurden. Zunächst ist also y^{k*} zu berechnen.

Im Anhang B.1 wird gezeigt, daß das Grassmann-Moyal-Produkt (4.33) für $n = 2$ als

$$f * g = fg + \frac{\hbar}{2} f(\tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2})g - \frac{\hbar^2}{4} f \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_1} g \quad (5.4)$$

¹Gebräuchlicher ist die Definition $H_F = -i\omega\vartheta_1\vartheta_2$. Wenn man dieser Vorzeichenkonvention folgen will, muß man im folgenden überall ϑ_1 und ϑ_2 vertauschen. Das Sternprodukt ist davon nicht betroffen, da es in diesen beiden Variablen symmetrisch ist.

geschrieben werden kann. Damit erhalten wir

$$y^{0*} = 1, \quad y^{1*} = 1 * y = y \quad \text{und} \quad y^{2*} = y * y = \left(\frac{2i}{\hbar}\right)^2 \vartheta_1 \vartheta_2 * \vartheta_1 \vartheta_2 = 1, \quad (5.5)$$

wobei die ersten zwei Gleichungen trivial sind. Alle weiteren y^{k*} ergeben sich, indem wir sukzessiv das Grassmann-Moyal-Produkt mit y bilden. Aus (5.5) liest man dabei ab, daß y^{k*} nur eine Funktion von y sein kann. Dies ähnelt der Situation beim bereits in 2.1.4 besprochenen bosonischen Oszillator, wie der Vergleich mit (2.42) zeigt.

Auf Grund von $y^2 = 0$ besteht die Reihenentwicklung von y^{k*} nur aus den zwei Termen

$$y^{k*} = c_k + d_k y. \quad (5.6)$$

Die Rekursionsformel für die Folge der Koeffizienten kann bestimmt werden, indem wir die Gleichungen $1 * y = y$ und $y * y = 1$ aus (5.5) betrachten. Man liest $c_k = d_{k-1}$ und $d_k = c_{k-1}$ ab, wobei die Anfangsbedingungen $c_0 = 1$ und $d_0 = 0$ aus $y^{0*} = 1$ folgen. Diese Gleichungen lassen sich in der Matrixform

$$\begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k-1} \\ d_{k-1} \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_1^k \begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

zusammenfassen, wobei es sich bei $\hat{\sigma}_1$ um eine Pauli-Matrix handelt. Gleichung (5.6) läßt sich ebenfalls in dieser Matrixschreibweise darstellen:

$$y^{k*} = (1, y) \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = (1, y) \hat{\sigma}_1^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Dieses Zwischenergebnis können wir wiederum in das Sternexponential aus Gleichung (5.2) einsetzen. Aus $\hat{\sigma}_1^2 = I$ folgt $e^{-i\hat{\sigma}_1 T} = I \cos T - i\hat{\sigma}_1 \sin T$, so daß wir mit der Rechnung

$$\text{Exp}(H_{\text{F}}t) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{k*} \frac{(-iT)^k}{k!} = (1, y) e^{-i\hat{\sigma}_1 T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, y) (I \cos T - i\hat{\sigma}_1 \sin T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

das Sternexponential schließlich in der Form

$$\text{Exp}(H_{\text{F}}t) = \cos T - iy \sin T \quad (5.10)$$

angeben können.

Um aus diesem Ergebnis durch den Vergleich mit (4.45) die Projektoren und die dazugehörigen Energieniveaus bestimmen zu können, muß man die Fourier-Dirichlet-Entwicklung des Sternexponentials angeben:

$$\text{Exp}(H_{\text{F}}t) = \frac{1}{2} (e^{iT} + e^{-iT}) - \frac{y}{2} (e^{iT} - e^{-iT}) = \frac{1}{2} (1+y) e^{-iT} + \frac{1}{2} (1-y) e^{iT}. \quad (5.11)$$

Mit $T = \omega t/2$ lesen wir daraus

$$\pi_0^{\text{F}} = \frac{1}{2} (1-y) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\hbar} \vartheta_1 \vartheta_2 \quad \text{mit} \quad E_0^{\text{F}} = -\frac{\hbar\omega}{2} \quad (5.12a)$$

$$\text{und} \quad \pi_1^{\text{F}} = \frac{1}{2} (1+y) = \frac{1}{2} + \frac{i}{\hbar} \vartheta_1 \vartheta_2 \quad \text{mit} \quad E_1^{\text{F}} = +\frac{\hbar\omega}{2} \quad (5.12b)$$

ab, wobei sich die Energieniveaus auch in der Form

$$E_{n_{\text{F}}}^{\text{F}} = \hbar\omega \left(n_{\text{F}} - \frac{1}{2} \right) \quad (5.13)$$

zusammenfassen lassen.

Mit den Gleichungen aus (5.5) kann man leicht beweisen, daß die Projektoren aus (5.12) die Sterneigenwertgleichung $H_F * \pi_{n_F}^F = E_{n_F} \pi_{n_F}^F$ mit $H_F = \hbar\omega y/2$ lösen und daß außerdem die Projektoreigenschaften aus (4.46) erfüllt sind. In der folgenden Rechnung zeigen wir, daß die Projektoren aus den Gleichungen (5.12) die Normierungsbedingung (4.49) erfüllen:

$$\mathrm{Tr}(\pi_0^F) = \frac{2}{\hbar^2} \int d\vartheta_2 d\vartheta_1 \star \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{\hbar} \vartheta_1 \vartheta_2 \right) = \frac{1}{\hbar^2} \int d\vartheta_2 d\vartheta_1 \star 1 = 1, \quad (5.14)$$

wobei die Spur aus Gleichung (4.53) verwendet wurde. Die Rechnung für π_1^F liefert auf analoge Weise $\mathrm{Tr}(\pi_1^F) = 1$.

Bemerkung: Der fermionische Oszillator ist typisch für ein System mit zwei Energieniveaus. Wenn es zwei Lösungen π_{\pm} der Sterneigenwertgleichung (4.46) gibt, dann lassen sie sich immer in der Form $\pi_{\pm} = (1 \pm y)/2$ mit $y * y = 1$ schreiben. Analog zur Gleichung (1.99) gilt auch hier $H = \sum_E E \pi_E$, so daß wir dann die Hamilton-Funktion durch

$$H = \frac{1}{2} (E_+ + E_-) + (E_+ - E_-) y \quad (5.15)$$

darstellen können. Der konstante Term $(E_+ + E_-)/2$ bewirkt nur eine Verschiebung der Energieniveaus. Tritt dieser Term nicht auf, dann gilt immer $|E_+| = |E_-| \equiv E$ und wir erhalten $H = Ey$, was gerade der Definition aus Gleichung (5.3) entspricht.

5.1.2. Holomorphe Koordinaten

In der Diskussion des harmonischen Oszillators haben wir in Gleichung (2.18) die holomorphen Koordinaten a und \bar{a} eingeführt. Für den fermionischen Oszillator kann man die Koordinaten

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vartheta_1 + i\vartheta_2) \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vartheta_1 - i\vartheta_2) \quad (5.16)$$

definieren, die ähnliche Eigenschaften besitzen und daher auch *holomorph* genannt werden.

Um das Grassmann-Moyal-Produkt (4.33) für $n = 2$ in diesen Koordinaten angeben zu können, stellen wir zunächst

$$\begin{pmatrix} \partial_{\vartheta_1} \\ \partial_{\vartheta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \vartheta_1} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \vartheta_2} & \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \vartheta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\lambda} \\ \partial_{\bar{\lambda}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\lambda} \\ \partial_{\bar{\lambda}} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

fest. Daraus folgt

$$\vec{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \vec{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2} = \begin{pmatrix} \vec{\partial}_{\vartheta_1} \\ \vec{\partial}_{\vartheta_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\partial}_{\vartheta_1} \\ \vec{\partial}_{\vartheta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\partial}_{\lambda} \\ \vec{\partial}_{\bar{\lambda}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\partial}_{\lambda} \\ \vec{\partial}_{\bar{\lambda}} \end{pmatrix} = \vec{\partial}_{\lambda} \vec{\partial}_{\bar{\lambda}} + \vec{\partial}_{\bar{\lambda}} \vec{\partial}_{\lambda}, \quad (5.18)$$

so daß wir das Sternprodukt

$$f * g = f e^{\hbar(\vec{\partial}_{\lambda} \vec{\partial}_{\bar{\lambda}} + \vec{\partial}_{\bar{\lambda}} \vec{\partial}_{\lambda})/2} g \quad (5.19)$$

erhalten. Aus den vier elementaren Grassmann-Moyal-Produkten

$$\lambda * \bar{\lambda} = \lambda \bar{\lambda} + \frac{\hbar}{2}, \quad \bar{\lambda} * \lambda = \bar{\lambda} \lambda + \frac{\hbar}{2} \quad \text{und} \quad \lambda * \lambda = \bar{\lambda} * \bar{\lambda} = 0 \quad (5.20)$$

ergeben sich unmittelbar die Antikommutatoren²

$$\{\lambda, \bar{\lambda}\}_* = \hbar \quad \text{und} \quad \{\bar{\lambda}, \bar{\lambda}\}_* = \{\lambda, \lambda\}_* = 0. \quad (5.21)$$

²Tatsächlich ist hier die Grassmann-Moyal-Klammer aus Gleichung (4.31) gemeint. In diesem Kontext werden aber nur Größen vom Grad 1 betrachtet, so daß sich die Grassmann-Moyal-Klammer zum Antikommutator $\{f, g\}_* = f * g + g * f$ reduziert.

Um zeigen zu können, daß auch hier die holomorphen Variablen die Rolle der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren einnehmen, müssen wir die Projektoren aus (5.12) mit Hilfe dieser Größen angeben.

Aus der Definition der holomorphen Koordinaten (5.16) folgt

$$\bar{\lambda}\lambda = \frac{1}{2}(\vartheta_1 - i\vartheta_2)(\vartheta_1 + i\vartheta_2) = \frac{i}{2}(\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_2\vartheta_1) = i\vartheta_1\vartheta_2 \quad (5.22)$$

und daher läßt sich die Hamilton-Funktion des fermionischen Oszillators (5.1) auch in der Form

$$H_F = \omega\bar{\lambda}\lambda = \omega\left(\bar{\lambda} * \lambda - \frac{\hbar}{2}\right) \quad (5.23)$$

angeben.

In den Projektoren (5.12) taucht die Größe $y = 2H_F/\hbar\omega$ auf, die wir nun als $y = 2\bar{\lambda}\lambda/\hbar$ schreiben können. Die Rechnungen

$$\frac{2}{\hbar}\lambda * \bar{\lambda} = 1 - \frac{2}{\hbar}\bar{\lambda}\lambda = 1 - y \quad \text{und} \quad \frac{2}{\hbar}\bar{\lambda} * \lambda = 1 + \frac{2}{\hbar}\bar{\lambda}\lambda = 1 + y \quad (5.24)$$

führen uns dann zu den Darstellungen

$$\pi_0^F = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\hbar}\bar{\lambda}\lambda\right) = \frac{1}{\hbar}\lambda * \bar{\lambda} \quad \text{und} \quad \pi_1^F = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\hbar}\bar{\lambda}\lambda\right) = \frac{1}{\hbar}\bar{\lambda} * \lambda, \quad (5.25)$$

mit denen man leicht die Erzeugungs- und Vernichtungseigenschaften der holomorphen Variablen zeigen kann.

Mit Hilfe von $\lambda^{2*} = \bar{\lambda}^{2*} = 0$ folgt aus den Gleichungen (5.25)

$$\lambda * \pi_0^F * \bar{\lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} * \pi_1^F * \lambda = 0 \quad (5.26a)$$

und mit dem Antikommutator $\{\lambda, \bar{\lambda}\}_* = \hbar$ ergibt sich

$$\bar{\lambda} * \pi_0^F * \lambda = \frac{1}{\hbar}\bar{\lambda} * \lambda * \bar{\lambda} * \lambda = \frac{1}{\hbar}\bar{\lambda} * (\hbar - \bar{\lambda} * \lambda) * \lambda = \bar{\lambda} * \lambda = \hbar\pi_1^F \quad (5.26b)$$

$$\text{und} \quad \lambda * \pi_1^F * \bar{\lambda} = \frac{1}{\hbar}\lambda * \bar{\lambda} * \lambda * \bar{\lambda} = \frac{1}{\hbar}\lambda * (\hbar - \lambda * \bar{\lambda}) * \bar{\lambda} = \lambda * \bar{\lambda} = \hbar\pi_0^F. \quad (5.26c)$$

Durch die Definition $\pi_2^F = 0$ lassen sich die letzten drei Gleichungen zu

$$\bar{\lambda} * \pi_{n_F}^F * \lambda = \hbar(n_F + 1)\pi_{n_F+1}^F \quad \text{und} \quad \lambda * \pi_{n_F}^F * \bar{\lambda} = \hbar n_F \pi_{n_F-1}^F \quad (5.27)$$

zusammenfassen. Genau wie die Gleichungen (2.31) für den bosonischen Oszillator zeigt dieses Ergebnis, daß die holomorphen Koordinaten den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der herkömmlichen Darstellung der Quantenmechanik auf dem Hilbert-Raum entsprechen.

Um die Ähnlichkeit des fermionischen Oszillators mit dem bosonischen Oszillator zu verdeutlichen, werden wir die wesentlichen Gleichungen in Tabelle 5.1 gegenüberstellen.

Bemerkung: Man beachte, daß der Grundzustand aus (5.25) analog zu (2.35) auch in der Form

$$\pi_0^F = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{\hbar}\bar{\lambda}\lambda\right) = \frac{1}{2}e^{-2\bar{\lambda}\lambda/\hbar} = \frac{1}{2}e^{-2H_F/\hbar\omega} \quad (5.28)$$

angegeben werden kann.

	bosonischer Oszillator	fermionischer Oszillator
<i>Sternprodukt</i>	$\exp(\hbar(\vec{\partial}_a\vec{\partial}_{\bar{a}} - \vec{\partial}_{\bar{a}}\vec{\partial}_a)/2)$	$\exp(\hbar(\vec{\partial}_\lambda\vec{\partial}_{\bar{\lambda}} + \vec{\partial}_{\bar{\lambda}}\vec{\partial}_\lambda)/2)$
<i>(Anti-)Kommutatoren</i>	$[a, \bar{a}]_* = \hbar$ $[a, a]_* = [\bar{a}, \bar{a}]_* = 0$	$\{\lambda, \bar{\lambda}\}_* = \hbar$ $\{\lambda, \lambda\}_* = \{\bar{\lambda}, \bar{\lambda}\}_* = 0$
<i>Hamilton-Funktion</i>	$H_B = \omega\bar{a}a$ $= \omega(\bar{a} * a + \hbar/2)$	$H_F = \omega\bar{\lambda}\lambda$ $= \omega(\bar{\lambda} * \lambda - \hbar/2)$
<i>Energie-niveaus</i>	$E_{n_B}^B = \hbar\omega(n_B + 1/2)$ mit $n_B = 0, 1, 2, \dots$	$E_{n_F}^F = \hbar\omega(n_F - 1/2)$ mit $n_F = 0, 1$
<i>Erzeuger und Vernichter</i>	$\bar{a} * \pi_{n_B}^B * a = \hbar(n_B + 1) \pi_{n_B+1}^B$ $a * \pi_{n_B}^B * \bar{a} = \hbar n_B \pi_{n_B-1}^B$	$\bar{\lambda} * \pi_{n_F}^F * \lambda = \hbar(n_F + 1) \pi_{n_F+1}^F$ $\lambda * \pi_{n_F}^F * \bar{\lambda} = \hbar n_F \pi_{n_F-1}^F$

Tabelle 5.1.: Vergleich des bosonischen und fermionischen Oszillators. Zur deutlicheren Unterscheidung wurde bei einigen Größen für den bosonischen Oszillator der Index „B“ ergänzt.

5.2. Kombiniertes bosonischer und fermionischer Oszillator

Im Rest dieses Kapitels treten verschiedene Sternprodukte auf, so daß wir sie wie bereits in Abschnitt 4.5 durch Indizes unterscheiden.

Wir betrachten in diesem Abschnitt ein System, das aus der Kombination eines bosonischen und fermionischen Oszillators mit gleicher Frequenz ω besteht. Die zugehörige Hamilton-Funktion ergibt sich aus der Summe der beiden Hamilton-Funktionen H_B und H_F , die in Tabelle 5.1 zu sehen sind.

$$H_S = H_B + H_F = \omega(\bar{a}a + \bar{\lambda}\lambda) = \omega(\bar{a} *_{M} a + \bar{\lambda} *_{G} \lambda). \quad (5.29)$$

Im ersten Unterabschnitt wird das Sterneigenwertproblem dieses Systems gelöst, wobei wir auf die Ergebnisse für den bosonischen und den fermionischen Oszillator zurückgreifen können. Die beiden darauf folgenden Unterabschnitte behandeln die Supersymmetrie dieses Oszillators.

5.2.1. Bestimmung der Projektoren und Energieniveaus

Gemäß der Definition (4.54) vereinen wir die Sternprodukte $*_M$ und $*_G$ zu dem Super-Moyal-Produkt

$$f *_{S} g = f \exp\left(\frac{\hbar}{2}(\vec{\partial}_a\vec{\partial}_{\bar{a}} - \vec{\partial}_{\bar{a}}\vec{\partial}_a + \vec{\partial}_\lambda\vec{\partial}_{\bar{\lambda}} + \vec{\partial}_{\bar{\lambda}}\vec{\partial}_\lambda)\right) g. \quad (5.30)$$

Die Hamilton-Funktion (5.29) entspricht gerade der in Gleichung (4.70) angegebenen Form, so daß wir die Erkenntnisse aus dem Unterabschnitt 4.5.4 hier anwenden können.

Aus (4.74) folgt, daß sich die Projektoren dieses Systems als Produkte der Form

$$\pi_{n_B, n_F}^S(a, \bar{a}, \lambda, \bar{\lambda}) = \pi_{n_B}^B(a, \bar{a}) \pi_{n_F}^F(\lambda, \bar{\lambda}) \quad (5.31)$$

angeben lassen. Hier sind $\pi_{n_B}^B(a, \bar{a})$ und $\pi_{n_F}^F(\lambda, \bar{\lambda})$ gerade die Projektoren des bosonischen bzw. des fermionischen Oszillators, die man den Gleichungen (2.39) und (5.25) entnehmen kann. Die zugehörigen Eigenwerte lauten

$$E_{n_B, n_F}^S = E_{n_B}^B + E_{n_F}^F = \hbar\omega(n_B + n_F), \quad (5.32)$$

wobei $E_{n_B}^B$ und $E_{n_F}^F$ in der Tabelle 5.1 zu finden sind.

Aus den Gleichungen (2.35) und (5.28) folgt, daß der Projektor des Grundzustands

$$\pi_{0,0}^S = e^{-2(\bar{a}a + \bar{\lambda}\lambda)/\hbar} = e^{-2H_S/\hbar\omega} \quad (5.33)$$

lautet. Gemäß der Gleichung (5.32) repräsentiert er einen Zustand mit der Energie $E_{0,0}^S = 0$. Alle anderen Energieniveaus sind zweifach entartet, denn es gilt

$$E_{n_B,0}^S = E_{n_B-1,1}^S = \hbar\omega n_B \quad \text{für} \quad n_B = 1, 2, 3, \dots \quad (5.34)$$

Dies ist eine charakteristische Eigenschaft eines supersymmetrischen Systems. Dabei ist zu beachten, daß man die letzte Gleichung nur dann erhält, wenn die Frequenz ω der beiden Oszillatoren aus (5.29) identisch gewählt wird.

5.2.2. Supersymmetrie

In diesem Unterabschnitt werden wir auf die Supersymmetrie des zuvor diskutierten Systems eingehen.

Wir definieren die dimensionslosen Größen

$$Q_+ = \frac{1}{\hbar} a \bar{\lambda} \quad \text{und} \quad Q_- = \frac{1}{\hbar} \bar{a} \lambda = \overline{Q_+}, \quad (5.35)$$

die eine Verbindung zwischen den bosonischen und fermionischen Anregungszuständen herstellen, wie die beiden Rechnungen

$$Q_+ *_S \pi_{n_B,0}^S *_S Q_- = \frac{1}{\hbar^2} (a *_M \pi_{n_B}^B *_M \bar{a}) (\bar{\lambda} *_G \pi_0^F *_G \lambda) = n_B \pi_{n_B-1,1}^S \quad (5.36a)$$

$$\text{und} \quad Q_- *_S \pi_{n_B-1,1}^S *_S Q_+ = \frac{1}{\hbar^2} (\bar{a} *_M \pi_{n_B-1}^B *_M a) (\lambda *_G \pi_1^F *_G \bar{\lambda}) = n_B \pi_{n_B,0}^S \quad (5.36b)$$

für $n_B \geq 1$ zeigen. Hier wurden für die fermionischen Projektoren die Gleichungen (5.26b) und (5.26c) benutzt und die entsprechenden Relationen für die bosonischen Projektoren können der Tabelle 5.1 entnommen werden. Die Zerlegung in zwei Faktoren, die jeweils im mittleren Teil der beiden Gleichungen (5.36) zu sehen ist, beruht auf (4.58).

Wie man an den Gleichungen (5.36) erkennen kann, erlauben die Größen Q_{\pm} Transformationen zwischen den beiden Projektoren $\pi_{n_B,0}^S$ und $\pi_{n_B-1,1}^S$ mit $n_B \geq 1$. In Gleichung (5.34) wurde bereits gezeigt, daß diese Projektoren Zustände mit gleicher Energie beschreiben, so daß Q_{\pm} Generatoren einer Symmetrietransformation sind. Da diese Transformationen Energie zwischen dem bosonischen und fermionischen Teil des Systems umverteilen, handelt es sich um eine *Supersymmetrie*. Daher werden die Größen Q_{\pm} auch *SUSY-Generatoren* genannt.

Die SUSY-Generatoren sind nilpotent, wie man an

$$Q_+ *_S Q_+ = \frac{1}{\hbar^2} (a *_M a) (\bar{\lambda} *_G \bar{\lambda}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_- *_S Q_- = 0 \quad (5.37a)$$

sehen kann, wobei die zweite Gleichung aus der Hermitezität des Super-Moyal-Produkts (4.60) folgt. Es können noch zwei weitere Produkte aus den SUSY-Generatoren gebildet werden:

$$Q_+ *_S Q_- = \frac{1}{\hbar^2} (a *_M \bar{a}) (\bar{\lambda} *_G \lambda) = +\frac{1}{\hbar^2} \bar{a} a \bar{\lambda} \lambda + \frac{1}{2\hbar} (\bar{a} a + \bar{\lambda} \lambda) + \frac{1}{4} \quad (5.37b)$$

$$\text{und} \quad Q_- *_S Q_+ = \frac{1}{\hbar^2} (\bar{a} *_M a) (\lambda *_G \bar{\lambda}) = -\frac{1}{\hbar^2} \bar{a} a \bar{\lambda} \lambda + \frac{1}{2\hbar} (\bar{a} a + \bar{\lambda} \lambda) - \frac{1}{4}. \quad (5.37c)$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist proportional zur Hamilton-Funktion H_S aus (5.29), so daß wir schließlich

$$H_S = \omega (\bar{a} a + \bar{\lambda} \lambda) = \hbar\omega \{Q_+, Q_-\}_{*_S} \quad (5.38)$$

erhalten. Auf elementare Weise kann man mit dieser Darstellung der Hamilton-Funktion die Gleichung

$$[H_S, Q_{\pm}]_{*S} = 0 \quad (5.39)$$

beweisen. Es war zu erwarten, daß Q_{\pm} mit H_S vertauscht, da es sich bei Q_{\pm} um Erzeuger einer Symmetrietransformation handelt.

Wie man an den Gleichungen in (5.35) sehen kann, sind die SUSY-Generatoren nicht reell. Aus ihnen können aber die reellen Linearkombinationen

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \quad \text{und} \quad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) \quad (5.40)$$

gebildet werden. Mit den Gleichungen (5.37a) und (5.38) folgt dann direkt

$$H_S = \hbar\omega Q_1^{2*S} = \hbar\omega Q_2^{2*S} \quad \text{und} \quad Q_1 *S Q_2 = Q_2 *S Q_1 = 0. \quad (5.41)$$

Aus der ersten Gleichung geht hervor, daß Q_i mit H_S kommutiert. Daher handelt es sich bei Q_1 und Q_2 um reelle Erhaltungsgrößen, die auch als *Superladungen* bezeichnet werden.

5.2.3. Die SUSY-Algebra

In diesem Unterabschnitt greifen wir auf den Begriff der graduierten Lie-Algebra aus dem Unterabschnitt 4.5.2 zurück.

Die Gleichungen aus (5.41) kann man zu

$$\{Q_i, Q_j\}_{*S} = Q_i *S Q_j + Q_j *S Q_i = \frac{2H_S}{\hbar\omega} \delta_{ij} \quad \text{für} \quad i, j = 1, 2 \quad (5.42a)$$

zusammenfassen. Es wurde bereits erwähnt, daß es sich bei den Superladungen um Erhaltungsgrößen handelt, d. h. es gilt

$$[H_S, Q_i]_{*S} = H_S *S Q_i - Q_i *S H_S = 0. \quad (5.42b)$$

Außerdem ist natürlich die triviale Gleichung

$$[H_S, H_S]_{*S} = H_S *S H_S - H_S *S H_S = 0 \quad (5.42c)$$

gültig.

Da die Superladungen Q_i vom Grad 1 sind und H_S vom Grad 2 ist, lassen sich alle drei zuletzt genannten Gleichungen mit Hilfe der Super-Moyal-Klammer aus (4.64) ausdrücken:

$$\{Q_i, Q_j\}_{*S} = \frac{2H_S}{\hbar\omega} \delta_{ij}, \quad \{H_S, Q_i\}_{*S} = 0 \quad \text{und} \quad \{H_S, H_S\}_{*S} = 0. \quad (5.43)$$

Dies sind alle möglichen Super-Moyal-Klammern, die man mit den Elementen Q_1 , Q_2 und H_S bilden kann. Diese drei Größen stellen daher die Basis einer graduierten Lie-Algebra dar, die durch die drei Gleichungen aus der (5.43) bereits vollständig charakterisiert ist. Wie man sieht, kann man die Superladungen Q_i auch als Generatoren dieser Algebra ansehen.

Eine graduierte Lie-Algebra von der Form (5.43) wird *SUSY-Algebra* genannt. Da diese Algebra von zwei Generatoren erzeugt wird, spricht man von einer SUSY-Algebra mit $N = 2$.

6. Landau-Niveaus mit Spin

Hier werden wir uns wie in Kapitel 3 wieder einem Teilchen im homogenen Magnetfeld widmen, wobei es zusätzlich zur Ladung nun auch noch einen Spin besitzt. Diese Diskussion findet sich zum großen Teil auch in [HHS2004, Kap. 5] wieder.

Im ersten Abschnitt wird zunächst der Hamilton-Operator auf gewöhnliche Weise mit Hilfe des Feynman-Tricks hergeleitet. Dieses Vorgehen kann im Sternproduktformalismus übernommen werden, indem man die Pauli-Matrizen in der deformierten Grassmann-Algebra nachbildet. Das Ergebnis zeigt sofort die Supersymmetrie dieses Systems. Die Lösungen des Sterneigenwertproblems ergeben sich durch den Vergleich mit dem SUSY-Oszillator, wie im zweiten Abschnitt gezeigt wird. Im letzten Abschnitt diskutieren wir noch den Spin-Anteil dieses Systems.

6.1. Fermionisches Teilchen im Magnetfeld

6.1.1. Hamilton-Operator

Wir betrachten ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit der Ladung $+e$ im äußeren Magnetfeld \mathbf{B} , wobei der zugehörige Hamilton-Operator zunächst im herkömmlichen Formalismus der Quantenmechanik hergeleitet wird.

Wie bereits in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, erhält man durch eine minimale Substitution die Hamilton-Funktion

$$H_L = \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}). \quad (6.1)$$

Gemäß dem Korrespondenzprinzip gehen wir nun zu Operatoren auf dem Hilbert-Raum über, wobei in der Ortsraumdarstellung \mathbf{p} dem Operator $\hat{\mathbf{p}} = \hbar \nabla / i$ entspricht.

Um auch den Spin zu berücksichtigen, wird der *Feynman-Trick* angewendet, indem wir $\hat{\mathbf{P}}$ durch $\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ersetzen. Die Produktregel für die Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_i$ lautet

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k + \delta_{ij} I, \quad (6.2)$$

wobei I die 2×2 -Einheitsmatrix ist. Daraus folgt

$$\hat{H}_{\text{LF}} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{P}}^2 - i \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{P}}) \right). \quad (6.3)$$

Da es sich bei $\hat{\mathbf{P}}$ um einen Operator handelt, ist die Größe $\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{P}}$ nicht identisch Null und man erhält unter Verwendung des Nabla-Kalküls

$$\hat{\mathbf{P}} \times \hat{\mathbf{P}} = -\frac{e}{c} (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}}) = -\frac{e}{c} \left(\frac{\hbar}{i} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \frac{ie\hbar}{c} \mathbf{B}. \quad (6.4)$$

Der Hamilton-Operator lautet folglich

$$\hat{H}_{\text{LF}} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}. \quad (6.5)$$

Dies ist gerade der Hamilton-Operator, der in der Pauli-Theorie auftritt.

In Kapitel 3 haben wir das homogene Magnetfeld $\mathbf{B} = B(0, 0, 1)^T$ betrachtet. In diesem Fall ergibt sich daher für den Spin-Anteil der Hamilton-Funktion

$$\hat{H}_{\text{Spin}} = -\frac{e\hbar}{2mc} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e\hbar}{2mc} \hat{\sigma}_3 B = -\frac{\hbar\omega}{2} \hat{\sigma}_3, \quad (6.6)$$

wobei hier wieder die Zyklotronfrequenz $\omega = eB/mc$ auftaucht.

6.1.2. Diskussion der Algebra mit zwei Generatoren

In diesem Unterabschnitt wird die Algebra diskutiert, die von den zwei Generatoren ϑ_1 und ϑ_2 erzeugt wird, wobei das Grassmann-Moyal-Produkt (4.33) mit $n = 2$ verwendet wird:

$$f *_G g = f \exp\left(\frac{\hbar}{2}(\tilde{\partial}_{\vartheta_1}\tilde{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2}\tilde{\partial}_{\vartheta_2})\right) g. \quad (6.7)$$

Diese Algebra, die im folgenden Cl_2^* genannt wird, ist uns bereits in Abschnitt 5.1 im Zusammenhang mit dem fermionischen Oszillator begegnet.

Als Basis der Algebra wählen wir die vier dimensionslosen und reellen Größen

$$1, \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{\hbar}}\vartheta_1, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{\hbar}}\vartheta_2 \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \frac{2}{i\hbar}\vartheta_1\vartheta_2 = \frac{2}{i\hbar}\vartheta_1 *_G \vartheta_2. \quad (6.8)$$

Wie man mühelos nachrechnen kann, erfüllen sie die Produktregel

$$\sigma_i *_G \sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}, \quad (6.9)$$

die formal mit der Produktregel (6.2) für die Pauli-Matrizen $\hat{\sigma}_i$ identisch ist. Daher können wir mit $S_i = \hbar\sigma_i/2$ die Komponenten des Spins beschreiben.

Die Spur (4.47) für $n = 2$ lautet

$$\text{Tr}(f) = \frac{2}{\hbar^2} \int d\vartheta_2 d\vartheta_1 \star f, \quad (6.10)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor so gewählt wurde, daß sich

$$\text{Tr}(1) = 2 = \text{tr}(I) \quad \text{und} \quad \text{Tr}(\sigma_i) = 0 = \text{tr}(\hat{\sigma}_i) \quad (6.11)$$

ergibt. Die beiden Algebren mit den Basen $\{1, \sigma_i\}$ und $\{I, \hat{\sigma}_i\}$ entsprechen sich daher sowohl in der Produktregel als auch in Bezug auf die Spur.

6.1.3. Hamilton-Funktion im Sternproduktformalismus

Im folgenden wird die Rechnung aus dem Unterabschnitt 6.1.1 im Sternproduktformalismus wiederholt, wobei wir sofort von der Annahme ausgehen werden, daß es sich um ein homogenes Magnetfeld der Form $\mathbf{B} = B(0, 0, 1)^T$ handelt.

Wir haben bereits gezeigt, daß man den Phasenraum beim rein bosonischen Landau-Problem auf die Koordinaten q_1, q_2, p_1 und p_2 reduzieren kann. Für den Feynman-Trick benutzen wir die in (6.8) definierten Größen σ_i anstelle der Pauli-Matrizen, so daß wir den Phasenraum um die zwei fermionischen Erzeuger ϑ_1 und ϑ_2 erweitern müssen¹.

Analog zum Unterabschnitt 4.5.1 vereinen wir das Moyal-Produkt (3.12), das bei der Diskussion des Landau-Problems hergeleitet wurde, und das Grassmann-Moyal-Produkt (6.7) zu dem Sternprodukt

$$f *_MG g = f \exp\left(\frac{i\hbar}{2}(\tilde{\partial}_{q_1}\tilde{\partial}_{P_1} - \tilde{\partial}_{P_1}\tilde{\partial}_{q_1} + \tilde{\partial}_{q_2}\tilde{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2}\tilde{\partial}_{q_2}) + \frac{i\hbar}{2}m\omega(\tilde{\partial}_{P_1}\tilde{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2}\tilde{\partial}_{P_1}) + \frac{\hbar}{2}(\tilde{\partial}_{\vartheta_1}\tilde{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2}\tilde{\partial}_{\vartheta_2})\right) g. \quad (6.12)$$

¹Im Gegensatz dazu wird im Kapitel 5 von [HHS2004] eine Grassmann-Algebra mit drei Erzeugern verwendet, in der man ebenfalls Größen definieren kann, die den Pauli-Matrizen entsprechen. Darauf werden wir im Unterabschnitt 7.1.2 eingehen. Tatsächlich sind beide Darstellungen miteinander vertauschbar.

Genau wie beim Super-Moyal-Produkt kann man auch hier den bosonischen und den fermionischen Teil des Produkt getrennt berechnen, so daß analog zu (4.58) die Gleichung

$$(b_1(q, P) f_1(\vartheta)) *_{MG} (b_2(q, P) f_2(\vartheta)) = (b_1(q, P) *_M b_2(q, P)) (f_1(\vartheta) *_G f_2(\vartheta)) \quad (6.13)$$

gültig ist, wobei q, P für die Größen q_1, q_2, P_1, P_2 und ϑ für ϑ_1, ϑ_2 steht. Zur Unterscheidung wird das bosonische Sternprodukt wieder mit $*_M$ und das fermionische mit $*_G$ bezeichnet.

Der Feynman-Trick für die Hamilton-Funktion aus (6.1) lautet nun

$$H_L = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) \quad \rightsquigarrow \quad H_{LF} = \frac{1}{2m} (P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2)^{2*S}. \quad (6.14)$$

Mit der Produktregel (6.9) läßt sich dies in einen bosonischen und einen fermionischen Term aufspalten:

$$H_{LF} = \frac{1}{2m} (P_1^{2*M} + P_2^{2*M} + [P_1, P_2]_{*M} i\sigma_3) = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) - \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_3. \quad (6.15)$$

Im letzten Schritt wurde die Gleichung $[P_1, P_2]_{*M} = i\hbar m\omega$ aus (3.38) verwendet.

Die Hamilton-Funktion H_{LF} entspricht gerade dem Hamilton-Operator aus (6.6). Da der Spin-Anteil der Hamilton-Funktion

$$H_{\text{Spin}} = -\frac{\hbar\omega}{2} \sigma_3 = -\omega S_3 \quad (6.16)$$

der einzige Term von H_{LF} mit fermionischen Erzeugern ist, handelt es sich bei der Spin-Komponente $S_3 = \hbar\sigma_3/2$ um eine Erhaltungsgröße.

6.1.4. Supersymmetrie

Die nun folgende Diskussion ist an Kapitel 7 von [HH2002a] angelehnt.

Die Hamilton-Funktion aus Gleichung (6.14) wurde durch den Feynman-Trick auf folgende Weise faktorisiert:

$$H_{LF} = \hbar\omega Q_1 *_{MG} Q_1 \quad \text{mit} \quad Q_1 = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega 2m}} (P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2), \quad (6.17)$$

wobei der Faktor $\hbar\omega$ eingefügt wurde, um Q_1 dimensionslos zu machen. Hier erkennt man sofort, daß es sich bei der reellen Größe Q_1 um eine Erhaltungsgröße handelt. Das gleiche haben wir bereits für σ_3 festgestellt, so daß wir mit

$$Q_2 = \frac{i}{2} [\sigma_3, Q_1]_{*G} \quad (6.18)$$

eine weitere reelle Erhaltungsgröße definieren können.

Aus der Produktregel (6.9) folgt

$$\sigma_3 *_G Q_1 = \frac{i}{\sqrt{\hbar\omega 2m}} (P_1 \sigma_2 - P_2 \sigma_1) \quad \text{und} \quad Q_1 *_G \sigma_3 = \frac{-i}{\sqrt{\hbar\omega 2m}} (P_1 \sigma_2 - P_2 \sigma_1), \quad (6.19)$$

so daß wir die Gleichung

$$Q_2 = i\sigma_3 *_G Q_1 = -iQ_1 *_G \sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega 2m}} (P_1 \sigma_2 - P_2 \sigma_1) \quad (6.20)$$

erhalten. Mit $\sigma_3 *_G \sigma_3 = \sigma_3 *_MG \sigma_3 = 1$ kann man daraus

$$H_{LF} = Q_1 *_MG \sigma_3 *_MG \sigma_3 *_MG Q_1 = (iQ_2) *_MG (-iQ_2) = Q_2 *_MG Q_2 \quad (6.21)$$

ableiten, wobei diese Gleichung bestätigt, daß Q_2 tatsächlich mit H_{LF} kommutiert. Aus den Gleichungen in (6.20) folgt außerdem, daß Q_1 und Q_2 antikommutieren, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$iQ_2 *_{MG} Q_1 = Q_1 *_{MG} \sigma_3 *_{MG} Q_1 = Q_1 *_{MG} (-iQ_1). \quad (6.22)$$

Zusammenfassend haben wir also

$$[H_{\text{LF}}, Q_i]_{*_{MG}} = 0 \quad \text{und} \quad \{Q_i, Q_j\}_{*_{MG}} = 2H_{\text{LF}} \quad (6.23)$$

gezeigt, wobei es sich hier wiederum um eine SUSY-Algebra mit $N = 2$ handelt, der wir schon in Unterabschnitt 5.2.3 begegnet sind. Das Landau-Problem mit Spin ist demzufolge supersymmetrisch.

6.2. Das Sterneigenwertproblem

In Unterabschnitt 3.2.3 haben wir festgestellt, daß sich das Landau-Problem mit den Definitionen

$$P_1 = m\omega q \quad \text{und} \quad P_2 = p \quad (6.24)$$

formal auf den harmonischen Oszillator zurückführen läßt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß ein ähnliches Vorgehen auch für den Spin-Anteil des Landau-Problems eines fermionischen Teilchens möglich ist.

Aus Unterabschnitt 6.1.3 wissen wir, daß die Berücksichtigung des Spins zu einem zusätzlichen fermionischen Term in der Hamilton-Funktion führt. Dieser Spin-Anteil, der in Gleichung (6.16) angegeben ist, kann mit Hilfe von (6.8) durch die Erzeuger der Algebra Cl_2^* ausgedrückt werden:

$$H_{\text{Spin}} = -\frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 = i\omega\vartheta_1\vartheta_2. \quad (6.25)$$

Dies ist gerade die Hamilton-Funktion des fermionischen Oszillators, dem wir bereits in Abschnitt 5.1 begegnet sind. Mit der Definition (6.24) entspricht daher (6.15) der Hamilton-Funktion des SUSY-Oszillators, der im vorangegangenen Kapitel untersucht wurde.

6.2.1. Lösung des Sterneigenwertproblems

Die Analogie zum SUSY-Oszillator kann konkretisiert werden, indem man die Hamilton-Funktion H_{LF} in holomorphen Koordinaten ausdrückt, die gemäß den Gleichungen (2.18), (5.16) und (6.24) in diesem Kontext

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(P_1 + iP_2), \quad \bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}(P_1 - iP_2), \quad (6.26a)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vartheta_1 + i\vartheta_2) \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vartheta_1 - i\vartheta_2) \quad (6.26b)$$

lauten. In diesen Koordinaten nimmt die Hamilton-Funktion ebenfalls die Form

$$H_{\text{LF}} = \omega(\bar{a}a + \bar{\lambda}\lambda) \quad (6.27)$$

an, die derjenigen aus Gleichung (5.29) entspricht.

Genau wie bei dem Landau-Problem ohne Spin ist die X_1 - bzw. X_2 -Abhängigkeit der Lösungen der Sterneigenwertgleichung beliebig. Man kann daher Projektoren finden, die nur von P_1 , P_2 , ϑ_1 und ϑ_2 bzw. von den entsprechenden holomorphen Koordinaten aus (6.26) abhängen. Für die Sterneigenwertgleichung ist dann nur die zweite Zeile der Definition des Sternprodukts $*_{MG}$ aus (6.12) relevant. In holomorphen Koordinaten ausgedrückt ist dieser Teil von $*_{MG}$ identisch mit dem Super-Moyal-Produkt $*_S$ aus (5.30).

Demzufolge lautet die Sterneigenwertgleichung

$$H_{\text{LF}} *_{\text{MG}} \pi_n^{\text{LF}} = H_{\text{LF}} *_{\text{S}} \pi_n^{\text{LF}} = E_n^{\text{LF}} \pi_n^{\text{LF}}. \quad (6.28)$$

In dieser Gleichung haben wir sowohl die Hamilton-Funktion als auch das Sternprodukt auf die gleiche Form gebracht, wie sie in Kapitel 5.2 verwendet wurden. Daher kann man die Projektoren $\pi_{n_{\text{L}}, n_{\text{Spin}}}^{\text{LF}}$ und die dazugehörigen Energieeigenwerte $E_{n_{\text{L}}, n_{\text{Spin}}}^{\text{LF}}$ direkt aus den Gleichungen (5.31) und (5.32) übernehmen:

$$\pi_{n_{\text{L}}, 0}^{\text{LF}}(a, \bar{a}, \lambda, \bar{\lambda}) = (-1)^{n_{\text{L}}} \exp\left(-\frac{2}{\hbar\omega}(H_{\text{L}} + H_{\text{Spin}})\right) L_{n_{\text{L}}}\left(\frac{4H_{\text{L}}}{\hbar\omega}\right), \quad (6.29a)$$

$$\pi_{n_{\text{L}}, 1}^{\text{LF}}(a, \bar{a}, \lambda, \bar{\lambda}) = (-1)^{n_{\text{L}}} \exp\left(-\frac{2}{\hbar\omega}(H_{\text{L}} - H_{\text{Spin}})\right) L_{n_{\text{L}}}\left(\frac{4H_{\text{L}}}{\hbar\omega}\right) \quad (6.29b)$$

$$\text{mit } E_{n_{\text{L}}, n_{\text{Spin}}}^{\text{LF}} = \hbar\omega(n_{\text{L}} + n_{\text{Spin}}). \quad (6.29c)$$

Die bosonische Besetzungszahl wird mit n_{L} bezeichnet, während n_{Spin} sich auf die Orientierung des Spins bezieht. Die Entartung auf Grund der beliebigen X_1 - und X_2 -Abhängigkeit der Projektoren kann wie in Kapitel 3 behandelt werden.

6.2.2. Die SUSY-Algebra

In Abschnitt 5.2.2 haben wir eine SUSY-Algebra für den supersymmetrischen Oszillator gefunden, die wir hier in den Koordinaten P_i und σ_i ausdrücken wollen, um sie mit der in Abschnitt 6.1.4 gefunden SUSY-Algebra vergleichen zu können. Aus den Gleichungen (5.35) und (6.26) folgt

$$Q_+ = \frac{1}{\hbar} a \bar{\lambda} = \frac{1}{2\hbar} \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (P_1 \vartheta_1 + P_2 \vartheta_2 + i(P_2 \vartheta_1 - P_1 \vartheta_2)) \quad (6.30)$$

$$\text{und } Q_- = \overline{Q_+} = \frac{1}{2\hbar} \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (P_1 \vartheta_1 + P_2 \vartheta_2 - i(P_2 \vartheta_1 - P_1 \vartheta_2)). \quad (6.31)$$

Mit (5.40) erhalten wir damit die reellen Größen

$$Q_1 = Q_+ + Q_- = \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (P_1 \vartheta_1 + P_2 \vartheta_2) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega 2m}} (P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2) \quad (6.32a)$$

$$\text{und } Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) = \frac{1}{\hbar} \frac{1}{\sqrt{m\omega}} (P_2 \vartheta_1 - P_1 \vartheta_2) = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega 2m}} (P_2 \sigma_1 - P_1 \sigma_2), \quad (6.32b)$$

wobei die Definitionen $\sigma_1 = \sqrt{2/\hbar} \vartheta_1$ und $\sigma_2 = \sqrt{2/\hbar} \vartheta_2$ aus (6.8) benutzt wurden.

Man erhält also die gleichen SUSY-Generatoren und SUSY-Ladungen, die wir schon in (6.17) und (6.20) gefunden haben. Dementsprechend sind auch hier die Vertauschungsrelationen der SUSY-Algebra aus (6.23) gültig.

6.3. Diskussion des Spin-Beitrags

Wir kommen in diesem Abschnitt nochmals auf den Spin-Anteil (6.25) der Hamilton-Funktion H_{LF} zurück. Im folgenden wird der Erwartungswert und die Zeitentwicklung für den Spin-Vektor bestimmt.

Bereits im vorhergehenden Abschnitt wurde festgestellt, daß $H_{\text{Spin}} = i\omega \vartheta_1 \vartheta_2$ identisch mit der Hamilton-Funktion des fermionischen Oszillators aus (5.1) ist. Daher können die Projektoren des fermionischen Oszillators direkt aus (5.12) übernommen werden. Mit $y = 2H_{\text{Spin}}/\hbar\omega = \sigma_3$ können sie in der Form

$$\pi_0(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \quad \text{und} \quad \pi_1(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{1}{2} (1 - \sigma_3) \quad (6.33)$$

geschrieben werden.

6.3.1. Erwartungswerte

Nun sollen die Erwartungswerte für die Komponenten des Spins $S_i = \hbar\sigma_i/2$ berechnet werden, indem wir die Tatsache ausnutzen, daß die Größen σ_i spurlos sind. Mit der Produktregel (6.9) ergibt sich daher

$$\langle S_i \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i * (1 \pm \sigma_3)) = \pm \frac{\hbar}{2} \frac{1}{2} \text{Tr}(i\epsilon_{i3k}\sigma_k + \delta_{i3}) = \pm \frac{\hbar}{2} \delta_{i3}. \quad (6.34)$$

Die Ergebnisse $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = 0$ und $\langle S_3 \rangle = \pm\hbar/2$ können wir so interpretieren, daß die Hamilton-Funktion aus Gleichung (6.25) ein Fermion beschreibt, dessen Spin orthogonal zur $\vartheta_1\vartheta_2$ -Ebene polarisiert ist. Da H_{Spin} Teil der Hamilton-Funktion (6.5) ist, zeigt dies, daß diese Polarisation durch ein homogenes Magnetfeld in q_3 -Richtung hervorgerufen wird. Im Grundzustand mit dem Projektor $\pi_{n_F=0}$ ist der Spin in Richtung des B -Feldes ausgerichtet.

Die drei Komponenten des Spins S_i fassen wir zu dem Vektor $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ zusammen. Für das Quadrat dieses Spin-Vektors \mathbf{S}^{2*} erhält man

$$\langle \mathbf{S}^{2*} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle S_i^{2*} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i^{2*} \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \sum_{i=1}^3 \langle 1 \rangle = \frac{3\hbar^2}{4}. \quad (6.35)$$

Wir stellen fest, daß sich die gleichen Erwartungswerte ergeben, die auch die herkömmliche Formulierung der Quantenmechanik liefert.

6.3.2. Zeitentwicklung

Nun wird mit der ersten Gleichung aus (4.43) die Zeitentwicklung des Spins \mathbf{S} bestimmt. Das Sternexponential für die Hamilton-Funktion aus (6.25) wurde bereits in Gleichung (5.10) angegeben und mit $y = \sigma_3$ und $T = \omega t/2$ lautet es

$$\text{Exp}(Ht) = \cos \frac{\omega t}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\omega t}{2}. \quad (6.36)$$

Im Anhang C.4.4 wird gezeigt, daß sich mit diesem Sternexponential folgende Zeitabhängigkeit für den Spin $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ ergibt:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ +\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}(0). \quad (6.37)$$

Der Spin \mathbf{S} rotiert also mit der Zyklotronfrequenz $\omega = eB/mc$ um eine Achse senkrecht zur $\vartheta_1\vartheta_2$ -Ebene, wobei die Komponente S_3 konstant bleibt.

Darüber hinaus wird im Anhang C.4.4 bewiesen, daß das Ergebnis (6.37) tatsächlich Lösung der Differentialgleichung (4.42) ist, die man in diesem Fall in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}(t) = \frac{e}{mc} \mathbf{B} \times \mathbf{S}(t) \quad (6.38)$$

schreiben kann.

Gleichung (6.38) entspricht der klassischen Bewegungsgleichung für die Larmor-Präzession eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld, wobei das gyromagnetische Verhältnis hier e/mc ist. Das gleiche Resultat liefert die im Hilbert-Raum formulierte Quantenmechanik für den Erwartungswert des Spins. Tatsächlich ist es typisch für die Deformationsquantisierung, daß die Zeitabhängigkeit der Observablen der Vorhersage aus der klassischen Physik entspricht, wie wir bereits in Gleichung (1.87) festgestellt haben.

III. Gruppen und ihre Anwendungen

Kapitelverzeichnis

7. Lorentz-Transformationen	71
8. Dirac-Theorie	83

7. Lorentz-Transformationen

Als weiteres Anwendungsbeispiel der Grassmann-Algebra mit Grassmann-Moyal-Produkt betrachten wir zunächst den Fall mit $n = 3$ Generatoren. Wir werden zeigen, daß man mit dieser Algebra eigentliche Lorentz-Transformationen darstellen kann. Wenn man auch die Parität mit einbeziehen möchte, muß man einen vierten Erzeuger hinzunehmen. In beiden Fällen wird die Verbindung zur herkömmlichen Matrixdarstellung der Algebra diskutiert. Eine Zusammenfassung dieses Themas wird in [HHS2004] erscheinen.

7.1. Diskussion der Algebra mit drei Generatoren

Wir gehen von einer Grassmann-Algebra mit den drei Generatoren ϑ_1 , ϑ_2 und ϑ_3 aus. Durch Deformation wird das Produkt der Grassmann-Algebra zum Grassmann-Moyal-Produkt (4.33) mit $n = 3$, wobei wir dieses Produkt *Pauli-Produkt* nennen wollen. Für die folgende Diskussion ist es nützlich, zu den dimensionslosen Generatoren $\theta^i = \sqrt{2/\hbar}\vartheta_i$ zu wechseln, so daß der Deformationsparameter \hbar in dem transformierten Pauli-Produkt

$$f * g = f \exp(\vec{\partial}_{\theta^1} \vec{\partial}_{\theta^1} + \vec{\partial}_{\theta^2} \vec{\partial}_{\theta^2} + \vec{\partial}_{\theta^3} \vec{\partial}_{\theta^3}) g \quad (7.1)$$

nicht mehr explizit auftritt.

Zunächst wird die Struktur dieser Algebra untersucht, indem wir die Produkte der Basiselemente bestimmen. Anschließend diskutieren wir das Verhältnis zu einer Matrixalgebra.

7.1.1. Eine Multiplikationstabelle

Für das elementare Pauli-Produkt zweier Generatoren erhalten wir

$$\theta^i * \theta^j = \theta^i \theta^j + \delta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \theta^l \theta^m + \delta_{ij} = \epsilon_{ijk} \Sigma^k + \delta_{ij} \quad (7.2)$$

$$\text{mit } \Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta^j * \theta^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta^j \theta^k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7.3)$$

Offensichtlich lautet der Antikommutator¹ der Erzeuger

$$\{\theta^i, \theta^j\}_* = \theta^i * \theta^j + \theta^j * \theta^i = 2\delta_{ij}, \quad (7.4)$$

so daß es sich hier um die Darstellung einer Clifford-Algebra handelt. Daher wollen wir die Algebra, die von θ^1 , θ^2 und θ^3 unter Bildung des Pauli-Produkts (7.1) erzeugt wird, mit Cl_3^* bezeichnen.

Als weitere Größe führen wir

$$\Omega = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \theta^i * \theta^j * \theta^k = \theta^1 * \theta^2 * \theta^3 = \theta^1 \theta^2 \theta^3 \quad \text{mit} \quad \Omega * \Omega = -1 \quad (7.5)$$

ein. Man kann leicht zeigen, daß Ω mit allen Elementen dieser Algebra kommutiert.

Die acht Größen 1 , θ^i , Σ^j und Ω bilden eine Basis der betrachteten Algebra. Im Anhang C.1 werden alle Produkte zwischen den Basiselementen θ^i , Σ^j und Ω bestimmt, wobei die Resultate in der Multiplikationstabelle 7.1 zusammengefaßt sind.

¹Mit $\{f, g\}_*$ ist im folgenden immer der Antikommutator $f * g + g * f$ gemeint.

*	θ^j	Σ^j	Ω
θ^i	$\epsilon_{ijk}\Sigma^k + \delta_{ij}$	$-\epsilon_{ijk}\theta^k + \delta_{ij}\Omega$	Σ^i
Σ^i	$-\epsilon_{ijk}\theta^k + \delta_{ij}\Omega$	$-\epsilon_{ijk}\Sigma^k - \delta_{ij}$	θ^i
Ω	Σ^j	θ^j	-1

Tabelle 7.1.: Dies ist die Multiplikationstabelle der Algebra Cl_3^* , wobei sich die Zeilenbeschriftung auf den linken Faktor bezieht und die Spaltenbeschriftung auf den rechten.

Wir betrachten θ^i anstelle von ϑ_i als Erzeuger der Algebra, so daß das Hodge-Dual aus Gleichung (4.8) folgende Relationen zwischen den Basiselementen liefert :

$$\star 1 = \Omega, \quad \star \theta^i = \Sigma^i, \quad \star \Sigma^i = \theta^i \quad \text{und} \quad \star \Omega = 1. \quad (7.6)$$

Wie man der Tabelle 7.1 entnehmen kann, ist die Bildung des Hodge-Duals identisch mit der Multiplikation mit Ω .

7.1.2. Die gerade Unteralgebra und deren Pauli-Abbildung

Die Multiplikationstabelle 7.1 zeigt, daß die geraden Elemente 1 und Σ^i mit $i = 1, 2, 3$ die Basis einer Unteralgebra von Cl_3^* bilden. Wir definieren die Größen

$$\sigma^i = \frac{1}{i}\Sigma^i = \frac{1}{2i}\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^k \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.7)$$

so daß sich die Multiplikationsregeln dieser Unteralgebra in der Form

$$1 * \sigma^i = \sigma^i * 1 = \sigma^i \quad \text{und} \quad \sigma^i * \sigma^j = i\epsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij} \quad (7.8)$$

schreiben lassen.

Für die 2×2 -Einheitsmatrix I und die Pauli-Matrizen

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

gelten bekannterweise formal identische Gleichungen:

$$I\hat{\sigma}^i = \hat{\sigma}^i I = \sigma^i \quad \text{und} \quad \hat{\sigma}^i\hat{\sigma}^j = i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}^k + \delta_{ij}I, \quad (7.10)$$

wobei hier die gewöhnliche Matrixmultiplikation auftritt.

Da die Produktregeln (7.8) bzw. (7.10) die beiden Algebren vollständig charakterisieren, sind sie zueinander isomorph. In Analogie zu Gleichung (1.42) wollen wir diesen Isomorphismus *Pauli-Abbildung* nennen und mit ϱ_{Pauli} bezeichnen. Dabei gelten die Regeln

$$\varrho_{\text{Pauli}}(f * g) = \varrho_{\text{Pauli}}(f) \varrho_{\text{Pauli}}(g) \quad \text{für} \quad f, g \in \text{span}(1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad (7.11)$$

$$\varrho_{\text{Pauli}}(\sigma^i) = \frac{1}{i}\varrho_{\text{Pauli}}(\Sigma^i) = \hat{\sigma}^i \quad \text{und} \quad \varrho_{\text{Pauli}}(1) = I. \quad (7.12)$$

Analog zu Gleichung (6.10) definieren wir die Spur

$$\text{Tr}(f) = 2 \int d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \star f \quad \text{mit} \quad \int d\theta^i \theta^i = 1. \quad (7.13)$$

Mit der Pauli-Abbildung kann man zeigen, daß diese Spur für $f \in \text{span}(1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ gerade der Matrix-Spur tr für $\varrho_{\text{Pauli}}(f)$ entspricht. Wegen der Linearität der Spur muß nur bewiesen werden, daß

$$\text{Tr}(f) = \text{tr}(\varrho_{\text{Pauli}}(f)) \quad (7.14)$$

für die Basiselemente gültig ist. Durch eine triviale Rechnung erhält man

$$\text{Tr}(1) = 2 = \text{tr}(I) \quad \text{und} \quad \text{Tr}(\sigma^i) = 0 = \text{tr}(\hat{\sigma}^i), \quad (7.15)$$

was zu zeigen war.

Bemerkung: In Abschnitt 6.1.2 haben wir bereits andere Funktionen kennengelernt, die ebenfalls den Pauli-Matrizen entsprechen. Mit den Generatoren $\theta^i = \sqrt{2/\hbar}\vartheta_i$ lauten sie

$$\sigma_1 = \theta^1, \quad \sigma_2 = \theta^2 \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \frac{1}{2i}\theta^1\theta^2 = \frac{1}{i}\Sigma^i. \quad (7.16)$$

Für diese Größen benötigt man offensichtlich nur die zwei Generatoren θ^1 und θ^2 , wobei aber auch der ungerade Anteil der Algebra mit einbezogen wird. Im folgenden werden ausschließlich die σ^i aus (7.7) verwendet.

7.1.3. Pauli-Abbildung der gesamten Algebra

Im vorhergehenden Unterabschnitt haben wir gezeigt, daß die gerade Unter algebra von Cl_3^* , durch die Pauli-Abbildung mit den Gleichungen (7.12) auf die Algebra der hermiteschen 2×2 -Matrizen mit Basis $\{1, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}^3\}$ abgebildet werden kann. Daher stellt sich die Frage, ob sich diese Abbildung sinnvoll auf ganz Cl_3^* erweitern läßt.

Um die Matrizen zu finden, denen die Elemente $\theta^i \in \text{Cl}_3^*$ entsprechen, betrachten wir die Gleichung $\theta^i * \theta^j = -\Sigma^i * \Sigma^j$, die der Multiplikationstabelle 7.1 entnommen werden kann. Bildet man die Pauli-Abbildung dieser Gleichung, dann ergibt sich

$$\varrho_{\text{Pauli}}(\theta^i) \varrho_{\text{Pauli}}(\theta^j) = -\varrho_{\text{Pauli}}(\Sigma^i) \varrho_{\text{Pauli}}(\Sigma^j) = \hat{\sigma}^i \hat{\sigma}^j. \quad (7.17)$$

Diese Gleichung ist konsistent mit der Annahme $\varrho_{\text{Pauli}}(\theta^i) = \hat{\sigma}^i$. Aus der Gleichung $\Omega = \theta^i * \Sigma^i$ folgt dann

$$\varrho_{\text{Pauli}}(\Omega) = \varrho_{\text{Pauli}}(\theta^i * \Sigma^i) = \varrho_{\text{Pauli}}(\theta^i) \varrho_{\text{Pauli}}(\Sigma^i) = \hat{\sigma}^i i \hat{\sigma}^i = iI, \quad (7.18)$$

wobei nicht über den Index i summiert wird.

In der folgenden Übersicht werden die Pauli-Abbildungen aller Basiselemente von Cl_3^* zusammengefaßt:

$$\varrho_{\text{Pauli}}(1) = I, \quad \varrho_{\text{Pauli}}(\theta^i) = \hat{\sigma}^i, \quad \varrho_{\text{Pauli}}(\Sigma^i) = i\hat{\sigma}^i \quad \text{und} \quad \varrho_{\text{Pauli}}(\Omega) = iI, \quad (7.19)$$

wobei der Index i die Werte 1, 2 und 3 annehmen kann. Damit handelt es sich bei der Pauli-Abbildung um einen Isomorphismus von der Algebra Cl_3^* über \mathbb{R} und zu der Matrixalgebra über \mathbb{C} , die von den Pauli-Matrizen σ^i erzeugt wird. Genau wie in Gleichung (1.14) kann man aus (7.19) die Regel

$$\varrho_{\text{Pauli}}(\bar{f}) = (\varrho_{\text{Pauli}}(f))^\dagger \quad (7.20)$$

ablesen. Der Involution von f entspricht daher dem Adjungieren der zugehörigen Matrix.

Fordert man die Gültigkeit von (7.14) für alle $f \in \text{Cl}_3^*$, dann kann man die Definition der Spur auf ganz Cl_3^* erweitern. Allerdings läßt sich die Spur im allgemeinen nicht mehr als das Integral aus (7.13) darstellen, wie man an dem Gegenbeispiel $\text{Tr}(\Omega) = 0 \neq \text{tr}(iI) = 2i$ sieht.

7.2. Rotationen

In diesem Abschnitt zeigen wir einen Zusammenhang zwischen der geraden Unteralgebra von Cl_3^* zur Gruppe $SU(2)$ auf. Diese Erkenntnis kann man nutzen, um Drehungen in Cl_3^* zu beschreiben. Schließlich gehen wir noch auf die Darstellung des Spins ein.

7.2.1. Die Lie-Gruppe zur geraden Unteralgebra

Zunächst betrachten wir die Lie-Algebra, die man mit der Kommutator-Klammer aus der geraden Unteralgebra von Cl_3^* erhält. Aus (7.8) lesen wir die Gleichung $[\sigma^i, \sigma^j]_* = 2i\epsilon_{ijk}\sigma^k$ ab, die auch in der Form

$$[J_i, J_j]_* = i\epsilon_{ijk}J_k \quad \text{mit} \quad J_i = \frac{\sigma^i}{2} \quad (7.21)$$

geschrieben werden kann.

Aus Gleichung (7.8) folgt außerdem $\{\sigma^i, \sigma^j\}_* = 2\delta_{ij}$, so daß man für einen Einheitsvektor \mathbf{n} die Gleichungen $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})^2 = 1$ erhält. Die Elemente der Lie-Gruppe, die von den J_i generiert wird, können wir daher auf folgende Weise zerlegen:

$$e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} = e_*^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta}/2} = \cos \frac{\delta}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\delta \sin \frac{\delta}{2}. \quad (7.22)$$

Mit δ_i sind die reellen Gruppenparameter gemeint, die zu dem Vektoren $\boldsymbol{\delta}$ zusammengefaßt werden. Diesen Vektor kann man in $\boldsymbol{\delta} = \delta \mathbf{n}_\delta$ zerlegen, wobei δ der Betrag dieses Vektors ist und \mathbf{n}_δ der dazugehörige Einheitsvektor. Man beachte, daß δ bei jeder Wahl von \mathbf{n}_δ 4π -periodisch ist.

Wie wir in Unterabschnitt 7.1.3 festgestellt haben, entspricht die Bildung der Involution dem Adjungieren von Operatoren. Da alle Gruppenelemente $e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}}$ die Gleichung

$$e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} * \overline{e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}}} = e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} * e_*^{+i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} = 1 \quad (7.23)$$

erfüllen, kann man diese Lie-Gruppe in diesem Sinne *unitär* nennen.

Mit der Pauli-Abbildung aus (7.12) können wir zeigen, daß die von $J_i = \sigma^i/2$ erzeugte Lie-Gruppe isomorph zur $SU(2)$ ist:

$$\varrho_{\text{Pauli}} \left(e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} \right) = \varrho_{\text{Pauli}} \left(e_*^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta}/2} \right) = \exp \left(-\frac{i}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\delta} \right). \quad (7.24)$$

Die Lie-Gruppe mit den Elementen $e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}}$ wollen wir daher mit $SU_G(2)$ bezeichnen.

Bemerkung: Eine kurze Diskussion der $SU(2)$ findet sich in Anhang C.2.1.

7.2.2. Diskussion der Rotationen

Wir betrachten nun die Transformation

$$\mathcal{R}_\delta : f \mapsto e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} * f * \overline{e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}}} \quad \text{für} \quad f \in \text{Cl}_3^*. \quad (7.25)$$

Wenn f reell ist, dann gilt das gleiche auch für das Bild von f unter dieser Abbildung. Die 4π -Periodizität der $SU(2)$ reduziert sich in (7.25) auf 2π , da $e_*^{-i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\delta}} = +1$ und -1 die gleiche Transformation bewirken. Aus Gleichung (7.23) lesen wir ab, daß $f = 1$ invariant unter dieser Transformation ist.

Für die Generatoren der Algebra Cl_3^* ergibt sich aus (7.25)

$$\mathcal{R}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{n}_\delta (\mathbf{n}_\delta \cdot \boldsymbol{\theta}) + \cos \delta \left(\boldsymbol{\theta} - \mathbf{n}_\delta (\mathbf{n}_\delta \cdot \boldsymbol{\theta}) \right) - \sin \delta (\mathbf{n}_\delta \times \boldsymbol{\theta}), \quad (7.26)$$

wie in Anhang C.4.2 gezeigt wird. Dies entspricht gerade einer Rotation von $\boldsymbol{\theta}$ als Spaltenvektor, wie man z. B. in Kapitel 1.3 von [SU1982] nachlesen kann.

Da Ω aus Gleichung (7.5) mit allen Elementen der Algebra vertauscht, verhält sich neben $\boldsymbol{\theta}$ auch $\boldsymbol{\Sigma} = \Omega * \boldsymbol{\theta}$ wie ein Vektor unter den Rotationen aus (7.25). Da außerdem die Elemente der Gruppe $SU_G(2)$ gemäß (7.23) unitär sind, ist Ω eine invariante Größe.

Die Abbildungsvorschrift (7.26) kann man auch in der bekannten Matrixschreibweise

$$\mathcal{R}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = R(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{\theta} \quad (7.27)$$

angeben, wobei $R(\boldsymbol{\delta})$ eine orthogonale 3×3 -Matrix mit Determinante 1 ist. Mit anderen Worten: $R(\boldsymbol{\delta})$ ist ein Element der $SO(3)$.

Als Beispiel betrachten wir die Rotation um die q_3 -Achse mit $\boldsymbol{n}_\delta = (0, 0, 1)^T$:

$$\mathcal{R}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta^3 \end{pmatrix} + \cos \delta \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin \delta \begin{pmatrix} -\theta^2 \\ \theta^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Die hier auftretende Matrix stellt eine *passive* Rotation dar, womit eine Drehung der Koordinatenachsen im Bezug auf das physikalische System gemeint ist.

Betrachten wir das Produkt $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\theta}$ unter dieser Transformation:

$$\mathcal{R}_\delta(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{x}^T R(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{\theta} = (R^T(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\delta} = (R^{-1}(\boldsymbol{\delta}) \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\delta}. \quad (7.29)$$

Im letzten Schritt wurde genutzt, daß $R(\boldsymbol{\delta})$ eine orthogonale Matrix ist. Wir stellen fest, daß die passive Drehung von $\boldsymbol{\theta}$ einer aktiven Drehung von \boldsymbol{x} entspricht.

7.2.3. Der Spin in drei Dimensionen

In Abschnitt 4.2 haben wir die Mechanik auf der Grassmann-Algebra mit Hilfe des Grassmann-Moyal-Produkts formuliert. Dort wurde die allgemeine Form der Lagrange-Funktion (4.24) angegeben. Unabhängig von der Wahl des Potentials V ergibt sich daraus der kanonische Impuls

$$\pi_i = \vartheta_i / 2i. \quad (7.30)$$

Der Spin, der gerade dem fermionischen Drehimpuls entspricht, hat folglich die Form

$$S_i = \epsilon_{ijk} \vartheta_j \pi_k = -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \vartheta_j \vartheta_k. \quad (7.31)$$

Diese Darstellung des Spins wird in Kapitel 5 von [HHS2004] verwendet.

Nun wechseln wir zu den Variablen $\theta^i = \sqrt{2/\hbar} \vartheta_i$. Mit der Definition der $\sigma^i = \epsilon_{ijk} \theta^j \theta^k / 2i$ aus Gleichung (7.7) erhält man dann

$$S_i = \frac{1}{2i} \epsilon_{ijk} \frac{\hbar}{2} \theta^j \theta^k = \frac{\hbar}{2} \sigma^i, \quad (7.32)$$

wobei die Pauli-Abbildung dieser Größen gemäß (7.12) gerade die herkömmlich Definition des Spins $\varrho_{\text{Pauli}}(S_i) = \hbar \hat{\sigma}^i / 2$ liefert.

Da sich $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma} / i$ wie ein Vektor unter Rotationen (7.25) verhält, gilt dies auch für den Spin $\boldsymbol{S} = \hbar \boldsymbol{\sigma} / 2$. Mit dem Pauli-Produkt aus Gleichung (7.1) bilden die S_i die übliche Lie-Algebra der Drehimpulse

$$[S_i, S_j]_* = i \hbar \epsilon_{ijk} S_k, \quad (7.33)$$

wobei dieser Kommutator direkt aus Gleichung (7.21) mit $S_i = \hbar J_i$ folgt.

Bemerkung: Wir sind bereits in Abschnitt 6.1.2 einem Spin begegnet, dessen Darstellung sich von (7.31) unterscheidet. Die hier eingeführte Definition des Spins als fermionischer Drehimpuls scheint aber die natürlichere zu sein.

7.3. Lorentz-Boosts

Im folgenden wird bewiesen, daß die Algebra Cl_3^* eine Gruppe erzeugt, die isomorph zur $SL(2, \mathbb{C})$ ist. Mit Hilfe dieser Gruppe können wir Lorentz-Transformationen auf Cl_3^* darstellen.

7.3.1. Lie-Gruppe zur gesamten Algebra

Aus der Multiplikationstabelle 7.1 erhält man die Kommutatorrelationen

$$[\theta^i, \theta^j]_* = 2\epsilon_{ijk}\Sigma^k, \quad [\Sigma^i, \theta^j]_* = -2\epsilon_{ijk}\theta^k \quad \text{und} \quad [\Sigma^i, \Sigma^j]_* = -2\epsilon_{ijk}\Sigma^k. \quad (7.34)$$

Wir definieren nun die Größen

$$K_i = \frac{\theta^i}{2i} \quad \text{und} \quad J_i = \frac{\Sigma^i}{2i} = \frac{\sigma^i}{2}, \quad (7.35)$$

so daß die Gleichungen aus (7.34) auch in der Form

$$[K_i, K_j]_* = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j]_* = +i\epsilon_{ijk}K_k \quad \text{und} \quad [J_i, J_j]_* = +i\epsilon_{ijk}J_k \quad (7.36)$$

geschrieben werden können. Dies entspricht gerade den Kommutatoren derjenigen Lie-Algebra, deren Elemente die eigentliche Lorentz-Transformation erzeugen. Wir haben bereits in Unterabschnitt 7.2.2 gezeigt, auf welche Weise $J_i = \sigma^i/2$ mit den Rotationen im Zusammenhang steht. Daher können wir K_i als die Erzeuger der Lorentz-Boosts identifizieren.

Aus der Multiplikationstabelle 7.1 liest man $\{\theta^i, \theta^j\}_*/2 = \delta_{ij}$ ab, so daß wir analog zu (7.22) die Gleichung

$$e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}} = e_*^{-\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}/2} = \cosh \frac{\omega}{2} - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}_\omega \sinh \frac{\omega}{2} \quad (7.37)$$

erhalten, wobei ω der Betrag des Vektors $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}_\omega$ ist. Offensichtlich gilt $\bar{K}_i = -K_i$ und daher ist $e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}}$ im Gegensatz zu $e_*^{-i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\delta}}$ nicht unitär. Zusammen erzeugen die J_i und K_i eine sechsparametrische Lie-Gruppe, deren Elemente die Form

$$e_*^{-i(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\delta} + \mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega})} = e_*^{-(\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega})/2} = e_*^{-\Omega*(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\delta} - \Omega*\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega})/2} \quad (7.38)$$

haben. Für $\boldsymbol{\omega} = 0$ erhält man die Elemente der Gruppe $SU_G(2)$, so daß sie eine Untergruppe ist.

Betrachten wir nun das Bild von (7.38) unter der Pauli-Abbildung aus Gleichung (7.19). Mit den elementaren Regeln $\varrho_{\text{Pauli}}(\Omega) = iI$ und $\varrho_{\text{Pauli}}(\theta^i) = \hat{\sigma}^i$ folgt sofort

$$\varrho_{\text{Pauli}}\left(e_*^{-i(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\delta} + \mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega})}\right) = \varrho_{\text{Pauli}}\left(e_*^{-\Omega*(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\delta} - \Omega*\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega})/2}\right) = \exp\left(-\frac{i}{2}(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\delta} - i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\omega})\right), \quad (7.39)$$

so daß die durch J_i und K_i erzeugte Lie-Gruppe isomorph zur $SL(2, \mathbb{C})$ ist. Dies motiviert die Bezeichnung dieser Gruppe mit $SL_G(2, \mathbb{C})$.

Bemerkung: In Anhang C.2.2 gehen wir kurz auf die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ ein, die lokal isomorph zur Lorentz-Gruppe² \mathcal{L}_+^\uparrow ist.

7.3.2. Diskussion der Lorentz-Boosts

Analog zur Vorschrift (7.25) betrachten wir nun die Abbildung

$$\mathcal{B}_\omega : f \mapsto e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}} * f * \overline{e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}}}. \quad (7.40)$$

²Die eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe \mathcal{L}_+^\uparrow enthält weder die Raum- noch die Zeitspiegelung.

Genau wie die Transformation in (7.25) ist das Bild eines reellen Elements aus Cl_3^* wiederum reell.

Üblicherweise werden die Lorentz-Boosts mit dem Parametervektor $\boldsymbol{\beta}$ beschrieben, der die Relativgeschwindigkeit der beiden betrachteten Bezugssysteme in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit c angibt. Aus physikalischen Betrachtungen kann man die Beziehungen

$$\boldsymbol{\beta} = \tanh \omega \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_\beta = \mathbf{n}_\omega \quad (7.41)$$

gewinnen, so daß wir $\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{n}_\beta$ als Funktion von ω ansehen können. Außerdem führen wir mit der Definition $\gamma = \cosh \omega$ einen weiteren Parameter ein³.

Mit den neuen Parameter $\boldsymbol{\beta}$ und γ ergeben sich die Transformationen

$$\mathcal{B}_\omega(1) = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \quad (7.42a)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{B}_\omega(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} + (\gamma - 1) \mathbf{n}_\beta (\mathbf{n}_\beta \cdot \boldsymbol{\theta}) - \gamma \boldsymbol{\beta}, \quad (7.42b)$$

wobei der Beweis hierzu in Anhang C.4.3 zu finden ist. Indem wir 1 und $\boldsymbol{\theta}$ zu einem Vektor mit vier Komponenten $(1, \boldsymbol{\theta})$ vereinen, können wir die Abbildungen aus (7.42) auf folgende Weise zusammenfassen:

$$\mathcal{B}_\omega : \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & 1 + (\gamma - 1) \mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\beta^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix}. \quad (7.43)$$

Dies ist gerade der *passive* Lorentz-Boost eines Vierervektors, wie man z. B. in Kapitel 6.1 von [SU1982] sieht. Da sich $(1, \boldsymbol{\theta})$ somit wie ein Vierervektor unter Lorentz-Transformationen verhält, werden wir die Komponenten dieses Vektors mit Θ^μ bezeichnen, wobei der Index μ die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann.

Die Größe Ω vertauscht mit allen Elementen der Algebra, so daß sich $(\Omega, \boldsymbol{\Sigma}) = \Omega * (1, \boldsymbol{\theta})$ unter den Rotationen (7.25) und den Lorentz-Boosts (7.40) genau wie $(1, \boldsymbol{\theta})$ verhält. Aus diesem Grund muß es sich auch bei $\Omega * \Theta^\mu$ um einen Vierervektor handeln und somit sind alle $2^3 = 8$ Basiselemente der Algebra Teil eines Vierervektors.

Da (7.43) eine lineare Transformation ist, können die Lorentz-Boosts ebenfalls in der Matrixschreibweise

$$\mathcal{B}_\omega(\Theta^\mu) = \Lambda^\mu_\nu(\omega) \Theta^\nu \quad (7.44)$$

angeben werden, wobei über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Die 4×4 -Matrix $\Lambda^\mu_\nu(\omega)$ stellt einen passiven Lorentz-Boost dar. Auf die gleiche Weise wie in Gleichung (7.29) zeigt man, daß ein passiver Lorentz-Boost von $\Theta_\mu p^\mu \equiv \Theta \cdot p$ gemäß (7.40) das gleiche Ergebnis liefert wie ein aktiver Lorentz-Boost des Vierervektors p^μ .

7.3.3. Der Spin in vier Dimensionen

Wir betrachten nochmals den Spin (7.32), der sich auch als

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma^i = \frac{\hbar}{2i} \Sigma^i = \frac{\hbar}{2i} \Omega * \theta^i \quad (7.45)$$

schreiben läßt. Da $\Omega * \theta^i$ gerade die räumlichen Komponenten des Vierervektors $\Omega * \Theta^\mu$ sind, schließen wir daraus, daß man

$$S^\mu = \frac{\hbar}{2i} \Omega * \Theta^\mu \quad (7.46)$$

als den Vierervektor des Spins ansehen kann.

³Aus den Definitionen von β und γ folgt direkt $\sinh \omega = \beta \gamma$. Die Identität $\cosh^2 \omega - \sinh^2 \omega = 1$ zeigt dann, daß die Relation $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ gültig ist. Somit kann man auch γ implizit als Funktion von β bzw. ω betrachten.

7.4. Eigentliche Lorentz-Transformationen

In den Unterabschnitten 7.2.2 und 7.3.2 haben wir gezeigt, daß man mit den Elementen der Lie-Gruppe $SL_G(2, \mathbb{C})$ sowohl Rotationen als auch Lorentz-Boosts beschreiben kann. Um Kombinationen von Rotationen und Lorentz-Boosts zu diskutieren, fassen wir nochmals die Ergebnisse sowohl für die Rotation \mathcal{R} aus (7.25) und (7.27) als auch den Lorentz-Boost \mathcal{B} aus (7.40) und (7.44) für den Fall $f = \Theta^\mu$ zusammen:

$$\mathcal{R}_\delta(\Theta^\mu) = e_*^{-\Sigma \cdot \delta / 2} * \Theta^\mu * e_*^{\overline{-\Sigma \cdot \delta / 2}} = e_*^{-\Sigma \cdot \delta / 2} * \Theta^\mu * e_*^{+\Sigma \cdot \delta / 2} = R^\mu_\nu(\delta) \Theta^\nu \quad (7.47a)$$

$$\text{und } \mathcal{B}_\omega(\Theta^\mu) = e_*^{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2} * \Theta^\mu * e_*^{\overline{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2}} = e_*^{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2} * \Theta^\mu * e_*^{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2} = \Lambda^\mu_\nu(\boldsymbol{\omega}) \Theta^\nu. \quad (7.47b)$$

Dabei wurde die Matrix R aus (7.27) auf triviale Weise zur 4×4 -Matrix R^μ_ν erweitert.

Führt man zuerst eine Rotation und anschließend einen Lorentz-Boost durch, dann ergibt sich folgende Transformation:

$$\mathcal{L}_{\delta, \boldsymbol{\omega}}(\Theta^\mu) = e_*^{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2} * e_*^{-\Sigma \cdot \delta / 2} * \Theta^\mu * e_*^{+\Sigma \cdot \delta / 2} * e_*^{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2} = R^\mu_\lambda(\delta) \Lambda^\lambda_\nu(\boldsymbol{\omega}) \Theta^\nu \equiv L^\mu_\nu(\delta, \boldsymbol{\omega}) \Theta^\nu. \quad (7.48)$$

Die hier auftretende Matrix $L(\delta, \boldsymbol{\omega})$ mit den Komponenten $L^\mu_\nu(\delta, \boldsymbol{\omega}) \Theta^\mu$ können wir mit Hilfe von (7.43) bestimmen:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma \boldsymbol{\beta} & 1 + (\gamma - 1) \mathbf{n}_\beta \mathbf{n}_\beta^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma R \boldsymbol{\beta} & R + (\gamma - 1) (R \mathbf{n}_\beta) \mathbf{n}_\beta^T \end{pmatrix}, \quad (7.49)$$

wobei hier die Argumente zur besseren Übersicht weggelassen wurden. Die in der letzten Gleichung angegebene Matrix ist gerade eine Möglichkeit, ein Element aus \mathcal{L}_+^1 darzustellen.

Die in Gleichung (7.48) angegebene Lorentz-Transformation hat die Form

$$\mathcal{L}_{\delta, \boldsymbol{\omega}} : f \mapsto D * f * \bar{D} \quad \text{mit} \quad D = e_*^{-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} / 2} * e_*^{-\Sigma \cdot \delta / 2}. \quad (7.50)$$

Da Σ^i und θ^j für $i \neq j$ nicht kommutieren, ist D im allgemeinen nicht identisch mit der in Gleichung (7.38) zu sehenden Funktion. Dennoch kann man Lorentz-Transformation (7.50) auf die Form

$$\mathcal{L}_{\delta, \boldsymbol{\omega}} : f \mapsto \bar{T} * f * T \quad \text{mit} \quad T = e_*^{\overline{(-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} - \Sigma \cdot \delta) / 2}} = e_*^{(-\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} + \Sigma \cdot \delta) / 2}, \quad (7.51)$$

bringen, wobei aber die Parametervektoren δ und $\boldsymbol{\omega}$ im allgemeinen von denen in Gleichung (7.50) verschieden sind.

7.5. Hinzunahme der Raumspiegelung

Die Darstellung der Lorentz-Transformationen aus dem vorhergehenden Abschnitt hat einige Nachteile. Einerseits lassen sich keine Raumspiegelungen beschreiben und andererseits kann man Gleichung (7.51) nicht in der in vielen Fällen günstigen Form $T^{-1} * \Theta^\nu * T$ angeben. Beide Einschränkungen können durch eine Erweiterung der Algebra behoben werden, wie in diesem Abschnitt gezeigt wird.

7.5.1. Die Parität

Die Raumspiegelung, auch *Parität* genannt, entspricht der Abbildung $\theta^i \mapsto \mathcal{P}(\theta^i) = -\theta^i$. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß man diese Transformation innerhalb von Cl_3^* nicht darstellen kann. Daher ergänzen wir die Algebra um einen weiteren Erzeuger θ^0 und ersetzen das Pauli-Produkt (7.1) durch

$$f * g = f \exp(\vec{\partial}_{\theta^0} \vec{\partial}_{\theta^0} + \vec{\partial}_{\theta^1} \vec{\partial}_{\theta^1} + \vec{\partial}_{\theta^2} \vec{\partial}_{\theta^2} + \vec{\partial}_{\theta^3} \vec{\partial}_{\theta^3}) g. \quad (7.52)$$

Dieses Produkt werden wir ebenfalls *Pauli-Produkt* nennen, da es für $f, g \in \text{Cl}_3^*$ die gleichen Ergebnisse liefert wie das Pauli-Produkt aus Abschnitt 7.1. Die Algebra, die durch $\theta^0, \theta^1, \theta^2$ und θ^3 mit diesem Pauli-Produkt erzeugt wird, soll mit Cl_4^* bezeichnet werden.

Mit dem Pauli-Produkt ergibt sich der Antikommutator

$$\{\theta^0, \theta^i\}_* = 0, \quad (7.53)$$

so daß man die Parität in der Form

$$\mathcal{P}(\theta^i) = \theta^0 * \theta^i * \theta^0 = -\theta^0 * \theta^0 * \theta^i = -\theta^i \quad (7.54)$$

angeben kann. Für $\Sigma^i \propto \theta^j * \theta^k$ und $\Omega = \theta^1 * \theta^2 * \theta^3$ erhalten wir direkt folgende Gleichungen:

$$[\theta^0, \Sigma^i]_* = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(\Sigma^i) = \Sigma^i \quad \text{und} \quad \{\theta^0, \Omega\}_* = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(\Omega) = -\Omega. \quad (7.55)$$

Man beachte, daß Ω nun nicht mehr mit allen Elementen der Algebra kommutiert.

7.5.2. Basis von Cl_4^*

Mit dem neuen Generator θ^0 definieren wir

$$\gamma^\mu = \theta^0 * \Theta^\mu = \theta^0 \Theta^\mu, \quad \text{d. h.} \quad \gamma^0 = \theta^0, \quad \gamma^i = \theta^0 \theta^i, \quad (7.56)$$

wobei der Vierer-Index μ erst später motiviert wird. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß diese Größen die Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_* = \gamma^\mu * \gamma^\nu + \gamma^\nu * \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (7.57)$$

erfüllen. Gleichung (7.57) zeigt, daß γ^μ die Erzeuger einer Clifford-Algebra sind.

Der Kommutator definiert sechs weitere Größen

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_*, \quad (7.58)$$

die auf folgende Weise mit θ^i und Σ^i im Zusammenhang stehen:

$$\theta^i = \theta^0 * \theta^0 * \theta^i = \gamma^0 * \gamma^i = \frac{1}{2} [\gamma^0, \gamma^i]_* = -i\sigma^{0i}, \quad (7.59a)$$

$$\Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta^j * \theta^k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \gamma^j * \gamma^k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} [\gamma^j, \gamma^k]_* = \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk}. \quad (7.59b)$$

Darüber hinaus führen wir die Definition

$$\gamma^5 = i\gamma^0 * \gamma^1 * \gamma^2 * \gamma^3 = \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma^\mu * \gamma^\nu * \gamma^\rho * \gamma^\tau \quad (7.60)$$

ein, mit der man leicht die Relationen

$$i\gamma^5 = \Omega \quad \text{und} \quad \gamma^\mu * \gamma^5 = \frac{i}{4!} \epsilon^\mu{}_{\nu\rho\tau} \gamma^\nu * \gamma^\rho * \gamma^\tau \quad (7.61)$$

zeigen kann.

In den Gleichungen (7.56), (7.58), (7.60) und (7.61) werden 15 linear unabhängige Größen definiert. Genau wie bei eine Grassmann-Algebra mit vier Generatoren hat auch Cl_4^* die Dimension $2^4 = 16$, so daß es sich bei $\{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu * \gamma^5, \gamma^5\}$ um eine Basis von Cl_4^* handelt.

Bemerkungen:

- In Anhang C.3 wird eine alternative Darstellung dieser Algebra angegeben, die auf einer Grassmann-Algebra mit sechs Generatoren beruht.
- Wenn man das Pauli-Produkt (7.52) durch Ableitungen nach γ^μ ausdrückt, lautet es

$$f * g = f \exp(\vec{\partial}_{\gamma^\mu} g^{\mu\nu} \vec{\partial}_{\gamma^\nu}) g. \quad (7.62)$$

7.5.3. Dirac-Abbildung und Definition einer Spur

Die Algebra Cl_4^* ist offensichtlich sehr ähnlich zu derjenigen, die durch die 4×4 -Matrizen $\hat{\gamma}^\mu$ der Dirac-Theorie erzeugt wird. Tatsächlich wurde für die Erzeugung der Algebra durch die γ^μ nur die Antikommutatorrelation aus Gleichung (7.57) verwendet, die von der Form identisch mit der bekannten Gleichung

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (7.63)$$

ist, so daß die beiden Algebren isomorph sind. Der entsprechende Isomorphismus ϱ_{Dirac} wird durch die Bedingungen

$$\varrho_{\text{Dirac}}(1) = I \otimes I \quad \text{und} \quad \varrho_{\text{Dirac}}(\gamma^\mu) = \hat{\gamma}^\mu \quad (7.64)$$

festgelegt, wobei I die 2×2 -Einheitsmatrix ist. Im folgenden wollen wir ϱ_{Dirac} die *Dirac-Abbildung* nennen.

Die sogenannte *Dirac-Darstellung* der Clifford-Algebra, die durch die 4×4 -Matrizen $\hat{\gamma}^\mu$ erzeugt wird, erhält man mit den Definitionen

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\beta} = \hat{\sigma}^3 \otimes I = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\gamma}^i = \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = i \hat{\sigma}^2 \otimes \hat{\sigma}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}^i \\ -\hat{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.65)$$

wobei es sich bei $\hat{\sigma}^i$ um die Pauli-Matrizen aus (7.9) handelt. Die Matrizen $I \otimes I$ und $\hat{\gamma}^\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) werden durch

$$\hat{\sigma}^{0i} = [\hat{\gamma}^0, \hat{\gamma}^i] = i \hat{\sigma}^1 \otimes \hat{\sigma}^i, \quad \hat{\sigma}^{ij} = [\hat{\gamma}^i, \hat{\gamma}^j] = \epsilon_{ijk} I \otimes \hat{\sigma}^k, \quad (7.66a)$$

$$\hat{\gamma}^5 = \hat{\sigma}^1 \otimes I, \quad \hat{\gamma}^0 \hat{\gamma}^5 = i \hat{\sigma}^2 \otimes I \quad \text{und} \quad \hat{\gamma}^i \hat{\gamma}^5 = \hat{\sigma}^3 \otimes \hat{\sigma}^i \quad (7.66b)$$

zu einer Basis der 4×4 -Matrizen ergänzt. Alle Basiselemente bis auf $I \otimes I$ sind spurlos. Daher ist die Spur gerade die lineare Abbildung von den 4×4 -Matrizen nach \mathbb{C} , die $\text{tr}(I \otimes I) = 4$ liefert und die für alle übrigen Basiselemente 0 ergibt.

Durch die Bedingung

$$\text{Tr}(f) = \text{tr}(\varrho_{\text{Dirac}}(f)) \quad \text{für} \quad f \in \text{Cl}_4^* \quad (7.67)$$

können wir auch eine Spur auf Cl_4^* definieren. Diese Voraussetzung wird von

$$\text{Tr}(f) = 4 \int d\theta^4 d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \star f \quad (7.68)$$

erfüllt, wobei die Ähnlichkeit zur Definition der Spur für die gerade Unteralgebra von Cl_3^* auffällt, die in Gleichung (7.13) zu sehen ist. Als einziges Element aus $\{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu * \gamma^5, \gamma^5\}$ hat nur 1 eine von Null verschiedene Spur und es gilt

$$\text{Tr}(1) = 4 \int d\theta^4 d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \star 1 = 4 \int d\theta^4 d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \theta^1 \theta^2 \theta^3 \theta^4 = 4 = \text{tr}(I \otimes I). \quad (7.69)$$

Die Definition (7.68) ist auch in [HHS2004] angegeben.

Bemerkungen:

- Mit der Dirac-Abbildung sind die in (7.65) definierten Matrizen $\hat{\beta}$ und $\hat{\alpha}^i$ auf folgende Weise Elementen aus Cl_4^* zuzuordnen:

$$\varrho_{\text{Dirac}}(\theta^0) = \hat{\beta} \quad \text{und} \quad \varrho_{\text{Dirac}}(\theta^i) = \hat{\alpha}^i. \quad (7.70)$$

- Bei Funktionen, die sowohl von ϑ als auch von q und p abhängen, kann man die Dirac-Abbildung auf einfache Weise mit der Weyl-Abbildung aus dem Abschnitt 1.2.1 kombinieren:

$$\varrho_{\text{Weyl-Dirac}}(b(p, q) f(\theta)) = \varrho_{\text{Weyl}}(b(p, q)) \varrho_{\text{Dirac}}(f(\theta)). \quad (7.71)$$

Naheliegenderweise nennen wir $\varrho_{\text{Weyl-Dirac}}$ die *Weyl-Dirac-Abbildung*.

7.5.4. Alternative Darstellung der Lorentz-Transformation

Betrachten wir nochmals die in Gleichung (7.51) angegebene Lorentz-Transformation. Multipliziert man diese Gleichung mit θ^0 , dann ergibt sich unter Beachtung von $\{\theta^0, \theta^i\}_* = 0$ und $[\theta^0, \Sigma^i]_* = 0$:

$$\begin{aligned}\theta^0 * \mathcal{L}_{\delta, \omega}(\Theta^\mu) &= \theta^0 * e_*^{(-\Sigma \cdot \delta - \theta \cdot \omega)/2} * \Theta^\mu * e_*^{(+\Sigma \cdot \delta - \theta \cdot \omega)/2} \\ &= e_*^{(-\Sigma \cdot \delta + \theta \cdot \omega)/2} * \theta^0 * \Theta^\mu * e_*^{(+\Sigma \cdot \delta - \theta \cdot \omega)/2} \stackrel{!}{=} L^\mu_\nu(\delta, \omega) \theta^0 * \Theta^\nu.\end{aligned}\quad (7.72)$$

Die letzte Zeile zeigt, daß es eine Abbildung der Form $f \mapsto T^{-1} * f * T$ gibt, die der Lorentz-Transformation von $\gamma^\mu = \theta^0 * \Theta^\mu$ als Vierervektor entspricht.

Dies motiviert die Einführung einer neuen Darstellung⁴ der Lorentz-Transformationen:

$$T : f \mapsto T^{-1} * f * T \quad \text{mit} \quad T = e_*^{+(\Sigma \cdot \delta - \theta \cdot \omega)/2}, \quad (7.73)$$

wobei wir gleich die Argumente δ und ω weggelassen haben. Wie in Gleichung (7.72) zu sehen ist, verhält sich γ^μ und nicht mehr Θ^μ wie ein Vierervektor unter dieser Transformation. Darüber hinaus ergibt die Paritätstransformation von γ^μ gemäß Gleichung (7.54)

$$\mathcal{P}(\gamma^0) = \theta^0 * \theta^0 * \theta^0 = \theta^0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{P}(\gamma^i) = \theta^0 * \theta^0 * \theta^i * \theta^0 = -\theta^0 * \theta^i = -\gamma^i, \quad (7.74)$$

so daß γ^μ ein polarer Vierervektor ist.

Um den Exponenten von T aus Gleichung (7.73) in eine kovariante Schreibweise zu bringen, verwenden wird die Größen $\sigma^{\mu\nu}$, die in Gleichung (7.58) definiert wurden. Die beiden Terme aus dem Exponent von T kann man mit (7.59) auf folgende Weise ausdrücken:

$$\theta \cdot \omega = -i\sigma^{0i}\omega^i = \frac{i}{2}(\sigma^{0i}(-\omega^i) + \sigma^{i0}\omega^i) = \frac{i}{2}(\sigma^{0i}\omega_{0i} + \sigma^{i0}\omega_{i0}) \quad (7.75a)$$

$$\text{und} \quad \Sigma \cdot \delta = \left(\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma^{jk}\right)\delta^i = \frac{i}{2}\sigma^{jk}(\epsilon_{jki}\delta^i) = -\frac{i}{2}\sigma^{jk}\omega_{jk} = -\frac{i}{2}\sigma^{ij}\omega_{ij}. \quad (7.75b)$$

Hier wurde die Definitionen $\omega^{0i} = \omega^i$ und $\omega^i_j = \epsilon_{ijk}\delta^k$ verwendet. Die beiden Gleichungen (7.75) kann man zu $\Sigma \cdot \delta - \theta \cdot \omega = (\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})/2i$ zusammenfassen, so daß sich

$$T = e_*^{(\Sigma \cdot \delta - \theta \cdot \omega)/2} = e_*^{-i\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}/4} \quad (7.76)$$

ergibt.

Mit dem Transformationsgesetz

$$\mathcal{T}(\gamma^\mu) = T^{-1} * \gamma^\mu * T = L^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (7.77)$$

kann man leicht zeigen, daß sich $\sigma^{\mu\nu}$ wie ein Lorentz-Tensor verhält. Die Größe γ^5 ist invariant unter Lorentz-Transformationen. Allerdings handelt es sich bei γ^5 um ein Pseudoskalar, wie man leicht mit Hilfe von $\mathcal{P}(f * g) = \mathcal{P}(f) * \mathcal{P}(g)$ und (7.74) nachrechnen kann. Aus den Eigenschaften von γ^μ und γ^5 folgt, daß es sich bei $\gamma^\mu * \gamma^5$ um einen Axialvektor handelt.

7.5.5. Der Viererspin in anderer Darstellung

In Gleichung (7.46) haben wir den Spin-Vierervektor $S^\mu = \hbar\Omega * \Theta^\mu/2i$ eingeführt. Da wir aber einen Darstellungswechsel für die Lorentz-Transformationen durchgeführt haben, ist Θ^μ unter der Transformation (7.73) kein Vierervektor mehr und das gleiche gilt auch für die zuvor angegebene Definition von S^μ . Daher muß der Spin-Vierervektor neu definiert werden, indem man Θ^μ durch den Vierervektor der jetzigen Darstellung γ^μ ersetzt:

$$S^\mu = \frac{\hbar}{2i}\Omega * \gamma^\mu = \frac{\hbar}{2}\gamma^5 * \gamma^\mu, \quad (7.78)$$

wobei wir die erste Gleichung aus (7.61) benutzt haben.

⁴Man beachte, daß es sich bei (7.73) tatsächlich um eine andere Darstellung als in Gleichung (7.51) handelt, da die $SL(2, \mathbb{C})$ nicht unitär ist, d. h. es gibt $T \in SL(2, \mathbb{C})$ mit $\bar{T} \neq T^{-1}$.

7.6. Die konforme Gruppe

In den Gleichungen (7.76) und (7.77) wurde gezeigt, daß man mit Hilfe der Größen

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu} \quad (7.79)$$

die Lorentz-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow erzeugen kann. Dies kommt auch in der bekannten Kommutatorrelation

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]_* = -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \quad (7.80)$$

zum Ausdrücken.

Wie wir in (7.59) sehen können, treten in $\sigma^{\mu\nu}$ nur Elemente der Algebra Cl_3^* auf, so daß man auch die Lorentz-Transformation aus (7.50) mit Hilfe von $M^{\mu\nu}$ angeben kann. Durch die Hinzunahme des Erzeugers $\theta^0 = \gamma^0$ wird die Anzahl der Algebraelemente verdoppelt. Daher stellt sich die Fragen, ob die neu hinzugekommenen Größen auch zu physikalisch relevanten Transformationen führen.

Dies ist tatsächlich der Fall, denn mit eine der beiden möglichen Definitionen

$$P^\mu = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) * \gamma^\mu \quad (7.81)$$

erhält man neben (7.80) noch die Kommutatoren

$$[P^\mu, P^\nu]_* = 0, \quad [P^\mu, M^{\rho\sigma}]_* = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho). \quad (7.82)$$

Damit ergibt sich die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe.

Führt man die Definitionen

$$D = \frac{i}{2}\gamma^5, \quad P^\mu = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) * \gamma^\mu \quad \text{und} \quad P'^\mu = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) * \gamma^\mu \quad (7.83)$$

ein, dann ergeben sich die Kommutatorrelationen aus Tabelle 7.2. Dabei handelt es sich um die Lie-Algebra der konformen Gruppe, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen wollen. Mehr zu diesem Thema kann in [Cra1991] gefunden werden.

$[P^\mu, P'^\nu]_* = 2i(g^{\mu\nu}D - M^{\mu\nu})$	
$[P^\mu, D]_* = +iP^\mu$	$[P'^\mu, D]_* = -iP'^\mu$
$[P^\mu, P^\nu]_* = 0$	$[P'^\mu, P'^\nu]_* = 0$
$[P^\mu, M^{\rho\sigma}]_* = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho)$	$[P'^\mu, M^{\rho\sigma}]_* = i(g^{\mu\rho}P'^\sigma - g^{\mu\sigma}P'^\rho)$
$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]_* = -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho})$	
$[D, M^{\mu\nu}]_* = 0$	

Tabelle 7.2.: Lie-Algebra der konformen Gruppe.

8. Dirac-Theorie

In diesem Kapitel gehen wir auf die Dirac-Theorie ein, wobei einige zuvor eingeführte Techniken erstmalig zur Anwendung kommen. Die folgende Diskussion wird auch in den Artikel [HHS2004] eingehen und kann dort in Kapitel 7 gefunden werden.

Im ersten Abschnitt betrachten wir die relativistische Beschreibung eines freien Teilchens, wobei die Energie- und Spin-Projektoren dieses Systems bestimmt werden. Anschließend führen wir durch minimale Substitution ein elektromagnetisches Feld ein. Um eine nicht-relativistische Näherung durchzuführen, übersetzen wir die Foldy-Wouthuysen-Transformation [FW1950] in den Sternproduktformalismus. Der dritte und letzte Teil dient der Bestimmung einer manifest kovarianten Gleichung, die der Dirac-Gleichung entspricht. Außerdem werden die kovarianten Formen der Projektoren angegeben.

8.1. Bestimmung der Projektoren

Ausgangspunkt dieser Diskussion ist die als bekannt vorausgesetzte Hamilton-Funktion der Dirac-Theorie

$$\hat{H}_D = \hat{\alpha} \cdot \mathbf{p}c + \hat{\beta}mc^2, \quad (8.1)$$

wobei die 4×4 -Matrizen $\hat{\alpha}^i$ (mit $i = 1, 2, 3$) und $\hat{\beta}$ bereits in der Gleichung (7.65) angegeben wurden. Auf der Basis der in Abschnitt 4.5 dargestellten Methoden, werden wir im folgenden die Energieprojektoren dieses Systems bestimmen. Im zweiten Unterabschnitt wird gezeigt, daß es eine erhaltene Spin-Observable gibt, wobei dort auch die beiden zugehörigen Projektoren bestimmt werden.

8.1.1. Energieprojektoren

Um dem Hamilton-Operator (8.1) eine Funktion im $qp\vartheta$ -Phasenraum zuzuordnen zu können, benutzen wir die Dirac-Abbildung aus Unterabschnitt 7.5.3. Mit den Gleichungen

$$\varrho_{\text{Dirac}}(\theta^0) = \hat{\beta} \quad \text{und} \quad \varrho_{\text{Dirac}}(\theta^i) = \hat{\alpha}^i \quad (8.2)$$

aus (7.70) erhält man die Hamilton-Funktion

$$H_D = \varrho_{\text{Dirac}}^{-1}(\hat{H}_D) = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p}c + \theta^0 mc^2. \quad (8.3)$$

Im folgenden benutzen wir das Super-Moyal-Produkt aus Gleichung (4.54). Mit der Definition $\theta^i = \sqrt{2/\hbar}\vartheta_i$ lautet es in diesem Kontext

$$f *_S g = f \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{i=1}^3 (\tilde{\partial}_{q_i} \tilde{\partial}_{p_i} - \tilde{\partial}_{p_i} \tilde{\partial}_{q_i}) + \sum_{j=0}^3 \tilde{\partial}_{\theta_j} \tilde{\partial}_{\theta_j}\right) g. \quad (8.4)$$

Den fermionischen Teil dieses Produkts bezeichnen wir mit $*_P$ und den bosonischen mit $*_M$, d.h. es gilt

$$f *_P g = f \exp\left(\sum_{j=0}^3 \tilde{\partial}_{\theta_j} \tilde{\partial}_{\theta_j}\right) g \quad \text{und} \quad f *_M g = f \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \sum_{i=1}^3 (\tilde{\partial}_{q_i} \tilde{\partial}_{p_i} - \tilde{\partial}_{p_i} \tilde{\partial}_{q_i})\right) g. \quad (8.5)$$

Die Projektoren dieses Systems können mit Hilfe des Sternexponentials (4.69)

$$\text{Exp}_{*S}(H_D t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{i\hbar} \right)^k H_D^{k*S} = \sum_{E^D} \pi_{E^D}^D e^{-iE^D t/\hbar} \quad (8.6)$$

bestimmt werden. Hier ist nur der fermionische Teil des Sternprodukts relevant, da keine q -abhängigen Größen vorkommen. Für das Sternexponential aus (8.6) muß man offensichtlich H_D^{k*S} berechnen. Die Fälle $k=0$ und 1 sind trivial und für $k=2$ benutzen wir die Gleichungen

$$\theta^i *_P \theta^j = i\varepsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij}, \quad \{\theta^0, \theta^i\}_{*P} = 0 \quad \text{und} \quad \theta^0 *_P \theta^0 = 1. \quad (8.7)$$

Die erste Gleichung kann man der Multiplikationstabelle 7.1 entnehmen und die übrigen beiden folgen direkt aus der Definition des Pauli-Produkts $*_P$. Mit Hilfe von (8.7) erhalten wir

$$H_D *_S H_D = \theta^i *_S \theta^j p^i p^j c^2 + (\theta^i \theta^0 + \theta^0 \theta^i) p^i m c^3 + \theta^0 *_P \theta^0 m^2 c^4 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4. \quad (8.8)$$

Das Ergebnis ist also vom Grad 0.

Mit den Definitionen

$$y = \frac{H_D}{E} \quad \text{und} \quad E = \sqrt{c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4} \quad (8.9)$$

kann man Gleichung (8.8) in der Form

$$y *_P y = 1 \quad (8.10)$$

angeben. Der Vergleich mit (5.5) zeigt, daß die gleiche Situation wie beim fermionischen Oszillator vorliegt. Wie man der Gleichung (5.3) entnehmen kann, nimmt dort $\hbar\omega/2$ die Rolle von E ein. Die Projektoren und die dazugehörigen Energieniveaus können wir daher direkt aus (5.12) übernehmen:

$$\pi_{\pm E}^D(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} (1 \pm y) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{H_D}{E} \right) \quad \text{mit} \quad E_{\pm}^D = \pm E. \quad (8.11)$$

Diese Projektoren erfüllen die Sterneigenwertgleichung

$$H_D *_S \pi_{\pm E}^D(\mathbf{p}) = E_{\pm}^D \pi_{\pm E}^D(\mathbf{p}) = \pm E \pi_{\pm E}^D(\mathbf{p}). \quad (8.12)$$

8.1.2. Spin-Projektoren

Den Spin-Vierervektor haben wir bereits in Gleichung (7.78) als

$$S^\mu = \frac{\hbar}{2} \gamma^5 *_P \gamma^\mu \quad (8.13)$$

definiert. Der räumliche Anteil dieses Vierervektors in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{u} liefert die skalare Observable

$$S_{\mathbf{u}} = \frac{\hbar}{2} \gamma^5 *_P (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}). \quad (8.14)$$

Wir bestimmen nun den Kommutator mit der Hamilton-Funktion aus Gleichung (8.3). Die beiden Rechnungen

$$[\theta^0, \gamma_5 *_P \gamma^i]_{*P} = [\gamma^0, \gamma_5 *_P \gamma^i]_{*P} = -\gamma_5 *_P \{\gamma^0, \gamma^i\}_{*P} = 0 \quad (8.15a)$$

$$\text{und} \quad [\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p}, \gamma_5 *_P (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u})]_{*P} = -\gamma^0 *_P \gamma_5 *_P \{\gamma^i, \gamma^j\}_{*P} p^i u^j = 2\gamma^0 *_P \gamma_5 \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \quad (8.15b)$$

zeigen, daß die Spin-Observable $S_{\mathbf{u}}$ nur dann mit H_D kommutiert, wenn der Einheitsvektor \mathbf{u} orthogonal zum Impulsvektor \mathbf{p} ist. Wir nehmen also

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (8.16)$$

an, so daß $S_{\mathbf{u}}$ aus Gleichung (8.14) eine Erhaltungsgröße ist.

Es sollen nun die Projektoren zur Observable $S_{\mathbf{u}}$ bestimmt werden. Da \mathbf{u} ein Einheitsvektor ist, erhalten wir

$$S_{\mathbf{u}} *_{\mathcal{P}} S_{\mathbf{u}} = - \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}) *_{\mathcal{P}} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}) = - \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \{ \gamma^i, \gamma^j \} *_{\mathcal{P}} u^i u^j = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2. \quad (8.17)$$

Mit $y = 2S_{\mathbf{u}}/\hbar$ und $2/\hbar$ anstelle von E kann man daher direkt die Projektoren aus (8.11) übernehmen:

$$\pi_{\pm}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\hbar} S_{\mathbf{u}} \right) \quad \text{mit} \quad S_{\mathbf{u}} *_{\mathcal{P}} \pi_{\pm}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u}) = \pm \frac{\hbar}{2} \pi_{\pm}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u}). \quad (8.18)$$

Das Produkt aus einem Energieprojektor $\pi_{\pm E}^{\mathcal{D}}(\mathbf{p})$ und einem Spin-Projektor $\pi_{\pm}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u})$ ist gleichzeitig Sterneigenfunktion von $H_{\mathcal{D}}$ und $S_{\mathbf{u}}$, wobei die beiden Vorzeichen unabhängig voneinander gewählt werden können. Bei vorgegebenen Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{u} mit $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = 0$ werden mit den Projektoren der Form $\pi_{\pm E}^{\mathcal{D}}(\mathbf{p}) \pi_{\pm}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u})$ daher vier verschiedene Zustände unterschieden.

8.2. Nicht-relativistische Näherung der Dirac-Gleichung

Wir betrachten die relativistische Beschreibung eines Teilchens mit der Ladung $+e$ und dem Spin $1/2$, das sich frei in einem elektromagnetischen Feld bewegt. Die entsprechende Hamilton-Funktion kann aus Gleichung (8.3) durch minimale Substitution gewonnen werden:

$$H_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\theta} \cdot (c\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \theta^0 mc^2 + e\varphi. \quad (8.19)$$

Ziel ist es, eine nicht-relativistische Näherung dieser Hamilton-Funktion herzuleiten. Durch Anwendung der Weyl-Dirac-Abbildung aus Unterabschnitt 7.5.3 können wir das Ergebnis dann mit dem Hamilton-Operator aus Gleichung (6.5) vergleichen.

8.2.1. Die Rolle der Parität in der nicht-relativistischen Näherung

Die Hamilton-Funktion aus Gleichung (8.19) formen wir nun zu

$$\mathcal{H} = \frac{H_{\mathcal{D}}}{mc^2} = \theta^0 + \mathcal{E} + \mathcal{O} \quad (8.20)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{E} = \frac{e\varphi}{mc^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} = \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{c\mathbf{p} - e\mathbf{A}}{mc^2} \quad (8.21)$$

um, wobei sich die beiden Terme \mathcal{E} und \mathcal{O} in ihrer Parität unterscheiden. Mit der Definition aus (7.54) erhält man

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \theta^0 *_{\mathcal{P}} \mathcal{E} *_{\mathcal{P}} \theta^0 = \mathcal{E} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}(\mathcal{O}) = \theta^0 *_{\mathcal{P}} \mathcal{O} *_{\mathcal{P}} \theta^0 = -\mathcal{O}. \quad (8.22)$$

Außer \mathcal{E} hat auch θ^0 eine positive Parität, während \mathcal{O} eine negative Parität besitzt.

Die letzten beiden Gleichungen kann man auch in der Form

$$\{ \theta^0, \mathcal{O} \} *_{\mathcal{P}} = 0 \quad \text{und} \quad [\theta^0, \mathcal{E}] *_{\mathcal{P}} = 0 \quad (8.23)$$

angeben.

Wir wollen nun demonstrieren, wie ein Operator mit negativer Parität auf die Energieprojektoren aus (8.11) wirkt, wobei wir uns ins Ruhesystem des Teilchens mit $\mathbf{p} = 0$ begeben:

$$\pi_{\pm E}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} (1 \pm \theta^0) \quad \text{mit} \quad E_{\pm} = \pm mc^2. \quad (8.24)$$

Es sei eine Funktion \mathcal{C} gegeben, die die Eigenschaften

$$\mathcal{C} *_S \mathcal{C} = 1 \quad \text{und} \quad \{\mathcal{C}, \theta^0\}_{*_S} = 0 \quad (8.25)$$

besitzt. Die zweite Gleichung besagt, daß es sich hier um eine Größe mit negativer Parität handelt. Wie die Gleichung

$$\mathcal{C} *_S \pi_{\pm E}^D *_S \mathcal{C} = \mathcal{C} *_P \frac{1}{2} (1 \pm \theta^0) *_P \mathcal{C} = \frac{1}{2} (1 \mp \theta^0) = \pi_{\mp E}^D \quad (8.26)$$

zeigt, bewirkt die Größe \mathcal{C} einen Übergang zwischen Zuständen mit negativer und positiver Energie.

In einer nicht-relativistischen Näherung dürfen solche Prozesse nicht stattfinden, so daß die Hamilton-Funktion eine positive Parität haben muß. Ziel einer Transformation, die eine nicht-relativistische Näherung ermöglicht, muß es also sein, den Anteil der Hamilton-Funktion mit negativer Parität vernachlässigbar klein zu machen.

Im folgenden betrachten wir den nicht-relativistischen Grenzfall, daß die Lichtgeschwindigkeit c groß gegenüber allen anderen auftretenden Größen ist. Den größten Beitrag zur Funktion \mathcal{H} aus (8.20) liefert daher der Term θ^0 , der dem Masseterm mc^2 in der Hamilton-Funktion H_D entspricht. Die in (8.21) angegebenen Terme \mathcal{E} und \mathcal{O} sind von der Ordnung 2 bzw. 1 in dem Entwicklungsparameter $1/c$. Da \mathcal{O} eine negative Parität besitzt, muß dieser Beitrag zu \mathcal{H} minimiert werden.

Bemerkung: In der Dirac-Darstellung als 4×4 -Matrizen ist ein Operator mit positiver Parität von der Form

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (8.27a)$$

und ein Operator mit negativer Parität hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.27b)$$

wobei $*$ hier jeweils für eine 2×2 -Matrix mit beliebigen Einträgen steht. Eine Matrix wie in (8.27a) nennt man auch *gerade* und eine Matrix mit der in (8.27b) angegebenen Form *ungerade*. Offensichtlich läßt sich jede Matrix als Summe eines geraden und eines ungeraden Anteils schreiben. Ungerade Operatoren bewirken Übergänge zwischen Spinoren mit positiver und negativer Energie, so daß sie in einer nicht-relativistischen Näherung nicht auftreten dürfen.

8.2.2. Eine unitäre Transformation

Die *Foldy-Wouthuysen-Transformation* [FW1950] ist eine unitäre Transformation, die gerade so gewählt ist, daß der Beitrag zu \mathcal{H} mit negativer Parität in der nicht-relativistischen Näherung kleiner wird, d. h. daß seine Ordnung in dem Entwicklungsparameter $1/c$ zunimmt¹. Durch Wiederholung dieser Transformation kann man die Ordnung sukzessive erhöhen.

Zunächst betrachten wir den unitär transformierten Projektor

$$\pi' = U *_S \pi *_S \bar{U} \quad \text{mit} \quad U = e_{*_S}^{iR}, \quad (8.28)$$

wobei R eine reelle² Funktion ist, die auch von der Zeit abhängen kann. Analog zu (1.80) lautet die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \pi}{\partial t} = [H, \pi]_{*_S} = H *_S \pi - \pi *_S H. \quad (8.29)$$

¹Hier wurde gegenüber [FW1950] ein anderer Entwicklungsparameter gewählt (vgl. Fußnote auf Seite 34 von [FW1950]).

²Es sei daran erinnert, daß der zur reellen Funktion R gehörende Operator $\varrho_{\text{Dirac}}(R)$ hermitesch ist.

Sie soll nun für den Projektor π' umgeschrieben werden.

Durch Einsetzen von

$$\partial_t \pi = \partial_t (\bar{U} *_S \pi' *_S U) = (\partial_t \bar{U}) *_S \pi' *_S U + \bar{U} *_S (\partial_t \pi') *_S U + \bar{U} *_S \pi' *_S (\partial_t U) \quad (8.30)$$

in (8.29) erhalten wir

$$\bar{U} *_S (i\hbar \partial_t \pi') *_S U = (H *_S \bar{U} - (i\hbar \vec{\partial}_t) \bar{U}) *_S \pi' *_S U - \bar{U} *_S \pi' *_S (U *_S H + U (i\hbar \vec{\partial}_t)). \quad (8.31)$$

In der zu (8.29) analogen Form lautet diese Gleichung

$$i\hbar \partial_t \pi' = [H', \pi']_{*_S} \quad \text{mit} \quad H' = U *_S (H - i\hbar \partial_t) *_S \bar{U}. \quad (8.32)$$

Die hier für die Hamilton-Funktion angegebene Transformation ist auf die dimensionslose Größe \mathcal{H} aus (8.20) übertragbar, so daß wir schließlich

$$\mathcal{H}' = \frac{H'}{mc^2} = e_{*_S}^{+iR} *_S \left(\mathcal{H} - \frac{i\hbar}{mc^2} \partial_t \right) *_S e_{*_S}^{-iR} \quad (8.33)$$

erhalten. Auch diese Größe läßt sich wie in (8.20) in zwei Teile mit verschiedener Parität zerlegen, so daß man die Transformation auf analoge Weise wiederholen kann.

8.2.3. Die Foldy-Wouthuysen-Transformation

Nun ist noch R so zu wählen, daß \mathcal{O} tatsächlich durch einen anderen Term \mathcal{O}' mit negativer Parität ersetzt wird, der eine höhere Ordnung in $1/c$ hat als \mathcal{O} . Der üblichen Foldy-Wouthuysen-Transformation [FW1950] entsprechend wählen wir

$$iR = \frac{\theta^0}{2} *_P \mathcal{O}. \quad (8.34)$$

Da \mathcal{O} und θ^0 reell sind und miteinander antikommutieren, ist R gemäß Gleichung (4.35) ebenfalls reell. Daraus folgt, daß die Funktion $U = e_{*_S}^{iR}$ unitär ist.

Die Größe \mathcal{H}' aus (8.33) werden wir nun mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Gleichung bestimmen. Dabei betrachten wir nur die Entwicklung bis zur Ordnung $(1/c)^4$, so daß es uns genügt, die Ordnung des Terms mit ungerader Parität auf wenigstens $(1/c)^5$ zu steigern. Da iR genau wie \mathcal{O} aus (8.21) von der Ordnung $1/c$ ist, muß man in der Entwicklung von \mathcal{H}' in unsere Näherung nur endlich viele Terme berücksichtigen. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \mathcal{H} + [iR, \mathcal{H}]_{*_S} + \frac{1}{2} [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*_S}]_{*_S} + \frac{1}{3!} [iR, [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*_S}]_{*_S}]_{*_S} \\ &\quad + \frac{1}{4!} [iR, [iR, [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*_S}]_{*_S}]_{*_S}]_{*_S} - \frac{\hbar}{mc^2} \dot{R} - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{mc^2} [iR, \dot{R}]_{*_S} + \dots, \end{aligned} \quad (8.35)$$

wobei sich die letzten beiden Terme aus der Rechnung

$$e_{*_S}^{iR} *_S i\partial_t *_S e_{*_S}^{-iR} = i\partial_t 1 + [iR, i\partial_t]_{*_S} + \frac{1}{2} [iR, [iR, i\partial_t]_{*_S}]_{*_S} + \dots = \dot{R} + \frac{1}{2} [iR, \dot{R}]_{*_S} + \dots \quad (8.36)$$

ergeben.

In Anhang C.5 wird gezeigt, daß sich die Gleichung (8.35) zu

$$\mathcal{H}' = \theta^0 + \mathcal{E}' + \mathcal{O}' \quad (8.37a)$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} + \theta^0 *_P \left(\frac{1}{2} \mathcal{O}^{2*_S} - \frac{1}{8} \mathcal{O}^{4*_S} \right) - \frac{1}{8} \left[\mathcal{O}, \left([\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} + \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\mathcal{O}} \right) \right]_{*_S} \quad (8.37b)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{O}' = \frac{1}{2} \theta^0 *_P [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} - \frac{1}{3} \mathcal{O}^{3*_S} + \frac{i\hbar}{2mc^2} \theta^0 *_P \dot{\mathcal{O}} \quad (8.37c)$$

vereinfachen läßt. Wie in (8.20) wurde \mathcal{H}' in einen Teil $\theta^0 + \mathcal{E}'$ mit positiver Parität und einen Teil \mathcal{O}' mit negativer Parität aufgespalten. Die reelle Funktion iR haben wir gerade so gewählt, daß der Term \mathcal{O} in der transformierten Funktion \mathcal{H}' nicht mehr erscheint. An die Stelle von \mathcal{O} tritt die Größe \mathcal{O}' , die von der Ordnung $(1/c)^3$ ist und somit um zwei Ordnungen kleiner als \mathcal{O} . Die Funktion \mathcal{E}' mit positiver Parität hat genau wie \mathcal{E} die Ordnung $(1/c)^2$.

Da jetzt die gleiche Situation vorliegt wie mit \mathcal{H} in (8.20), können wir die Transformation mit \mathcal{H}' wiederholen, um die Ordnung des Terms mit negativer Parität weiter zu erhöhen. Dazu müssen wir lediglich \mathcal{E} , \mathcal{O} durch die entsprechenden gestrichenen Größen ersetzen. Anhand der Gleichungen (8.37b) und (8.37c) kann man sich leicht davon überzeugen, daß nach einer zweiten Transformation lediglich

$$\mathcal{H}'' = \theta^0 + \mathcal{E}'' + \mathcal{O}'' \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}'' = \mathcal{E}' \quad \text{und} \quad \mathcal{O}'' = 0 \quad (8.38)$$

übrigbleibt, wenn man nur Terme bis zur Ordnung $(1/c)^4$ behält. Mit \mathcal{E}' aus Gleichung (8.37b) erhalten wir daher das Ergebnis

$$\mathcal{H}'' = \frac{H''}{mc^2} = \theta^0 *_{\mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{2} \mathcal{O}^{2*s} - \frac{1}{8} \mathcal{O}^{4*s} \right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8} \left[\mathcal{O}, \left([\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*s} + \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\mathcal{O}} \right) \right]_{*s}, \quad (8.39)$$

wobei diese Größe ausschließlich aus Termen mit positiver Parität besteht.

Bemerkung: Man beachte, daß bisher nur die Ordnung und die Parität der Größen \mathcal{E} und \mathcal{O} benutzt wurde. Da man jede Funktion in zwei Teile mit verschiedener Parität aufspalten kann, ist das Verfahren tatsächlich auch auf andere Systeme anwendbar. Außerdem läßt es sich neben der Parität auch für andere Abbildung benutzen, deren doppelte Anwendung der Identität entspricht.

8.2.4. Anwendung auf ein Teilchen im elektromagnetischen Feld

Von der allgemeinen Transformation kommen wir nun wieder zum konkreten System des Teilchens im elektromagnetischen Feld zurück. Dazu bestimmen wir Gleichung (8.39) mit den Größen \mathcal{E} und \mathcal{O} aus (8.21).

Im folgenden werden wir häufiger

$$[p_i, f]_{*s} = [p_i, f]_{*M} = -i\hbar \partial_{q_i} f \quad \text{und} \quad \{p_i, f\}_{*s} = \{p_i, f\}_{*M} = 2p^i f \quad (8.40)$$

benutzen, wobei man diese Gleichungen leicht mit Hilfe des Moyal-Produkts (8.5) beweisen kann.

Durch Anwendung der ersten Gleichung aus (8.40) folgt

$$[\mathcal{O}, \mathcal{E}] + \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\mathcal{O}} = \frac{e}{m^2 c^3} \boldsymbol{\theta} \cdot [\mathbf{p}, \varphi]_{*s} - i \frac{e\hbar}{m^2 c^4} \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\mathbf{A}} = i \frac{e\hbar}{m^2 c^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \right) = i \frac{e\hbar}{m^2 c^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.41)$$

Mit diesem Ergebnis können wir den letzten Term aus (8.39) bestimmen, der proportional zu

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{O}, \left([\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*s} + \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\mathcal{O}} \right) \right]_{*s} &= \frac{ie\hbar}{m^3 c^4} [\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{E}]_{*s} \\ &= \frac{ie\hbar}{m^3 c^4} \frac{1}{2} \left([\theta^i, \theta^j]_{*P} \{p^i, E^j\}_{*M} + \{\theta^i, \theta^j\}_{*P} [p^i, E^j]_{*M} \right) \\ &= \frac{ie\hbar}{m^3 c^4} \left(i\epsilon_{ijk} \sigma^k 2p^i E^j - \delta^{ij} i\hbar \partial_{q_i} E^j \right) \\ &= \frac{2e\hbar}{m^3 c^4} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) + \frac{e\hbar^2}{m^3 c^4} \operatorname{div} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (8.42)$$

ist. Hier wurde neben (8.40) noch die Gleichung

$$\theta^i *_{\mathcal{P}} \theta^j = i\epsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \quad (8.43)$$

aus (8.7) und die Tensorregel (4.59) benutzt.

Um die in \mathcal{H}'' enthaltene Größe \mathcal{O}^{2*s} zu bestimmen, verwenden wir in der folgenden Rechnung erneut die Definition $P^i = p^i - eA^i/c$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}^{2*s} &= \frac{1}{m^2 c^2} ((\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P}) *_S (\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P})) \\
 &= \frac{1}{m^2 c^2} \left(\delta_{ij} (P^i *_M P^j) + i\epsilon_{ijk} \sigma^i (P^j *_M P^k) \right) \\
 &= \frac{1}{m^2 c^2} \left(\mathbf{P} *_M \mathbf{P} - i\epsilon_{ijk} \sigma^i \frac{e}{c} [p^j, A^k] *_M \right) \\
 &= \frac{1}{m^2 c^2} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^{2*_M} - \frac{e\hbar}{m^2 c^3} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}.
 \end{aligned} \tag{8.44}$$

Diese Gleichung benutzen wir als Grundlage zur Berechnung von \mathcal{O}^{4*s} :

$$\mathcal{O}^{4*s} = \frac{1}{m^4 c^4} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^{4*_M} = \frac{\mathbf{p}^4}{m^4 c^4}, \tag{8.45}$$

wobei das Ergebnis nur bis zur Ordnung $(1/c)^4$ angegeben wurde.

Die Zwischenergebnisse (8.42), (8.44) und (8.45) können in \mathcal{H}'' aus (8.39) eingesetzt werden, wobei wir durch Multiplikation mit mc^2 schließlich folgende Hamilton-Funktion erhalten:

$$\begin{aligned}
 H'' &= \theta^0 \left(mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^{2*_M} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3 c^2} \right) - \frac{e\hbar}{2mc} \theta^0 *_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + e\varphi \\
 &\quad - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \operatorname{div} \mathbf{E}.
 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Vernachlässigt man Terme der Ordnung $(1/c)^2$, dann erhält man – bis auf den zusätzlichen Faktor θ^0 und den konstanten Term mc^2 – das gleiche Resultat, das auch die minimale Substitution von $H = \mathbf{p}^2/2m$ liefert (vgl. Unterabschnitt 6.1.3). Bei den Termen proportional zu $(1/c)^2$ handelt es sich daher um relativistische Korrekturen.

8.2.5. Operatordarstellung

Um Gleichung (8.46) mit den bekannten Ergebnissen im Operatorformalismus vergleichen zu können, müssen wir die Weyl-Dirac-Abbildung darauf anwenden. Dazu wiederholen wir die Definition

$$\varrho_{\text{Weyl-Dirac}}(f(\theta) b(p, q)) = \varrho_{\text{Dirac}}(f(\theta)) \varrho_{\text{Weyl}}(b(p, q)) \tag{8.47}$$

aus Gleichung (7.71). Die wesentlichen Abbildungsvorschriften für ϱ_{Dirac} haben wir bereits in (7.70) bzw. (8.2) angegeben. Da es sich bei ϱ_{Dirac} um eine Abbildung auf die 4×4 -Matrizen handelt, wird σ^i nicht auf $\hat{\sigma}^i = \varrho_{\text{Pauli}}(\sigma^i)$ abgebildet, sondern es gilt

$$\varrho_{\text{Dirac}}(\sigma^i) = \hat{\Sigma}^i = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^i \end{pmatrix}. \tag{8.48}$$

Die Wirkung der Weyl-Abbildung wird durch Gleichung (1.17) festgelegt, wobei wir in diesem Kontext den Spezialfall

$$\varrho_{\text{Weyl}}(f(q)p) = \frac{1}{2} (f(\hat{q})\hat{p} + \hat{p}f(\hat{q})) \tag{8.49}$$

benötigen werden.

In der Berechnung von $\varrho_{\text{Weyl-Dirac}}(H'')$ muß nur solchen Termen Beachtung geschenkt werden, in denen gewöhnliche Produkte von Orts- und Impuls-Variablen gemeinsam auftreten. Dies ist

lediglich bei dem Term proportional zu $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})$ der Fall, da \mathbf{E} eine Funktion von \mathbf{q} ist. Aus den Gleichungen (8.47) und (8.49) folgt

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{Weyl-Dirac}}(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{q}) \times \mathbf{p})) &= \epsilon_{ijk} \varrho_{\text{Dirac}}(\sigma^i) \varrho_{\text{Weyl}}(E^j(\mathbf{q}) p^k) \\ &= \epsilon_{ijk} \hat{\Sigma}^i \frac{1}{2} (E^j(\hat{\mathbf{q}}) \hat{p}^k + \hat{p}^k E^j(\hat{\mathbf{q}})) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}}) \times \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{E}(\hat{\mathbf{q}})). \end{aligned} \quad (8.50)$$

Wir betrachten nun die Ortsraumdarstellung mit $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ und $\hat{\mathbf{p}} = \hbar \nabla / i$. Im letzten Term von (8.50) wirkt der Operator $\hat{\mathbf{p}}$ sowohl auf $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ als auch auf darauf folgende Funktionen. Daher erhalten wir schließlich

$$\varrho_{\text{Weyl-Dirac}}(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})) = \hat{\Sigma} \cdot \left(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}} + \frac{i\hbar}{2} \text{rot } \mathbf{E} \right). \quad (8.51)$$

Mit Hilfe von Gleichung (8.51) können wir nun die Hamilton-Funktion (8.46) in der Operator-darstellung $\hat{H}'' = \varrho_{\text{Weyl-Dirac}}(H'')$ angeben:

$$\begin{aligned} \hat{H}'' &= \hat{\beta} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^{2*} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^4}{8m^3 c^2} \right) - \frac{e\hbar}{2mc} \hat{\beta} \hat{\Sigma} \cdot \mathbf{B} + e\varphi \\ &\quad - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \hat{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{p}}) - \frac{ie\hbar^2}{8m^2 c^2} \hat{\Sigma} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \text{div } \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (8.52)$$

was mit dem bekannten Ergebnis aus [BD1964, Seite 62] übereinstimmt.

Durch den Vergleich mit der Hamilton-Funktion der Pauli-Theorie (6.5), die durch minimale Substitution von $\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2 / 2m$ gewonnen wurde, kann man die relativistischen Korrekturen identifizieren. Der Term der Ordnung p^4 ist die relativistische Korrektur der kinetischen Energie und der Term proportional zu $\text{div } \mathbf{E}$ ist als Darwin-Term bekannt. Die beiden verbleibenden Terme mit \mathbf{E} enthalten die Spin-Bahn-Energie. Nur zusammen ergeben sie einen hermiteschen Beitrag zum Hamilton-Operator \hat{H}'' .

8.3. Kovariante Projektoren

In diesem Abschnitt leiten wir die manifest kovarianten Formen der Energie- und Spin-Projektoren ab, die in Abschnitt 8.1 angegeben wurden. Dabei nutzen wir die Tatsache aus, daß es zwischen der kovarianten und der nicht-kovarianten Beschreibung im Ruhesystem mit $\mathbf{p} = 0$ keinen Unterschied gibt. Die kovarianten Projektoren können mit Hilfe des Lorentz-Boosts bestimmt werden, der in Kapitel 7 eingehend beschrieben wurde.

8.3.1. Energieprojektoren

Zunächst schreiben wir die Gleichung (8.12) für den Fall $\mathbf{p} = 0$ in der Form

$$(H_D \mp E) *_S \pi_{\pm E}^D(\mathbf{0}) = (\theta^0 mc \mp mc) *_P \pi_{\pm E}^D(\mathbf{0}) = 0, \quad (8.53)$$

wobei die Definitionen (8.3) und (8.9) verwendet wurden. Die Lorentz-Transformationen für γ^μ ist in Gleichung (7.77) zu finden:

$$\mathcal{T}(\gamma^\mu) = T^{-1} *_P \gamma^\mu *_P T = L^\mu_\nu \gamma^\nu. \quad (8.54)$$

Diese Transformation können wir auf die Sterneigenwertgleichung (8.53) anwenden, so daß sich

$$T^{-1} *_P (\theta^0 mc \mp mc) *_P \pi_{\pm E}^D(\mathbf{0}) *_P T = (T^{-1} *_P \theta^0 mc *_P T \mp mc) *_P T^{-1} *_P \pi_{\pm E}^D(\mathbf{0}) *_P T = 0 \quad (8.55)$$

ergibt.

Es wird hier ein reiner Boost ohne Drehung betrachtet. Um $T^{-1} *_P \theta^0 mc *_P T$ zu bestimmen, rufen wir uns in Erinnerung, daß Gleichung (8.54) eine passive Transformation von γ^μ darstellt. Der Lorentz-Boost von $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$ gemäß (8.54) entspricht daher einem aktiven Lorentz-Boost des Vierervektors p^μ . Da $mc\gamma^0$ gerade \not{p} für das Ruhesystem ist, folgt daraus

$$T^{-1} *_P mc\gamma^0 *_P T = \not{p}, \quad (8.56)$$

so daß wir Gleichung (8.55) auf folgende Weise umformen können:

$$(\not{p} \mp mc) *_P \pi_{\pm m}^D(p) = 0 \quad \text{mit} \quad \pi_{\pm m}^D(p) = T^{-1} *_P \pi_{\pm E}^D(\mathbf{0}) *_P T. \quad (8.57)$$

Dies ist gerade die Dirac-Gleichung im Sternproduktformalismus.

Bei der Funktion $\pi_{\pm m}^D(p)$ aus (8.57) handelt es sich um den kovarianten Projektor, der sich explizit bestimmen läßt, indem wir $\pi_{\pm E}^D(\mathbf{0})$ aus (8.24) berücksichtigen:

$$\pi_{\pm m}^D(p) = T^{-1} *_P \frac{1}{2} (1 \pm \theta^0) *_P T = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\not{p}}{mc} \right) = \frac{\pm \not{p} + mc}{2mc}. \quad (8.58)$$

Diese Projektoren korrespondieren zu den bekannten Energieprojektoren aus der herkömmlichen Dirac-Theorie.

8.3.2. Spin-Projektoren

Um die Spin-Observable aus Gleichung (8.14) in eine kovariante Schreibweise zu bringen, nehmen wir an, daß \mathbf{u} der räumliche Teil eines Vierervektors u^μ ist, dessen Komponente u^0 im Ruhesystem verschwindet. In diesem Fall erhält man im Ruhesystem

$$S_u = \frac{\hbar}{2} \gamma^5 *_P (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{u}) = -\frac{\hbar}{2} \gamma^5 *_P \not{u}, \quad (8.59)$$

wobei die rechte Seite die kovariante Verallgemeinerung der Spin-Observablen (8.14) ist. Durch einen Lorentz-Boost wie in Gleichung (8.54) kann u^0 nun auch von Null verschiedene Werte annehmen.

Die kovariante Form der Bedingung $\mathbf{u}^2 = 1$ lautet

$$u^\mu u_\mu = -1. \quad (8.60)$$

Damit gilt wie zuvor

$$S_u *_P S_u = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 \gamma^5 *_P \not{u} *_P \gamma^5 *_P \not{u} = - \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 u^\mu u^\nu \frac{1}{2} \{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} *_P = \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2. \quad (8.61)$$

Mit S_u aus (8.59) gehen die Spin-Projektoren (8.18) nun über zur kovarianten Darstellung

$$\pi_{\pm s}^S(u) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{2}{\hbar} S_u \right) = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5 *_P \not{u}). \quad (8.62)$$

Dies entspricht ebenfalls dem bekannten Ergebnis aus der Dirac-Theorie. Um zu gewährleisten, daß diese Projektoren mit den Energieprojektoren (8.58) kommutieren, ändern wir die Orthogonalitätsbedingung $\mathbf{u} \cdot \mathbf{p} = 0$ in

$$u^\mu p_\mu = 0 \quad (8.63)$$

ab. Daraus folgt

$$[\gamma^5 *_P \not{u}, \not{p}] *_P = \gamma^5 *_P \{ \not{u}, \not{p} \} *_P = \gamma^5 u^\mu p_\mu = 0. \quad (8.64)$$

Auf Grund von Gleichung (8.61) erfüllen die kovarianten Spin-Projektoren die Sterneigenwertgleichung

$$S_u *_P \pi_{\pm s}^S(u) = \pm \frac{\hbar}{2} \pi_{\pm s}^S(u). \quad (8.65)$$

Dieses Ergebnis mit der Observablen (8.59) und den Projektoren (8.62) ergibt sich auch direkt aus (8.18), indem man die Lorentz-Transformation (8.54) anwendet.

Mit dem Energie- und dem Spin-Projektor kann man das Produkt

$$\pi_{\pm m, \pm s}^{\text{DS}}(p, u) = \pi_{\pm m}^{\text{D}}(p) *_P \pi_{\pm s}^{\text{S}}(u) \quad (8.66)$$

bilden, wobei die beiden Vorzeichen in $\pm m$ und $\pm s$ unabhängig voneinander gewählt werden können. Aus der Kommutatorrelation (8.64) können wir zwei Eigenschaften der Funktionen $\pi_{\pm m, \pm s}^{\text{DS}}$ folgern: Einerseits besitzt diese Funktion genau wie ihre Faktoren Projekteigenschaften und andererseits erfüllen die vier Projektoren $\pi_{\pm m, \pm s}^{\text{DS}}$ sowohl die Sterneigenwertgleichung (8.57) als auch (8.65). In diesem Sinne entsprechen sie den Viererspinoren u und v aus der Dirac-Theorie.

Fazit

Im ersten Teil dieser Arbeit sahen wir, daß die Wigner-Funktionen eine Formulierung der Quantenmechanik auf dem Phasenraum ermöglichen, die stetig in die klassische Mechanik übergeht, wenn \hbar gegen Null strebt. Der harmonische Oszillator wurde betrachtet, um einige Methoden der Deformationsquantisierung anhand eines expliziten Beispiels zu illustrieren. Bei der Rechnung hat sich das umbrale Kalkül als nützlich erwiesen. Darauf basierend wurde bei der Diskussion des Landau-Problems gezeigt, daß die minimale Substitution in der Hamilton-Funktion durch eine Modifikation des Moyal-Produkts ersetzt werden kann.

Die Deformationsquantisierung konnte im zweiten Teil erfolgreich auf Grassmann-Variablen erweitert werden, was zu den Definitionen des Super-Moyal-Produkts und der Super-Moyal-Klammer führte. Durch die Deformation der Grassmann-Algebra ergab sich eine Clifford-Algebra, so daß wir diesen Übergang „Cliffordisierung“ genannt haben. Die Cliffordisierung entspricht dem Wechsel von der pseudoklassischen Mechanik zur fermionischen Quantenmechanik.

Mit dem Super-Moyal-Produkt ließ sich eine Bewegungsgleichung angeben, die die fermionischen Freiheitsgrade beschreibt, wie am Beispiel des fermionischen Oszillators demonstriert werden konnte. Kombiniert mit den Ergebnissen zu den Landau-Niveaus waren wir in Lage, den Feynman-Trick anzuwenden, um den Spin eines Teilchens im homogenen Magnetfeld im Rahmen der Pauli-Theorie zu berücksichtigen.

Es wurde gezeigt, daß die Grassmann-Algebra mit der Super-Moyal-Klammer zu einer graduerten Lie-Algebra wird, die sich auf den bosonischen Phasenraum erweitern ließ. Damit war die formale Grundlage geschaffen, um einige Aspekte der supersymmetrischen Quantenmechanik zu diskutieren, wie wir am Beispiel des supersymmetrischen Oszillators gesehen haben. Mit diesen Ergebnissen konnte schließlich die Supersymmetrie des Landau-Problems für ein Teilchen mit Spin offenbart werden.

Mit Hilfe der deformierten Grassmann-Algebra ist es uns im dritten Teil dieser Arbeit gelungen, Lorentz-Transformationen darzustellen. Dies wurde benutzt, um im letzten Kapitel eine manifest kovariante Version der Dirac-Theorie herzuleiten, die zur üblichen Formulierung äquivalent ist. Im Hamilton-Formalismus konnten wir außerdem die Foldy-Wouthuysen-Transformation anwenden, um die niedrigsten relativistischen Korrekturen zur Pauli-Theorie zu bestimmen. Mit der zuvor definierten Weyl-Dirac-Abbildung haben wir das bekannte Ergebnis des Operatorformalismus reproduziert.

Im Kontrast zur kanonischen Quantisierung erlaubt die Deformationsquantisierung einen intuitiveren Zugang zur Quantenmechanik. In dieser Arbeit konnte das Anwendungsspektrum dieser Quantisierungsmethode und der hier diskutierten fermionischen Erweiterung allerdings nur angedeutet werden. Die Behandlung der Quantenfeldtheorie in Rahmen der Deformationsquantisierung ist ebenfalls möglich, wobei hier auf [HH2002c] verwiesen werden soll.

Anhang

Kapitelverzeichnis

A. Anhang zur bosonischen Deformationsquantisierung	95
B. Anhang zur fermionischen Deformationsquantisierung	101
C. Anhang zu Gruppen und deren Anwendungen	105

A. Anhang zur bosonischen Deformationsquantisierung

In diesem Anhang werden einige Nebenrechnungen zu den ersten drei Kapiteln angegeben, in denen die bosonische Deformationsquantisierung behandelt wird.

Zunächst wird der Weyl-Isomorphismus an einem einfachen Beispiel demonstriert. Im zweiten Abschnitt soll die Assoziativität des Moyal-Produkts im Fall eines zweidimensionalen Phasenraums bewiesen werden, wobei die Integraldarstellung des Moyal-Produkts verwendet wird. Im anschließenden Abschnitt ist eine Nebenrechnung zu finden, die für die Herleitung der Bewegungsgleichung benötigt wird. Der vierte Teil dient zur Bestimmung der Unschärferelation.

Während sich die ersten vier Abschnitte auf das Kapitel 1 beziehen, wird im fünften Abschnitt eine Rechnung präsentiert, die für Kapitel 3 relevant ist. Dieser Abschnitt dient der Transformation des Moyal-Produkts auf Koordinaten, die sich in der Behandlung des Landau-Problems als nützlich erweisen.

A.1. Ein Beispiel für den Weyl-Isomorphismus

Als einfaches Beispiel für die Gültigkeit von (1.42) soll

$$\varrho_{\text{Weyl}}(qp * p) = \varrho_{\text{Weyl}}(qp) \varrho_{\text{Weyl}}(p) \quad (\text{A.1})$$

mit Hilfe der Gleichung (1.12) in der Form $\hat{p}\hat{q} = \hat{q}\hat{p} - i\hbar$ überprüft werden.

Mit

$$qp * p = qp \left\{ 1 + \frac{i\hbar}{2} (\vec{\partial}_q \vec{\partial}_p - \vec{\partial}_p \vec{\partial}_q) \right\} p = qp^2 + \frac{i\hbar}{2} p \quad (\text{A.2})$$

und (1.13) erhält man für die linke Seite

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{Weyl}}(qp * p) &= \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\hat{q}) + \frac{i\hbar}{2} \hat{p} = \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p}^2 + \hat{p}\hat{q}\hat{p} - i\hbar\hat{p}) + \frac{i\hbar}{2} \hat{p} \\ &= \frac{1}{2} (2\hat{q}\hat{p}^2 - 2i\hbar\hat{p}) + \frac{i\hbar}{2} \hat{p} = \hat{q}\hat{p}^2 - \frac{i\hbar}{2} \hat{p}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

was identisch ist mit dem Ergebnis der Rechnung

$$\varrho_{\text{Weyl}}(qp) \varrho_{\text{Weyl}}(p) = \frac{1}{2} (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) \hat{p} = \frac{1}{2} (2\hat{q}\hat{p} - i\hbar) \hat{p} = \hat{q}\hat{p}^2 - \frac{i\hbar}{2} \hat{p} \quad (\text{A.4})$$

für die rechte Seite. Somit ist Gleichung (A.1) bewiesen.

A.2. Assoziativität des Moyal-Produkts

Laut Gleichung (1.53) kann man das Moyal-Produkt als

$$f * g = \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')\right) \quad (\text{A.5})$$

schreiben, wobei die Definition

$$2A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') = p(q'' - q') + p'(q - q'') + p''(q' - q) \quad (\text{A.6})$$

aus (1.52) zu entnehmen ist. Mit Hilfe dieser Gleichungen soll nun das dreifache Moyal-Produkt berechnet werden.

Durch wiederholte Anwendung von (A.5) findet man:

$$\begin{aligned}
(f * g) * h &= \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int d\tilde{q} dq''' d\tilde{p} dp''' (f * g)(\tilde{q}, \tilde{p}) h(q''', p''') \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}''')\right) \\
&= \frac{1}{\hbar^4 \pi^4} \int dq' dq'' dq''' d\tilde{q} dp' dp'' dp''' d\tilde{p} f(q', p') g(q'', p'') h(q''', p''') \\
&\quad \times \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'')\right) \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}''')\right) \\
&= \frac{1}{\hbar^4 \pi^4} \int dq' dq'' dq''' dp' dp'' dp''' f(q', p') g(q'', p'') h(q''', p''') \\
&\quad \times \int d\tilde{q} d\tilde{p} \exp\left(\frac{4i}{\hbar} (A(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') + A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'''))\right). \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Um die Integration über \tilde{q} und \tilde{p} ausführen zu können, muß man das Argument der Exponentialfunktion mit Gleichung (A.6) explizit als

$$\begin{aligned}
2(A(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') + A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}''')) &= \tilde{p} (q'' - q') + p' (\tilde{q} - q'') + p'' (q' - \tilde{q}) \\
&\quad + p (q''' - \tilde{q}) + \tilde{p} (q - q''') + p''' (\tilde{q} - q) \\
&= \tilde{q} (-p + p' - p'' + p''') + \tilde{p} (q - q' + q'' - q''') \\
&\quad + p' q'' + p'' q' + p q''' - p''' q \tag{A.8}
\end{aligned}$$

schreiben. Mit der bekannten Gleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixt) dt = 2\pi\delta(x)$ erhält man daher

$$\begin{aligned}
&\int d\tilde{q} d\tilde{p} \exp\left(\frac{4i}{\hbar} (A(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'') + A(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}'''))\right) \\
&= \exp\left(\frac{2i}{\hbar} (p' q'' + p'' q' + p q''' - p''' q)\right) \\
&\quad \times \int d\tilde{q} d\tilde{p} \exp\left(\frac{2i}{\hbar} (\tilde{q} (-p + p' - p'' + p''') + \tilde{p} (q - q' + q'' - q'''))\right) \\
&= \exp\left(\frac{2i}{\hbar} (p' q'' + p'' q' + p q''' - p''' q)\right) \pi^2 \hbar^2 \delta(p - p' + p'' - p''') \delta(q - q' + q'' - q'''). \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Aus den Argumenten der δ -Funktionen ließt man die Bedingungen

$$p = p' - p'' + p''' \quad \text{und} \quad q = q' - q'' + q''' \tag{A.10}$$

ab, so daß sich

$$\begin{aligned}
p' q'' + p'' q' + p q''' - p''' q &= p' q'' + p'' q' + (p' - p'') q''' - p''' (q' - q'') \\
&= p' (q'' - q''') + p'' (q' - q''') + p''' (q'' - q') \\
&= 2A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''') \tag{A.11}
\end{aligned}$$

ergibt. Die Gleichungen (A.11) und (A.9) können schließlich in (A.7) eingesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned}
(f * g) * h &= \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq' dq'' dq''' dp' dp'' dp''' f(q', p') g(q'', p'') h(q''', p''') \\
&\quad \delta(p - p' + p'' - p''') \delta(q - q' + q'' - q''') \exp\left(\frac{4i}{\hbar} A(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')\right). \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Da auf der rechten Seite kein Bezug mehr auf die Klammerung der linken Seite genommen wird, folgt aus dieser Gleichung die Assoziativität des Moyal-Produkts.

A.3. Umformung eines Integrals

Ziel dieses Anhangs ist es, die rechte Seite der Bewegungsgleichung (1.77)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \pi(q, p; t) = \int dy \langle q - y/2 | [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} \quad (\text{A.13})$$

umzuformen, so daß die Wigner-Funktion $\pi(q, p; t)$ explizit auftritt. Im der folgenden Rechnung wird nur der erste Term betrachtet, da sich das Ergebnis für den zweiten Term daraus auch ohne erneute Rechnung schließen läßt.

Zunächst findet der Wechsel in die Ortsraumdarstellung statt:

$$\begin{aligned} & \int dy \langle q - y/2 | \hat{H}(t) \hat{\rho}(t) | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} \\ &= \int dy dq' \langle q - y/2 | \hat{H}(t) | q' \rangle \langle q' | \psi, t \rangle \langle \psi, t | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} \\ &= \int dy \left(\int dq' \delta(q - y/2 - q') H(q', \frac{\hbar}{i} \partial_{q'}; t) \psi(q', t) \right) \bar{\psi}(q + y/2, t) e^{ipy/\hbar} \\ &= \int dy (H(q - y/2, i\hbar \partial_y - i\hbar \partial_q/2; t) \psi(q - y/2, t) \bar{\psi}(q + y/2, t)) e^{ipy/\hbar}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Man beachte, daß die Ableitung $\partial_{q'} = \frac{1}{2} \partial_q - \partial_y$ nicht auf $\bar{\psi}(q + y/2, t)$ wirkt.

Es muß versucht werden, die Hamilton-Funktion H aus dem Integral zu entfernen. Durch wiederholte partielle Integration erhält man für eine Funktion $g(y)$ mit $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} g(y) = 0$ die Gleichung

$$\int dy (f(i\hbar \partial_y) g(y)) e^{ipy/\hbar} = \int dy f(p) g(y) e^{ipy/\hbar}. \quad (\text{A.15})$$

Da die Hamilton-Funktion ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Form $H = p^2/2m + V(q; t)$ hat, kann man das Integral in Gleichung (A.14) in zwei Terme aufteilen. Da die y -Abhängigkeit nur im Potentialterm auftritt, läßt sich Gleichung (A.15) dann auf den kinetischen Anteil der Hamilton-Funktion anwenden, so daß man die Rechnung aus Gleichung (A.14) durch

$$\begin{aligned} & \int dy \langle q - y/2 | \hat{H}(t) \hat{\rho}(t) | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} \\ &= \int dy H(q - y/2, p - i\hbar \partial_q/2; t) \psi(q - y/2, t) \bar{\psi}(q + y/2, t) e^{ipy/\hbar} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

fortführen kann.

Da der Translationsoperator $\exp(y\partial_q)$ angewendet auf $f(q)$ eine Verschiebung des Funktionsarguments $q \rightarrow q + y$ bewirkt, kann man die letzte Gleichung in

$$\begin{aligned} & \int dy \langle q - y/2 | \hat{H}(t) \hat{\rho}(t) | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} \\ &= \int dy H(q, p - i\hbar \partial_q/2; t) e^{-y\tilde{\partial}_q/2} \psi(q - y/2, t) \bar{\psi}(q + y/2, t) e^{ipy/\hbar} \\ &= H\left(q, p - \frac{i\hbar}{2} \tilde{\partial}_q; t\right) \int dy \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(p + \frac{i\hbar}{2} \tilde{\partial}_q\right) y\right) \psi(q - y/2, t) \bar{\psi}(q + y/2, t) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

umformen. Der Vergleich mit Gleichung (1.48) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \int dy \langle q - y/2 | \hat{H}(t) \hat{\rho}(t) | q + y/2 \rangle e^{ipy/\hbar} &= H(q, p; t) * \int dy \psi(q - y/2, t) \bar{\psi}(q + y/2, t) e^{ipy/\hbar} \\ &= H(q, p; t) * \pi(q, p; t). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Bemerkung: Analog zu (1.48) gilt

$$f(q, p) * g(q, p) = f(q, p) g\left(q - \frac{i\hbar}{2}\bar{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2}\bar{\partial}_q\right). \quad (\text{A.19})$$

Wie der Vergleich mit

$$\pi(q, p; t) = \int dy (\psi(q - y/2, t) e^{ipy/\hbar}) \bar{\psi}\left(q - \frac{i\hbar}{2}\bar{\partial}_p, t\right) \quad (\text{A.20})$$

zeigt, kann man die Wigner-Funktionen in der folgenden Variante als Moyal-Produkt schreiben:

$$\pi(q, p; t) = \left(\int dy \psi(q - y/2, t) e^{ipy/\hbar}\right) * \bar{\psi}(q, t). \quad (\text{A.21})$$

Auf Grund der Assoziativität des Moyal-Produkts ergibt sich

$$H(q, p; t) * \pi(q, p; t) = \left(H(q, p; t) * \int dy \psi(q - y/2, t) e^{ipy/\hbar}\right) * \bar{\psi}(q, t), \quad (\text{A.22})$$

so daß man $\bar{\psi}$ praktisch in der Rechnung nicht berücksichtigen muß. Dies korrespondiert zu der Tatsache, daß die in (A.14) auftretende Ableitung $\partial_{q'} = \partial_q/2 - \partial_y$ nicht auf $\bar{\psi}(q + y/2, t)$ wirkt.

A.4. Die Unschärferelation

In diesem Anhang soll aus Gleichung (1.106)

$$\langle f * \bar{f} \rangle \geq 0 \quad (\text{A.23})$$

die Heisenbergsche Unschärferelation abgeleitet werden.

Dazu setzt man $f = q + iyp$ in Gleichung (A.23) ein, wobei y eine reelle Zahl ist:

$$\langle f * \bar{f} \rangle = \langle (q + iyp) * (q - iyp) \rangle = \langle q * q \rangle - iy \langle [q, p]_* \rangle + y^2 \langle p * p \rangle = \langle q^2 \rangle + y\hbar + y^2 \langle p^2 \rangle \geq 0. \quad (\text{A.24})$$

Diese Gleichung ist für alle reellen Werte von y gültig, also insbesondere auch für $y = -\hbar/(2\langle p^2 \rangle)$:

$$\langle q^2 \rangle - \frac{\hbar^2}{2\langle p^2 \rangle} + \frac{\hbar^2}{4\langle p^2 \rangle} = \langle q^2 \rangle - \frac{\hbar^2}{4\langle p^2 \rangle} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle q^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2. \quad (\text{A.25})$$

Im letzten Schritt wurde die Ungleichung mit der positiven Zahl $\langle p^{2*} \rangle = \langle p^2 \rangle$ multipliziert. Der Fall $\langle p^2 \rangle = 0$ kann berücksichtigt werden, indem man die Rechnung mit q und p in vertauschten Rollen wiederholt.

Das Ergebnis (A.25) bleibt unverändert gültig, wenn man q und p durch die Größen $q' = q - \langle q \rangle$ bzw. $p' = p - \langle p \rangle$ ersetzt, denn es gilt

$$\langle q' * q' \rangle = \langle q'^2 \rangle \geq 0, \quad \langle p' * p' \rangle = \langle p'^2 \rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad [q', p']_* = [q, p]_* = i\hbar. \quad (\text{A.26})$$

Dies führt direkt zur Unschärferelation

$$\langle q'^2 \rangle \langle p'^2 \rangle = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle \geq \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{A.27})$$

wobei die übliche Definition

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} \quad (\text{A.28})$$

verwendet wurde.

A.5. Koordinatentransformation im Moyal-Produkt

In diesem Abschnitt des Anhangs soll das Moyal-Produkt (3.8)

$$f * g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} (\tilde{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{p_1} - \tilde{\partial}_{p_1} \vec{\partial}_{q_1} + \tilde{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{p_2} - \tilde{\partial}_{p_2} \vec{\partial}_{q_2}) \right) g \quad (\text{A.29})$$

mit den Koordinaten q_1, q_2, P_1 und P_2 dargestellt werden, die gemäß (3.10) folgendermaßen definiert sind:

$$P_1 = p_1 + \lambda q_2 \quad \text{und} \quad P_2 = p_2 - \lambda q_1 \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{m\omega}{2}. \quad (\text{A.30})$$

Die in Matrixform lautende Transformation

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & +\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ q_2 \\ q_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

kann mit

$$\begin{pmatrix} \partial_{q_1} \\ \partial_{q_2} \\ \partial_{p_1} \\ \partial_{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +\lambda & 1 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \partial_{q_1} \\ \partial_{q_2} \\ \partial_{P_1} \\ \partial_{P_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

auf die entsprechenden Ableitungen übertragen werden. Damit kann schließlich der Exponent des Moyal-Produkts (A.29) umgeschrieben werden, wie die Rechnung

$$\begin{aligned} & \tilde{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{p_1} - \tilde{\partial}_{p_1} \vec{\partial}_{q_1} + \tilde{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{p_2} - \tilde{\partial}_{p_2} \vec{\partial}_{q_2} \\ = & \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_{q_1} & \tilde{\partial}_{q_2} & \tilde{\partial}_{p_1} & \tilde{\partial}_{p_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\partial}_{q_1} \\ \vec{\partial}_{q_2} \\ \vec{\partial}_{p_1} \\ \vec{\partial}_{p_2} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_{q_1} & \tilde{\partial}_{q_2} & \tilde{\partial}_{P_1} & \tilde{\partial}_{P_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & +2\lambda \\ 0 & -1 & -2\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\partial}_{q_1} \\ \vec{\partial}_{q_2} \\ \vec{\partial}_{P_1} \\ \vec{\partial}_{P_2} \end{pmatrix} \\ = & (\tilde{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{P_1} - \tilde{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{q_1} + \tilde{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{q_2}) + 2\lambda (\tilde{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{P_1}) \\ = & (\tilde{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{P_1} - \tilde{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{q_1} + \tilde{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{q_2}) + 2\lambda (\tilde{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{P_1}) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

zeigt. Das transformierte Moyal-Produkt lautet daher

$$f * g = f \exp \left(\frac{i\hbar}{2} (\tilde{\partial}_{q_1} \vec{\partial}_{P_1} - \tilde{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{q_1} + \tilde{\partial}_{q_2} \vec{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{q_2}) + \frac{i\hbar}{2} m\omega (\tilde{\partial}_{P_1} \vec{\partial}_{P_2} - \tilde{\partial}_{P_2} \vec{\partial}_{P_1}) \right). \quad (\text{A.34})$$

B. Anhang zur fermionischen Deformationsquantisierung

In diesem Anhang werden das Grassmann-Moyal-Produkt

$$f * g = f \exp \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\partial}_{\vartheta_i} \vec{\partial}_{\vartheta_i} \right) g, \quad (\text{B.1})$$

das in Gleichung (4.33) definiert wurde, sowie die Spur (4.47) näher betrachtet.

Im ersten Abschnitt bestimmen wir die explizite Darstellung für $n = 1$ und 2 und der zweite Abschnitt liefert den Beweis der Assoziativität für den Fall $n = 1$. Anschließend wird die Integralregel (4.36) gezeigt. Der vierte Abschnitt dient zum Beweis der Spureigenschaft (4.48).

B.1. Zwei Beispiele für das Grassmann-Moyal-Produkt

Das in Gleichung (B.1) als Exponentialreihe definierte Produkt besteht tatsächlich nur aus endlich vielen Termen. Für den Fall $n = 1$ ergibt sich beispielsweise

$$f * g = f \exp \left(\frac{\hbar}{2} \tilde{\partial}_{\vartheta} \vec{\partial}_{\vartheta} \right) g = fg + \frac{\hbar}{2} f \tilde{\partial}_{\vartheta} \vec{\partial}_{\vartheta} g. \quad (\text{B.2})$$

Im Fall $n = 2$ bricht die Entwicklung nach dem Term der Ordnung \hbar^2 ab:

$$\begin{aligned} f * g &= f \exp \left(\frac{\hbar}{2} (\tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2}) \right) g \\ &= fg + \frac{\hbar}{2} f (\tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2}) g + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 f (\tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2})^2 g \\ &= fg + \frac{\hbar}{2} f (\tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2}) g + \left(\frac{\hbar}{2} \right)^2 f \tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2} g \\ &= fg + \frac{\hbar}{2} f (\tilde{\partial}_{\vartheta_1} \vec{\partial}_{\vartheta_1} + \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_2}) g - \frac{\hbar^2}{4} f \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_1} \tilde{\partial}_{\vartheta_2} \vec{\partial}_{\vartheta_1} g. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

In dieser Rechnung wurde mehrfach benutzt, daß die Ableitungen ∂_{ϑ_i} untereinander antikommutieren. Daraus folgt unter anderem $(\partial_{\vartheta_i})^2 = 0$.

B.2. Die Assoziativität des Grassmann-Moyal-Produkts

Mit Hilfe der Darstellung (B.2) kann die Assoziativität

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{B.4})$$

des Grassmann-Moyal-Produkts für den Fall $n = 1$ direkt bewiesen werden.

Dazu nehmen wir zunächst an, daß $g = g_m$ eine Funktion vom homogenen Grad m ist. Für die linke Seite von (B.4) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 (f * g_m) * h &= \left(f g_m + \frac{\hbar}{2} (f \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta g_m) \right) \left(h + \frac{\hbar}{2} \tilde{\partial}_\vartheta (\tilde{\partial}_\vartheta h) \right) \\
 &= f g_m h + \frac{\hbar}{2} (f \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta g_m) h + \frac{\hbar}{2} (f g_m) \tilde{\partial}_\vartheta (\tilde{\partial}_\vartheta h) \\
 &= f g_m h + \frac{\hbar}{2} \left((f \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta g_m) h + f (g_m \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta h) + (-1)^m (f \tilde{\partial}_\vartheta) g_m (\tilde{\partial}_\vartheta h) \right) \quad (\text{B.5})
 \end{aligned}$$

und die rechte Seite der Gleichung (B.4) lautet

$$\begin{aligned}
 f * (g_m * h) &= \left(f + \frac{\hbar}{2} (f \tilde{\partial}_\vartheta) \tilde{\partial}_\vartheta \right) \left(g_m h + \frac{\hbar}{2} (g_m \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta h) \right) \\
 &= f g_m h + \frac{\hbar}{2} (f \tilde{\partial}_\vartheta) \tilde{\partial}_\vartheta (g_m h) + \frac{\hbar}{2} f (g_m \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta h) \\
 &= f g_m h + \frac{\hbar}{2} \left((f \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta g_m) h + (-1)^m (f \tilde{\partial}_\vartheta) g_m (\tilde{\partial}_\vartheta h) + f (g_m \tilde{\partial}_\vartheta) (\tilde{\partial}_\vartheta h) \right), \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

so daß tatsächlich beide Seiten gleich sind. Bei der Rechnung wurde wieder $(\tilde{\partial}_\vartheta)^2 = (\tilde{\partial}_\vartheta)^2 = 0$ ausgenutzt, so daß die Terme der Ordnung \hbar^2 wegfallen.

Da die Gleichung (B.4) linear in g ist, folgt die Verallgemeinerung des Beweises für beliebige Größen durch die Zerlegung in Monome, wie es in Gleichung (4.2) gezeigt wurde.

B.3. Integralregel

Hier soll bewiesen werden, daß man das Grassmann-Moyal-Produkt im Integral über die gesamte Grassmann-Algebra durch das gewöhnliche Produkt der Grassmann-Algebra ersetzen kann. Dies ist gerade die Aussage der Gleichung

$$\int d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n f * g = \int d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n f g, \quad (\text{B.7})$$

die in (4.36) zu finden ist.

Die Entwicklung von $f * g - fg$ enthält gemäß (4.33) nur Terme, in denen wenigstens eine Ableitung ∂_{ϑ_i} sowohl auf f als auch auf g wirkt. Da aber f und g nur aus Termen bestehen können, die maximal linear in ϑ_i sind, kommt dann in dem betrachteten Term der Entwicklung der Erzeuger ϑ_i gar nicht mehr vor. In der Integration $\int d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n [f * g - fg]$ tragen aber nur Terme bei, die proportional zu $\vartheta_1 \dots \vartheta_n$ sind, was für keinen Term in $f * g - fg$ der Fall ist. Damit haben wir die Gültigkeit der Gleichung (B.7) bewiesen.

B.4. Die Spur

Hier soll die Spur

$$\text{Tr}(f) \propto \int d\vartheta_n d\vartheta_{n-1} \dots d\vartheta_1 \star f \quad (\text{B.8})$$

aus Gleichung (4.47) betrachtet werden.

Zunächst stellt man fest, daß auf Grund der Integraleigenschaft (4.16) nur solche Terme von $\star f$ zu (B.8) beitragen, die proportional zu $\vartheta_1 \vartheta_2 \dots \vartheta_n$ sind. Daher ist für $\text{Tr}(f)$ nur der Anteil aus f relevant, der vom Grad 0 ist. Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden: Eine mögliche Wahl der Spur für den Fall $n = 2$ lautet

$$\text{Tr}(f) = \frac{2}{\hbar^2} \int d\vartheta_2 d\vartheta_1 \star f. \quad (\text{B.9})$$

Mit dieser Definition gilt $\text{Tr}(1) = 2$, was gerade der gewöhnlichen Spur einer 2×2 Einheitsmatrix entspricht.

Im folgenden soll die Spureigenschaft

$$\text{Tr}(f * g) = \text{Tr}(g * f) \tag{B.10}$$

bewiesen werden, die in Gleichung (4.48) angegeben wurde.

Auf Grund der Linearität der Spur reicht es aus, Gleichung (B.10) nur für Produkte aus Generatoren zu zeigen. Wir betrachten daher die Spur $\text{Tr}((\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_k}) * (\vartheta_{j_1} \dots \vartheta_{j_l}))$, wobei daran erinnert sei, daß in der Definition des Grassmann-Moyal-Produkts (B.1) die Ableitungen nur in der Form von Bidifferentialoperatoren $\vec{\partial}_{\vartheta_i}$ auftreten. Nehmen wir an, daß es einen Erzeuger ϑ_m gibt, der nur in einem der beiden Faktoren des betrachteten Grassmann-Moyal-Produkts vorkommt. Dies hat zur Folge, daß der Bidifferentialoperator $\vec{\partial}_{\vartheta_m} \vec{\partial}_{\vartheta_m}$ nicht zum Tragen kommt und der Faktor ϑ_m in jedem Term der Entwicklung von $(\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_k}) * (\vartheta_{j_1} \dots \vartheta_{j_l})$ enthalten ist. Dann kann aber die Entwicklung des Grassmann-Moyal-Produkts keinen einzigen Term enthalten, der proportional zu 1 ist. Da aber nur solche Terme bei der Bildung der Spur beitragen, verschwindet die gesamte Spur.

Im Umkehrschluß folgt, daß die Spur $\text{Tr}((\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_k}) * (\vartheta_{j_1} \dots \vartheta_{j_l}))$ nur dann von Null verschieden ist, wenn alle Erzeuger des einen Faktors des Grassmann-Moyal-Produkts auch in dem anderen Faktor auftreten. Mit anderen Worten, $(\vartheta_{i_1} \dots \vartheta_{i_k})$ und $(\vartheta_{j_1} \dots \vartheta_{j_l})$ müssen (bis auf Unterschiede in der Reihenfolge der Generatoren) identisch sein, so daß die Eigenschaft (B.10) trivial ist. Wie man sich leicht klarmachen kann, besteht das betrachtete Grassmann-Moyal-Produkt dann sogar nur aus dem einen Term vom Grad 0.

C. Anhang zu Gruppen und deren Anwendungen

Dieser in fünf Abschnitte aufgeteilte Anhang dient zur Ergänzung der Kapitel 7 und 8.

Zunächst wird eine Multiplikationstabelle hergeleitet, auf die die Diskussion der Algebra Cl_3^* aufbaut. Im zweiten Abschnitt gehen wir auf die beiden Matrixgruppen $SU(2)$ und $SL(2, \mathbb{C})$ ein. Der dritte Abschnitt dient der Beschreibung einer alternativen Darstellung der Größen γ^μ , die auf einer Grassmann-Algebra mit sechs Erzeugern basiert. Im Anschluß daran finden sich Nebenrechnungen, in denen einige Transformationen explizit bestimmt werden. Im fünften Abschnitt wird eine Gleichung vereinfacht, die bei der Behandlung der Foldy-Wouthuysen-Transformation in Kapitel 8 auftritt.

C.1. Herleitung einer Multiplikationstabelle

In diesem Abschnitt werden alle Produkte der Elemente θ^i , Σ^j und Ω aus Cl_3^* bestimmt.

Mit dem Pauli-Produkt

$$f * g = f \exp(\vec{\partial}_{\theta^1} \vec{\partial}_{\theta^1} + \vec{\partial}_{\theta^2} \vec{\partial}_{\theta^2} + \vec{\partial}_{\theta^3} \vec{\partial}_{\theta^3}) g \quad (C.1)$$

aus Gleichung (7.1) wurde in (7.2) bereits die Produktregel

$$\theta^i * \theta^j = \epsilon_{ijk} \Sigma^k + \delta_{ij} \quad \text{mit} \quad \Sigma^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta^j * \theta^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta^j \theta^k \quad (C.2)$$

bewiesen.

Aus der Definition von

$$\Omega = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \theta^i * \theta^j * \theta^k = \theta^1 * \theta^2 * \theta^3 = \theta^1 \theta^2 \theta^3 \quad (C.3)$$

folgt auf elementare Weise

$$\Omega * \Omega = (\theta^1 \theta^2 \theta^3) * (\theta^1 \theta^2 \theta^3) = -(\theta^1 \theta^2 \theta^3) * (\theta^3 \theta^2 \theta^1) = -\theta^1 * \theta^2 * \theta^3 * \theta^3 * \theta^2 * \theta^1 = -1. \quad (C.4)$$

Für die Größen Σ^i und Ω erhalten wir

$$\theta^i * \Sigma^i = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \theta^i * \theta^j * \theta^k = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \theta^i * \theta^j * \theta^k = \Omega, \quad (C.5)$$

wobei die in dieser Rechnung auftretenden Summen explizit kenntlich gemacht wurden. Multipliziert man Gleichung (C.5) von links mit θ^i , dann ergibt sich mit Gleichung (C.2) die Regel

$$\Sigma^i = \theta^i * \Omega. \quad (C.6)$$

Durch Multiplikation mit Ω von rechts folgt daraus unter Verwendung der Gleichung (C.4) wiederum

$$\theta^i = -\Sigma^i * \Omega. \quad (C.7)$$

Betrachten wir nun das Produkt $\theta^i * \Omega = \theta^i * \theta^1 * \theta^2 * \theta^3$ genauer. Da i entweder 1, 2 oder 3 sein muß, kommutiert θ^i mit einem der drei Faktoren θ^1 , θ^2 und θ^3 in Ω , wohingegen θ^i mit den anderen beiden antikommutiert. Daher erhält man $\theta^i * \Omega = (-1)^2 \theta^1 * \theta^2 * \theta^3 * \theta^i = \Omega * \theta^i$, so daß Ω

mit θ^i kommutiert. Da Σ^i zwei Faktoren θ^i enthält, kommutiert Ω auch mit Σ^i . Wir haben daher die beiden Gleichungen

$$[\theta^i, \Omega]_* = 0 \quad \text{und} \quad [\Sigma^i, \Omega]_* = 0 \quad (\text{C.8})$$

gezeigt.

Mit diesem Resultat und der Gleichung $\Omega * \Omega = -1$ kann man leicht die linke Seite von Gleichung (C.2) in

$$\theta^i * \theta^j = -\Omega * \Omega * \theta^i * \theta^j = -\Omega * \theta^i * \Omega * \theta^j = -\Sigma^i * \Sigma^j \quad (\text{C.9})$$

umformen. Multipliziert man (C.2) mit Ω , dann ergibt sich für die linke Seite

$$\Omega * \theta^i * \theta^j = \Sigma^i * \theta^j = \theta^i * \Omega * \theta^j = \theta^i * \Sigma^j \quad (\text{C.10})$$

und die rechte Seite der Gleichung wird zu

$$\Omega * (\epsilon_{ijk} \Sigma^k + \delta_{ij}) = -\epsilon_{ijk} \theta^k + \delta_{ij} \Omega. \quad (\text{C.11})$$

Damit haben wir

$$\theta^i * \theta^j = -\Sigma^i * \Sigma^j = \epsilon_{ijk} \Sigma^k + \delta_{ij}, \quad (\text{C.12})$$

$$\text{und} \quad \theta^i * \Sigma^j = \Sigma^i * \theta^j = -\epsilon_{ijk} \theta^k + \delta_{ij} \Omega \quad (\text{C.13})$$

bewiesen.

Bis auf die triviale Multiplikation mit 1 wurden somit alle Pauli-Produkte zweier Basiselemente bestimmt. Sie werden in der folgenden Multiplikationstabelle zusammengefaßt.

*	θ^j	Σ^j	Ω
θ^i	$\epsilon_{ijk} \Sigma^k + \delta_{ij}$	$-\epsilon_{ijk} \theta^k + \delta_{ij} \Omega$	Σ^i
Σ^i	$-\epsilon_{ijk} \theta^k + \delta_{ij} \Omega$	$-\epsilon_{ijk} \Sigma^k - \delta_{ij}$	θ^i
Ω	Σ^j	θ^j	-1

C.2. Zwei Matrixgruppen

In diesem Abschnitt gehen wir auf die beiden Matrixgruppen $SU(2)$ und $SL(2, \mathbb{C})$ ein, auf die in den Abschnitten 7.2 bzw. 7.3 verwiesen wird.

C.2.1. Die $SU(2)$

Im folgenden soll die Lie-Gruppe $SU(2)$ definiert und deren wesentlichen Eigenschaften angegeben werden.

Die $SU(2)$ ist die Gruppe der komplexen, unitären 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Als solche können ihre Gruppenelemente mit Hilfe der in (7.9) definierten Pauli-Matrizen in der Form

$$\exp\left(-\frac{i}{2} \hat{\sigma} \cdot \delta\right) \quad (\text{C.14})$$

angegeben werden.

Bei der $SU(2)$ handelt es sich um die universelle Überlagerungsgruppe der $SO(3)$, die wiederum aus den orthogonalen 3×3 -Matrizen mit Determinante 1 besteht und mit der man Drehungen im \mathbb{R}^3 beschreiben kann. Das heißt, daß die $SU(2)$ lokal isomorph zur $SO(3)$ ist, aber im Gegensatz zur $SO(3)$ ist sie einfach zusammenhängend. Daß sich beide Gruppen in der Umgebung der 1 gleichen, erkennt man daran, daß die Erzeuger beider Gruppen die gleiche Vertauschungsrelation (7.21) erfüllen.

Da die $SO(3)$ nur 2π -periodisch in jedem Gruppenparameter ist, entsprechen die beiden Gruppenelemente 1 und -1 aus $SU(2)$ der Einheit in $SO(3)$. Es liegt daher der Homomorphismus $SO(3) \cong SU(2)/Z_2$ mit dem diskreten Normalteiler $Z_2 = \{1, -1\}$ vor.

C.2.2. Die $SL(2, \mathbb{C})$

Im folgenden wollen wir kurz auf die Lie-Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ eingehen.

Die $SL(2, \mathbb{C})$ ist als die Gruppe der komplexen 2×2 -Matrizen mit Determinante 1 definiert. Die Gruppenelemente der $SL(2, \mathbb{C})$ sind nicht notwendigerweise unitär, so daß offensichtlich $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ gilt. Eine Gruppe, deren Elemente die Determinante 1 haben, nennt man auch *unimodular*. Da die Pauli-Matrizen (7.9) spurlos sind, folgt aus der Regel $\det e^{\hat{f}} = e^{\text{tr} \hat{f}}$, daß man die Elemente der $SL(2, \mathbb{C})$ durch

$$\exp\left(-\frac{i}{2}(\hat{\sigma} \cdot \delta - i\hat{\sigma} \cdot \omega)\right) \quad (\text{C.15})$$

darstellen kann.

Bei der $SL(2, \mathbb{C})$ handelt es sich um die universelle Überlagerungsgruppe der eigentlichen, orthochronen Lorentz-Gruppe \mathcal{L}_+^\uparrow und es gilt $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C})/Z_2$ mit $Z_2 = \{1, -1\}$.

C.3. Eine zu Cl_4^* äquivalente Algebra

In diesem Abschnitt wird eine äquivalente Darstellung der Algebra Cl_4^* vorgestellt, die auch in [HHS2004] erscheinen wird. Diese Darstellung beruht auf der Idee, die Tensorstruktur der Matrizen $\hat{\gamma}^\mu$ aus Gleichung (7.65) mit zwei Versionen der Größen σ^i , die in (7.7) definiert wurden, zu imitieren.

In den folgenden Gleichungen werden die wesentlichen Erkenntnisse über die σ^i aus den Gleichungen (7.7), (7.8) und (7.12) wiederholt:

$$\sigma^i = \frac{1}{2i}\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^k, \quad \sigma^i * \sigma^j = i\epsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \varrho_{\text{Pauli}}(\sigma^i) = \hat{\sigma}^i. \quad (\text{C.16})$$

Die Darstellung der σ^i greift nur auf die gerade Unteralgebra von Cl_4^* zurück. Diese Algebra wird nun von drei auf sechs Generatoren θ^i mit $i = 1, 2, \dots, 6$ erweitert, wobei auch das Pauli-Produkt dementsprechend durch das Sternprodukt

$$f * g = f \exp\left(\sum_{i=1}^6 \tilde{\partial}_{\theta^i} \vec{\partial}_{\theta^i}\right) g \quad (\text{C.17})$$

ersetzt wird. Naheliegender Weise bezeichnen wir die hier diskutierte Algebra mit Cl_6^* , wobei im folgenden tatsächlich nur der gerade Teil dieser Algebra zum Tragen kommt.

Um die Tensorstruktur der 4×4 -Matrizen

$$\hat{\gamma}^0 = \hat{\sigma}^3 \otimes I \quad \text{und} \quad \hat{\gamma}^i = i\hat{\sigma}^2 \otimes \hat{\sigma}^i \quad (\text{C.18})$$

aus Gleichung (7.65) nachzuahmen, führen wir eine Kopie der σ^i ein. Dazu halten wir uns an die Konvention, daß die Indizes a, b und c nur die Werte 4, 5, 6 annehmen können, wohingegen i, j und k auf 1, 2, 3 beschränkt sind. Außerdem wird ein weiterer total antisymmetrischer Tensor $\epsilon_{abc} = \epsilon_{a-3, b-3, c-3}$ definiert. Damit kann die Kopie der σ^i auf folgende Weise angegeben werden:

$$\sigma^a = \frac{1}{2i}\epsilon_{abc}\theta^b\theta^c. \quad (\text{C.19})$$

Analog zu σ^i erfüllen diese Größen die Gleichung

$$\sigma^a * \sigma^b = i\epsilon_{abc}\sigma^c + \delta_{ab}, \quad (\text{C.20})$$

wie man leicht nachvollziehen kann.

Um Elemente aus Cl_6^* zu finden, die den Matrizen $\hat{\gamma}^0$ und $\hat{\gamma}^i$ entsprechen, gehen wir nach folgender Konstruktion vor. Ein $\hat{\sigma}^i$ im ersten Faktor des Tensorprodukts wird durch σ^{i+3} ersetzt und ein $\hat{\sigma}^j$ im zweiten Faktor durch σ^j . Eine Einheitsmatrix I wird in beiden Faktoren durch eine 1 ersetzt. Nach dieser Vorschrift entsprechen die Matrizen aus (C.18) den Größen

$$\gamma^0 = \sigma^6 \quad \text{und} \quad \gamma^i = \sigma^i \sigma^5. \quad (\text{C.21})$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß es sich bei der oben angegebenen Konstruktion um einen Isomorphismus handelt.

Bemerkung: In Gleichung (7.16) haben wir die Größen σ_i angegeben, die die gleichen Produktregeln erfüllen wie $\sigma^i = \epsilon_{ijk} \theta^j \theta^k / 2i$. Dementsprechend kann man in der oben beschriebenen Konstruktion der γ^μ anstelle von σ^a aus (C.19) auch

$$\sigma_4 = \theta^4, \quad \sigma_5 = \theta^5 \quad \text{und} \quad \sigma_6 = \frac{1}{2i} \theta^4 \theta^5 \quad (\text{C.22})$$

verwenden. Dies führt zu der Darstellung

$$\gamma^0 = \frac{1}{2i} \theta^4 \theta^5 \quad \text{und} \quad \gamma^i = \sigma^i \theta^5, \quad (\text{C.23})$$

wobei hier nur die fünf Erzeuger benötigt werden.

C.4. Berechnung einiger Transformationen

Der Inhalt dieses Teil des Anhangs bezieht sich auf die Abschnitte 7.2.2, 7.3.2 und 6.3. Da die Berechnung der Lorentz-Transformationen von θ und der Zeitentwicklung des Spins \mathcal{S} sehr ähnlich verlaufen, werden sie zu einem Abschnitt zusammengefaßt.

C.4.1. Bestimmung einiger Produktregeln

Mit Hilfe der Multiplikationstabelle (7.1) kann man auf einfache Weise das Produkt $\theta^i * \theta^j * \theta^k$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \theta^i * \theta^j * \theta^k &= (\epsilon_{ijl} \Sigma^l + \delta_{ij}) * \theta^k \\ &= \epsilon_{ijl} (-\epsilon_{lkm} \theta^m + \delta_{lk} \Omega) + \delta_{ij} \theta^k \\ &= \epsilon_{ijk} \Omega + \delta_{ij} \theta^k - \delta_{ik} \theta^j + \delta_{kj} \theta^i. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Aus diesem Ergebnis lassen sich leicht weitere Produkte mit drei Faktoren bestimmen. Dazu stellen wir fest, daß die Gleichungen

$$\frac{\Omega}{i} * \frac{\Omega}{i} = 1 \quad \text{und} \quad \sigma^i = \frac{1}{i} \Sigma^i = \frac{\Omega}{i} * \theta^i \quad (\text{C.25})$$

gültig sind. Da Ω mit allen Elementen der Algebra vertauscht, folgt daraus z. B. sofort

$$\theta^i * \theta^j * \theta^k = \frac{\Omega}{i} * \frac{\Omega}{i} * \theta^i * \theta^j * \theta^k = \left(\frac{\Omega}{i} * \theta^i \right) * \theta^j * \left(\frac{\Omega}{i} * \theta^k \right) = \sigma^i * \theta^j * \sigma^k. \quad (\text{C.26})$$

Multipliziert man den Ausdruck $\theta^i * \theta^j * \theta^k$ mit Ω/i , dann ergibt sich auf ähnliche Weise

$$\frac{\Omega}{i} * \theta^i * \theta^j * \theta^k = \theta^i * \sigma^j * \theta^k = \sigma^i * \sigma^j * \sigma^k. \quad (\text{C.27})$$

Das Produkt der rechten Seite von (C.24) mit Ω/i kann man mit Hilfe von (C.25) ebenfalls leicht berechnen, so daß man das Ergebnis dieses Abschnitts in den zwei Zeilen

$$\theta^i * \theta^j * \theta^k = \sigma^i * \theta^j * \sigma^k = \epsilon_{ijk} \Omega + \delta_{ij} \theta^k - \delta_{ik} \theta^j + \delta_{kj} \theta^i \quad (\text{C.28a})$$

$$\theta^i * \sigma^j * \theta^k = \sigma^i * \sigma^j * \sigma^k = i \epsilon_{ijk} + \delta_{ij} \sigma^k - \delta_{ik} \sigma^j + \delta_{kj} \sigma^i. \quad (\text{C.28b})$$

zusammenfassen kann. Diese Regeln werden in den folgenden Abschnitten gebraucht.

C.4.2. Berechnung der Rotationen

In diesem Abschnitt des Anhangs soll das Ergebnis der Transformation (7.25) für $f = \boldsymbol{\theta}$ bestimmt werden, so daß

$$\mathcal{R}_\delta : \boldsymbol{\theta} \mapsto e_*^{-i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\delta}} * \boldsymbol{\theta} * e_*^{-i\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\delta}} \quad (\text{C.29})$$

zu berechnen ist. Dabei werden wir die Gleichung

$$e_*^{-i\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\delta}} = e_*^{-i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\delta}/2} = \cos \frac{\delta}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_\delta \sin \frac{\delta}{2} \quad (\text{C.30})$$

aus (7.22) verwenden, wobei hier \mathbf{n} anstelle des Einheitsvektors \mathbf{n}_δ geschrieben wird.

Für die Komponenten von $\boldsymbol{\theta}$ ergibt sich gemäß (C.29) folgende Transformationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\delta(\theta^j) &= \left(\cos \frac{\delta}{2} - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\delta}{2} \right) * \theta^j * \left(\cos \frac{\delta}{2} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\delta}{2} \right) \\ &= \theta^j \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} n_i n_j \sigma^i * \theta^j * \sigma^k - i \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \theta^j]_* \\ &= \theta^j \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} n_i n_j \left(\delta_{ij} \theta^k - \delta_{ik} \theta^j + \delta_{kj} \theta^i \right) - i \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} 2i\epsilon_{ijk} n_i \theta^k \\ &= \theta^j \cos^2 \frac{\delta}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} \left(2n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \theta^j \right) - i \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \left(-2i(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\theta})_j \right) \\ &= \theta^j \left(\cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\theta})_j \\ &= \theta^j \cos \delta + (1 - \cos \delta) n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \sin \delta (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\theta})_j \\ &= n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \cos \delta (\theta^j - n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta})) - \sin \delta (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\theta})_j. \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Dieses Ergebnis kann auch in der Form

$$\mathcal{R}_\delta(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \cos \delta (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta})) - \sin \delta (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{C.32})$$

geschrieben werden.

C.4.3. Berechnung der Lorentz-Boosts

Hier soll mit Hilfe der Gleichung

$$e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}} = e_*^{-\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}/2} = \cosh \frac{\omega}{2} - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}_\omega \sinh \frac{\omega}{2} \quad (\text{C.33})$$

aus (7.37) der Lorentz-Boost von $\boldsymbol{\theta}$ berechnet werden, der gemäß (7.40) durch

$$\mathcal{B}_\omega : \boldsymbol{\theta} \mapsto e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}} * \boldsymbol{\theta} * e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}} \quad (\text{C.34})$$

bestimmt ist.

Die Berechnung dieser Transformation verläuft sehr ähnlich zur Rechnung aus (C.31), wobei wir \mathbf{n}_ω durch \mathbf{n} ersetzen.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\omega(\boldsymbol{\theta}) &= \left(\cosh \frac{\omega}{2} - \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \sinh \frac{\omega}{2} \right) * \theta^j * \left(\cosh \frac{\omega}{2} + \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} \sinh \frac{\omega}{2} \right) \\ &= \cosh^2 \frac{\omega}{2} \theta^j + \sinh^2 \frac{\omega}{2} n_i n_j \theta^i * \theta^j * \theta^k - \sinh \frac{\omega}{2} \cosh \frac{\omega}{2} \{ \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n}, \theta^j \}_* \\ &= \cosh^2 \frac{\omega}{2} \theta^j + \sinh^2 \frac{\omega}{2} n_i n_j \left(2n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \theta^j \right) - \sinh \frac{\omega}{2} \cosh \frac{\omega}{2} 2n_j \\ &= \left(\cosh^2 \frac{\omega}{2} - \sinh^2 \frac{\omega}{2} \right) \theta^j + 2 \sinh^2 \frac{\omega}{2} n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) - 2 \sinh \frac{\omega}{2} \cosh \frac{\omega}{2} n_j \\ &= \theta^j + (\cosh \omega - 1) n_j (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta}) - \sinh \omega n_j. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

In diesem Fall ist das Transformationsverhalten für 1 im Gegensatz zur Rotation nicht trivial:

$$\mathcal{B}_\omega(1) = e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}} * 1 * \overline{e_*^{-i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\omega}}} = e_*^{-\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}} = \cosh \omega - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} \sinh \omega. \quad (\text{C.36})$$

Mit den Definitionen $\cosh \omega = \gamma$ und $\sinh \omega = \beta\gamma$ können wir das Ergebnis in den Gleichungen

$$\mathcal{B}_\omega(1) = \gamma(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_\omega(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta} + (\gamma - 1) \mathbf{n}_\beta (\mathbf{n}_\beta \cdot \boldsymbol{\theta}) - \gamma \boldsymbol{\beta} \quad (\text{C.37})$$

zusammenfassen.

C.4.4. Zeitentwicklung des Spins

In diesem Anhang wird die Zeitentwicklung der Spins $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ berechnet, wobei die Hamiltonfunktion (6.25)

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma_3 \quad (\text{C.38})$$

lautet. Die Zeitentwicklung einer Observablen im Grassmann-Phasenraums ist in (4.43) angegeben, wobei sie für den Spin als

$$\mathbf{S}(t) = e_*^{iHt/\hbar} * \mathbf{S}(0) * \overline{e_*^{iHt/\hbar}} \quad (\text{C.39})$$

geschrieben werden kann. In dieser Form wird durch den Vergleich mit den Gleichungen (C.29) und (C.34) deutlich, daß es sich hier quasi um eine *aktive Zeittranslation* handelt. Das Sternexponential lautet in diesem Fall

$$e_*^{-iHt/\hbar} = \cos \frac{\omega t}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\omega t}{2}, \quad (\text{C.40})$$

was bereits in Gleichung (6.36) angegeben wurde.

Die Größen σ_i aus (6.8) und σ^i aus (7.7) erzeugen zueinander isomorphe Algebren, so daß Gleichung (C.28b) analog auch für die σ_i gültig ist, wobei sich als Spezialfall $\sigma_j * \sigma_i * \sigma_j = (2\delta_{ij} - 1) \sigma_i$ ergibt. Die Zeitentwicklung der Komponenten von $\boldsymbol{\sigma} \propto \mathbf{S}$ wird mit Hilfe der Gleichungen (C.39) und (C.40) in der folgenden Rechnung bestimmt:

$$\begin{aligned} \sigma_i(t) &= \left(\cos \frac{\omega t}{2} + i\sigma_3 \sin \frac{\omega t}{2} \right) * \sigma_i * \left(\cos \frac{\omega t}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\omega t}{2} \right) \\ &= \sigma_i \cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sigma_3 * \sigma_i * \sigma_3 \sin^2 \frac{\omega t}{2} + i[\sigma_3, \sigma_i]_* \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \\ &= \sigma_i \cos^2 \frac{\omega t}{2} + (2\delta_{i3} - 1) \sigma_i \sin^2 \frac{\omega t}{2} - 2\epsilon_{3ik} \sigma_k \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

$$= \sigma_i \cos^2 \frac{\omega t}{2} + (2\delta_{i3} - 1) \sigma_i \sin^2 \frac{\omega t}{2} - 2\epsilon_{3ik} \sigma_k \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2}. \quad (\text{C.42})$$

Für $i = 3$ entnehmen wir dieser Gleichung

$$\sigma_3(t) = \sigma_3 \left(\cos^2 \frac{\omega t}{2} + \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right) = \sigma_3, \quad (\text{C.43})$$

so daß die dritte Komponente des Spins S_3 eine Konstante ist. Für die restlichen Komponenten mit $i \neq 3$ erhält man das Ergebnis

$$\sigma_i(t) = \sigma_i \left(\cos^2 \frac{\omega t}{2} - \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right) - \epsilon_{3ik} \sigma_k 2 \sin \frac{\omega t}{2} \cos \frac{\omega t}{2} = \sigma_i \cos \omega t - \epsilon_{3ik} \sigma_k \sin \omega t. \quad (\text{C.44})$$

Daraus ergibt sich folgende Zeitabhängigkeit der Spin-Komponenten $S_2 = \hbar\sigma_1/2$ und $S_1 = \hbar\sigma_2/2$:

$$\begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ +\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.45})$$

Der Spin \mathbf{S} rotiert also mit der Zyklotronfrequenz $\omega = eB/mc$ um eine Achse senkrecht zur $\vartheta_1\vartheta_2$ -Ebenen.

Die Zeitentwicklung aus (C.39) gewährleistet, daß die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{i\hbar} [f(t), H]_* \quad (\text{C.46})$$

erfüllt ist. Für $S_3(t)$ ist diese Gleichung trivial, da diese Komponente des Spins konstant ist und zudem noch proportional zu H . Für $i \neq 3$ liefert die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} [S_i(t), H]_* &= \frac{\hbar\omega}{4i} ([\sigma_i, \sigma_3]_* \cos \omega t - \epsilon_{3ik} [\sigma_k, \sigma_3]_* \sin \omega t) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \epsilon_{i3k} \sigma_k \cos \omega t - \frac{\hbar\omega}{2} \epsilon_{3ik} \epsilon_{k3l} \sigma_l \sin \omega t \\ &= \omega \epsilon_{i3k} \frac{\hbar}{2} (\sigma_k \cos \omega t - \epsilon_{3kl} \sigma_l \sin \omega t), \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

so daß wir Gleichung (C.46) in diesem Fall in der Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}(t) = \frac{e}{mc} \mathbf{B} \times \mathbf{S}(t) \quad (\text{C.48})$$

angeben können.

C.5. Kommutatoren von (un)geraden Operatoren

In diesem Abschnitt soll die Größe

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \mathcal{H} + [iR, \mathcal{H}]_{*S} + \frac{1}{2} [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*S}]_{*S} + \frac{1}{3!} [iR, [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*S}]_{*S}]_{*S} \\ &\quad + \frac{1}{4!} [iR, [iR, [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*S}]_{*S}]_{*S}]_{*S} - \frac{\hbar}{mc^2} \dot{R} - \frac{1}{2} \frac{\hbar}{mc^2} [iR, \dot{R}]_{*S} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

die in Gleichung (8.35) angegeben ist, vereinfacht werden. Dabei sei an die Definition

$$iR = \frac{\theta^0}{2} *_P \mathcal{O} \quad (\text{C.50})$$

aus (8.34) erinnert. Für die folgenden Rechnungen benutzen wir die Vertauschungsrelationen

$$[\theta^0, \mathcal{E}]_{*S} = [\theta^0, \mathcal{E}]_{*P} = 0 \quad \text{und} \quad \{\theta^0, \mathcal{O}\}_{*S} = \{\theta^0, \mathcal{O}\}_{*P} = 0 \quad (\text{C.51})$$

aus (8.23), ohne die Größen \mathcal{O} und \mathcal{E} genauer zu kennen. Mit diesen Gleichungen und der elementaren Regel

$$\theta^0 *_S \theta^0 = \theta^0 *_P \theta^0 = 1 \quad (\text{C.52})$$

kann man in jedem Term von \mathcal{H}' alle mehrfach vorkommenden Faktoren θ^0 eliminieren.

Wir betrachten die Größen \mathcal{E} , \mathcal{E}' mit positiver Parität und \mathcal{O} , \mathcal{O}' , \mathcal{O}'' mit negativer Parität. Aus der Gleichung (C.51) kann man leicht folgende Relationen ableiten:

$$\begin{aligned} [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \mathcal{E}']_{*S} &= \theta^0 *_S [\mathcal{O}, \mathcal{E}']_{*S}, \quad (\text{a}) & [\mathcal{O}, \theta^0 *_S \mathcal{E}]_{*S} &= -\theta^0 *_S \{\mathcal{O}, \mathcal{E}\}_{*S}, \quad (\text{b}) \\ [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \mathcal{O}'']_{*S} &= \theta^0 *_S \{\mathcal{O}, \mathcal{O}''\}_{*S} \quad (\text{c}) & \text{und} \quad \{\mathcal{O}, \theta^0 *_S \mathcal{O}'\}_{*S} &= -\theta^0 *_S [\mathcal{O}, \mathcal{O}']_{*S}. \quad (\text{d}) \end{aligned}$$

Wenn man $\mathcal{E}' = \theta^0 *_S \mathcal{E}$ in (a) einsetzt und darauf (b) anwendet, dann ergibt sich

$$[\theta^0 *_S \mathcal{O}, \theta^0 *_S \mathcal{E}]_{*S} = -\{\mathcal{O}, \mathcal{E}\}_{*S}, \quad (\text{e})$$

wobei wir Gleichung (C.52) benutzt haben. Auf analoge Weise folgt mit $\mathcal{O}'' = \theta^0 *_S \mathcal{O}'$ aus (c) und (d)

$$[\theta^0 *_S \mathcal{O}, \theta^0 *_S \mathcal{O}']_{*S} = -[\mathcal{O}, \mathcal{O}']_{*S}. \quad (\text{f})$$

Aus den Gleichungen (a) bis (f) ergeben sich die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) für } \mathcal{E}' = \mathcal{E} & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} = \theta^0 *_S [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S}, \\
 \text{(c) für } \mathcal{O}'' = \mathcal{O} & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \mathcal{O}]_{*_S} = \theta^0 *_S \mathcal{O}^{2*_S}, \\
 \text{für } \mathcal{O}'' = \mathcal{O}^{3*_S} & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \mathcal{O}^{3*_S}]_{*_S} = \theta^0 *_S \mathcal{O}^{4*_S}, \\
 \text{(e) für } \mathcal{E} = 1 & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \theta^0]_{*_S} = -2\mathcal{O}, \\
 \text{für } \mathcal{E} = \mathcal{O}^{2*_S} & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \theta^0 *_S \mathcal{O}^{2*_S}]_{*_S} = -2\mathcal{O}^{3*_S}, \\
 \text{(f) für } \mathcal{O}' = [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \theta^0 *_S [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S}]_{*_S} = -[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S}]_{*_S}, \\
 \text{für } \mathcal{O}' = \dot{\mathcal{O}} & \Rightarrow [\theta^0 *_S \mathcal{O}, \theta^0 *_S \dot{\mathcal{O}}]_{*_S} = -[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}]_{*_S}.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir auf (C.49) anwenden, wobei angenommen werden soll, daß \mathcal{O} von der Ordnung $1/c$ ist und \mathcal{E} von der Ordnung $1/c^2$. Berücksichtigt man nur Terme bis zur vierten Ordnung in $(1/c)^4$, dann erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$[iR, \mathcal{H}]_{*_S} = -\mathcal{O} + \frac{1}{2}\theta^0 *_S [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} + \theta^0 *_S \mathcal{O}^{2*_S}, \quad (\text{C.53a})$$

$$[iR, [iR, \mathcal{H}]_{*_S}]_{*_S} = -\theta^0 *_S \mathcal{O}^{2*_S} - \frac{1}{4}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S}]_{*_S} - \mathcal{O}^{3*_S}, \quad (\text{C.53b})$$

$$[iR, [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*_S}]_{*_S}]_{*_S} = \mathcal{O}^{3*_S} - \theta^0 *_S \mathcal{O}^{4*_S}, \quad (\text{C.53c})$$

$$[iR, [iR, [iR, [iR, \mathcal{H}]_{*_S}]_{*_S}]_{*_S}]_{*_S} = \theta^0 *_S \mathcal{O}^{4*_S}, \quad (\text{C.53d})$$

$$\frac{\hbar}{mc^2} \dot{R} = -\frac{i\hbar}{mc^2} \frac{\theta^0}{2} *_S \dot{\mathcal{O}}, \quad (\text{C.53e})$$

$$\left[iR, \frac{\hbar}{mc^2} \dot{R} \right]_{*_S} = \frac{1}{4} \frac{i\hbar}{mc^2} [\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}]_{*_S}, \quad (\text{C.53f})$$

Die Größe iR wurde gerade so gewählt, daß in $[iR, \mathcal{H}]_{*_S}$ ein Term $-\mathcal{O}$ vorkommt. Dadurch wird bei dieser Transformation der Term \mathcal{O} aus \mathcal{H} kompensiert.

Durch Einsetzen in (C.49) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}' &= \theta^0 *_P \left(1 + \frac{1}{2}\mathcal{O}^{2*_S} - \frac{1}{8}\mathcal{O}^{4*_S} \right) + \mathcal{E} - \frac{1}{8} \left[\mathcal{O}, \left([\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} + \frac{i\hbar}{mc^2} \dot{\mathcal{O}} \right) \right]_{*_S} \\
 &+ \frac{1}{2}\theta^0 *_P [\mathcal{O}, \mathcal{E}]_{*_S} - \frac{1}{3}\mathcal{O}^{3*_S} + \frac{i\hbar}{2mc^2} \theta^0 *_P \dot{\mathcal{O}} + \dots .
 \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

In der ersten Zeile stehen nur Terme mit positiver Parität und die Terme der zweiten Zeile haben negative Parität. Da \mathcal{E} von der Ordnung $1/c^2$ ist und \mathcal{O} von der Ordnung $1/c$, haben alle Terme mit negativer Parität wenigstens die Ordnung $1/c^3$.

Literaturverzeichnis

- [AW1970a] G. S. AGARWAL und E. WOLF, *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. I. mapping theorems and ordering of functions of noncommuting operators*, Phys. Rev. **D2**, 2161–2186 (1970).
- [AW1970b] G. S. AGARWAL und E. WOLF, *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. II. quantum mechanics in phase space*, Phys. Rev. **D2**, 2187–2205 (1970).
- [AW1970c] G. S. AGARWAL und E. WOLF, *Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics. III. a generalized wick theorem and multitime mapping*, Phys. Rev. **D2**, 2206–2225 (1970).
- [Bak1958] G. BAKER, *Formulation of Quantum Mechanics Based on the Quasi-Probability Distribution Induced on Phase Space*, Phys. Rev. **109**, 2198–2206 (1958).
- [BD1964] J. D. BJORKEN und S. D. DRELL, *Relativistische Quantenmechanik* (Bibliographisches Institut, Mannheim, 1964).
- [Ber1966] F. A. BEREZIN, *Methods of Second Quantization* (Academic Press, New York, 1966).
- [BFF⁺1978a] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRØNSDAL, A. LICHNEROWICZ und D. STERNHEIMER, *Deformation Theory and Quantization. 1. Deformations of symplectic structures*, Ann. Phys. (NY) **111**, 61–110 (1978).
- [BFF⁺1978b] F. BAYEN, M. FLATO, C. FRØNSDAL, A. LICHNEROWICZ und D. STERNHEIMER, *Deformation Theory and Quantization. 2. physical applications*, Ann. Phys. (NY) **111**, 111–151 (1978).
- [BHW2000] M. BORDEMANN, H.-C. HERBIG und S. WALDMANN, *BRST Cohomology and Phase Space Reduction in Deformation Quantisation.*, Comm. Math. Phys. **210**, 107–144 (2000).
- [BM1977] F. A. BEREZIN und M. S. MARINIV, *Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics*, Ann. Phys. (NY) **104**, 336–362 (1977).
- [Bor1996] M. BORDEMANN, *On the deformation quantization of super-Poisson brackets* (1996), q-alg/9605038.
- [Car2000] P. CARTIER, *Mathemagics*, Séminaire Latharingien de Combinatoire **44**, Article B44d (2000).
- [Cas1976] R. CASALBUONI, *The Classical Mechanics for Bose-Fermi Systems*, Il Nuovo Cimento **33 A**, 389–431 (1976).
- [CFZ1998] T. CURTRIGHT, D. FAIRLIE und C. K. ZACHOS, *Features of time-independent Wigner functions*, Phys. Rev. **D58**, 025002 (1998).
- [Com1974] L. COMTET, *Advanced Combinatorics* (C. Reidel, Dordrecht, 1974).

- [Cra1991] J. P. CRAWFORD, *Clifford algebra: Notes on the spinor metric and Lorentz, Poincare, and conformal groups*, J. Math. Phys. **32**, 576–583 (1991).
- [CTDL1977] C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU und F. LALOË, *Quantum Mechanics (Vol. 1)* (Hermann, Paris, 1977).
- [CUZ2001] T. CURTRIGHT, T. UEMATSU und C. K. ZACHOS, *Generating All Wigner Functions*, J. Math. Phys. **42**, 2396–2416 (2001).
- [DF1998] M. DÜTSCH und K. FREDENHAGEN, *Deformation stability of BRST-quantization*, AIP Conf. Proc. **453**, 324–333 (1998).
- [Dir1930] P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1930).
- [Dir1966] P. A. M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1966).
- [DV2002] B. DEMIRCIOĞLU und A. VERÇIN, *Autonomous generation of all Wigner functions and marginal probability densities of Landau levels*, Ann. Phys. (NY) **305**, 1–27 (2002).
- [Fai1964] D. FAIRLIE, *The formulation of quantum mechanics in terms of phase space functions*, Proc. Camb. Phil. Soc. **60**, 581–586 (1964).
- [Fau2002] B. FAUSER, *A treatise on quantum Clifford algebras* (2002), math.qa/0202059.
- [FW1950] L. L. FOLY und S. A. WOUTHUYSEN, *On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit*, Phys. Rev. **78**, 29–36 (1950).
- [Ger1964] M. GERSTENHABER, *On the Deformation of Rings and Algebras*, Ann. Math. **79**, 59–103 (1964).
- [Gro1946] H. GROENEWOLD, *On the principles of elementary quantum mechanics*, Physica **12**, 405–460 (1946).
- [HH2002a] A. C. HIRSHFELD und P. HENSELDER, *Deformation quantization for systems with fermions*, Ann. Phys. (NY) **302**, 59–77 (2002).
- [HH2002b] A. C. HIRSHFELD und P. HENSELDER, *Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics*, Am. J. Phys. **70**, 537–547 (2002).
- [HH2002c] A. C. HIRSHFELD und P. HENSELDER, *Star products and perturbative quantum field theory*, Ann. Phys. (NY) **298**, 382–393 (2002).
- [HHS2004] A. C. HIRSHFELD, P. HENSELDER und T. SPERNAT, *Cliffordization, Spin and Fermionic Star-Products* (2004).
- [HOSW1984] M. HILLERY, R. F. O’CONNELL, M. O. SCULLY und E. P. WIGNER, *Distribution functions in physics: fundamentals*, Physics Reports **106**, 121–167 (1984).
- [KS1997] H. KALKA und G. SOFF, *Supersymmetrie* (Teubner, Stuttgart, 1997).
- [LL1979] D. LANDAU und M. LIFSCHITZ, *Quantenmechanik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1979).
- [MF1953] P. MORSE und H. FESHBACH, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953).

- [Moy1949] E. MOYAL, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 99–124 (1949).
- [MR1994] J. MARSDEN und T. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetrie* (Springer Verlag, 1994).
- [Rom1975] P. ROMAN, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders, vol. 2* (Pergamon Press, New York, 1975).
- [Rom1984] S. ROMAN, *The Umbral Calculus* (Academic Press, New York, 1984).
- [SU1982] R. U. SEXL und H. K. URBANTKE, *Relativität, Gruppen, Teilchen* (Springer Verlag, Wien, 1982), zweite, erweiterte Auflage.
- [vN1931] J. VON NEUMANN, *Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operationen*, Math. Ann. **104**, 570–578 (1931).
- [Weia] E. W. WEISSTEIN, *Hermite Polynomial*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/HermitePolynomial.html> .
- [Weib] E. W. WEISSTEIN, *Laguerre Polynomial*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/LaguerrePolynomial.html> .
- [Weic] E. W. WEISSTEIN, *Sheffer Sequence*, From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/ShefferSequence.html> .
- [Wey1927] H. WEYL, *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, Z. Phys. **46**, 1–46 (1927).
- [Wig1932] P. WIGNER, *Quantum corrections for thermodynamic equilibrium*, Phys. Rev. **40**, 749–759 (1932).
- [Zac2000a] C. K. ZACHOS, *Geometrical evaluation of star products*, J. Math. Phys. **41**, 5129–5134 (2000).
- [Zac2000b] C. K. ZACHOS, *A survey of star product geometry* (2000), hep-th/0008010.
- [Zac2002] C. K. ZACHOS, *Deformation quantization: Quantum mechanics lives and works in phase-space*, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 297–316 (2002).

Danksagung

Allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen:

Zuerst bedanke ich mich bei Herrn PD Dr. A. C. Hirshfeld für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die Betreuung dieser Diplomarbeit. Er hat mir mit interessanten Ideen und in zahlreichen Diskussionen immer weiterhelfen können.

Ganz herzlich möchte ich auch den Mitgliedern der Arbeitsgruppe danken. Die Zusammenarbeit mit Peter Henselder und Beatrice Bucker war deutlich mehr als nur ein fachlicher Gewinn. Ohne die Anregungen und Ratschläge von Peter wäre die Arbeit in dieser Form sicherlich nicht möglich gewesen.

Bei allen anderen Mitarbeitern von T III und T IV bedanke ich mich für die freundschaftliche Atmosphäre und dafür, daß sie auch einen Windows-Rechner in der vierten Etage toleriert haben.

Einen herzlichen Dank möchte ich auch an Herrn Pastor B. Süselbeck richten, der die Rechtschreibung dieser Diplomarbeit korrigiert hat.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Freundin Alexandra Walicki, die mir während der gesamten Zeit des Studiums zur Seite stand und mich in der Diplomarbeit moralisch unterstützt hat. Sie konnte mit ihren Ratschlägen zur sprachlichen Formulierung einen wertvollen Beitrag leisten.

Der größte Dank gebührt meinen Eltern Martina und Rolf Spernat, die mich immer mit allen Mitteln unterstützt und mir somit das Studium ermöglicht haben.