

Scan

A7345

A259992

D. Gouyou-Beauchamp  
(author)

Paper

add to 2 seqs

{A7345  
A25992}

~~P0357~~

~~P0372~~

✓f94

*[Handwritten scribbles and signatures]*

Publications du **Laboratoire de  
Combinatoire et d'  
Informatique  
Mathématique**

1

Édité par S. Brlek

**Parallélisme: modèles et complexité**

ACFAS 89

57e Congrès du 15-19 mai 1989  
de l'Association Canadienne-Française pour  
l'Avancement des Sciences.  
UQAM, Montréal, Québec, Canada.  
**Actes du Colloque.**

Département de mathématiques et d'informatique



Centre de recherche  
informatique de Montréal



Université du Québec à Montréal

10 131

GOR Gobe 893  
A7345  
A259992

## Tableaux de Havender standards

D. Gouyou-Beauchamps  
Laboratoire de Recherche en Informatique  
Bât. 490, Université de Paris Sud  
91405 Orsay Cedex, France

OK

### Abstract

We give the generating function for standard Havender tableaux of height 2 and exact formulas for these tableaux according the number of empty cells. The problem is related to the comparison of algorithms controlling concurrent access to a database.

## 1 Introduction

Un problème important en pratique comme en théorie concernant les bases de données est de comparer les performances des algorithmes de maintien de leur cohérence en particulier du point de vue du parallélisme qu'ils autorisent. J.Françon [8] propose de mesurer la fréquence des exécutions correctes dans les exécutions à priori possibles. ce qui est une mesure de la fréquence des modifications qu'un algorithme de contrôle de concurrence est amené à apporter à l'exécution des transactions telles qu'elles se présentent, en quelque sorte une mesure de la quantité de contrôle à effectuer.

Dans ce contexte une base de données est vue comme une collection d'objets appelés entités dont les valeurs doivent, à chaque instant, vérifier des relations caractéristiques de la situation modélisée par la base de données. Ces relations sont appelées les contraintes d'intégrité de la base [7][1][2][16]. Une transaction est une suite ordonnée d'opérations atomiques sur les entités dont l'effet global préserve l'intégrité de la base. Par conséquent toute composition séquentielle de transactions, appelée exécution sérielle, transforme un état cohérent en un état cohérent.

Dans la pratique, plusieurs transactions peuvent accéder en parallèle à une même base de données. Le problème de la sérialisabilité (dit aussi du maintien de la cohérence ou du contrôle de la concurrence d'accès) est de synchroniser l'exécution des transactions de façon à n'autoriser que les exécutions qui sont équivalentes à une exécution sérielle. La notion d'équivalence qui est retenue est que les opérations conflictuelles ont le même ordre relatif dans les exécutions équivalentes, les actions conflictuelles étant les accès à une même entité par des transactions différentes. La synchronisation voulue est réalisée par un algorithme dit de contrôle de la concurrence des accès ou encore de maintien de cohérence.

Dans [7], J.Françon propose de modéliser l'algorithme, les transactions et les entités par des shuffles de mots sur un alphabet donné. Le dénombrement d'ensembles d'exécutions revient alors à énumérer des classes de commutation partielle. Ces classes peuvent être caractérisées en terme de tableaux de Young. Pour traiter plus finement l'analyse du contrôle de l'accès à une base données, J.Françon a défini une classe de tableaux, généralisant ceux de Young, qu'il a appelé *Tableaux de Havender*, en raison de leur liens avec l'algorithme de Havender [12] qui permet d'éviter les interblocages dans les systèmes d'exploitation. En effet, le modèle utilisant les tableaux de Havender impose que, dans toutes les transactions, les actions atomiques soient effectuées dans le même ordre.

Par contre, avec ce modèle, les actions atomiques ne sont pas obligées de toutes apparaître dans une transaction.

Le but de cet article est d'étudier ces tableaux et de donner des formules d'énumération exactes pour la hauteur 2. Les résultats sont à rapprocher de ceux obtenus dans le cas des tableaux de Young où on ne connaît de formules exactes que jusqu'à la hauteur 5 [11][13] ou bien des formules asymptotiques pour une hauteur quelconque [17].

Les méthodes utilisées sont la combinatoire bijective et le codage par des mots de langages algébriques. Le principal résultat obtenu est que le nombre de tableaux de Havender ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $q$  cases vides ( $p > 0, 0 \leq q \leq 2p$ ) est égal à :

$$\sum_{j=\max(0, p-q)}^{\lfloor \frac{2p-q}{2} \rfloor} \frac{p!(4p-2q-2j)!}{(2p-q-2j)!(j+1)!(2p-q-j)!(2p-q-j)!(q-p-j)!}$$

Un corollaire de ce résultat est une preuve des identités combinatoires suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (2^{i+1} - 1) C_i &= 1 + \sum_{n=1}^p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} C_i (4^{i+1} 5^{n-2i-1} - 3^{n-2i-1}) \\ &= \sum_{q=0}^{2p} \sum_{j=\max(0, p-q)}^{\lfloor \frac{2p-q}{2} \rfloor} \frac{p!(4p-2q-2j)!}{(2p-q-2j)!(j+1)!(2p-q-j)!(2p-q-j)!(q-p-j)!} \end{aligned}$$

## 2 Définitions

Soit  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k)$  avec  $\lambda_k \neq 0$  une partition d'un entier positif  $n$ . Le *diagramme de Ferrers*  $F_\lambda$  de forme  $\lambda$  est le tableau constitué de  $k$  lignes justifiées à gauche, la  $i^{\text{ème}}$  ligne ayant  $\lambda_i$  cases si on prend la convention d'écrire les lignes de bas en haut. Un *tableau de Young standard* de forme  $\lambda$  est un remplissage des  $n$  cases de  $F_\lambda$  avec les nombres  $1, 2, \dots, n$  de façon que les nombres forment une suite croissante dans chaque ligne et chaque colonne, les lignes étant lues de gauche à droite et les colonnes de bas en haut. La figure 1 donne un exemple d'un tableau de Young standard de forme  $\lambda = (5, 3, 3, 2)$ .

9	12			
4	10	13		
3	5	8		
1	2	6	7	11

Figure 1

Appelons *tableau de Havender standard* un tableau de forme rectangulaire ayant  $p$  lignes et  $r$  colonnes dont certaines cases contiennent un entier pris entre 1 et  $n$ , entier donné tel que  $n \leq pr$ , de façon que tous les entiers entre 1 et  $n$  apparaissent une seule fois et que, pour toute ligne et toute colonne du tableau, la suite des entiers qui y apparaissent soit ou bien vide, ou bien croissante. La figure 2 présente un exemple pour  $p = 3, r = 4$  et  $n = 7$ .



5			7
2	3		6
	1		4

Figure 2

Pour  $n = rp$ , un tableau de Havender standard est évidemment un tableau de Young standard.

Nous utiliserons des ensembles finis appelés *alphabets*, leurs éléments étant des *lettres*. Un *mot* est une suite finie de lettres. La suite vide (ou mot vide) est notée 1. L'ensemble  $A^*$  des mots sur un alphabet  $A$  (le monoïde libre généré par  $A$ ) est muni de l'opération binaire de concaténation et ainsi un mot peut être considéré comme la concaténation de ses lettres. Bien entendu, 1 est l'élément neutre de cette opération.

La longueur d'un mot  $f$ , notée  $|f|$ , est le nombre de lettres qui composent  $f$ . Pour une lettre  $x$  de l'alphabet,  $f|_x$  note le nombre de lettres de  $f$  qui sont égales à  $x$ . Un mot  $f'$  est un *facteur* d'un mot  $f$  s'il existe deux mots  $f_1$  et  $f_2$  tels que  $f = f_1 f' f_2$ . Si  $f_1$  est le mot vide, alors  $f'$  est un *facteur gauche* de  $f$ .

Soit l'alphabet  $X = \{x, \bar{x}\}$ . Le morphisme  $\delta$  de  $X^*$  dans  $\mathbb{N}$  est défini par  $\delta(x) = 1$  et  $\delta(\bar{x}) = -1$ . Le langage de Dyck  $D$  est l'ensemble des mots  $f$  de  $X^*$  tels que  $\delta(f) = 0$  et pour tout facteur gauche  $f'$  de  $f$ ,  $\delta(f') \geq 0$ . Il est bien connu que  $\text{card}(D \cap X^{2n}) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$  (le nombre de Catalan [3][10]).

Soit l'alphabet  $Y = \{x, \bar{x}, y\}$ . Le morphisme  $\delta'$  de  $Y^*$  dans  $\mathbb{N}$  est défini par  $\delta'(x) = 1$ ,  $\delta'(\bar{x}) = -1$  et  $\delta'(y) = 0$ . Le langage de Motzkin  $M$  est l'ensemble des mots  $f$  de  $Y^*$  tels que  $\delta'(f) = 0$  et que, pour tout facteur gauche  $f'$  de  $f$ ,  $\delta'(f') \geq 0$ . Il est aussi bien connu que  $\text{card}(M \cap Y^n) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i = M_n$  (le nombre de Motzkin [4][15]).

Les langages  $D$  et  $M$  (vus comme des séries formelles non commutatives) vérifient les équations:

$$D = 1 + x D \bar{x} D \quad (1)$$

$$M = 1 + y M + x M \bar{x} M \quad (2)$$

L'équation (1) signifie qu'un mot de  $D$  est soit le mot vide, soit un mot qui peut être décomposé de façon unique en  $x f_1 \bar{x} f_2$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont eux-mêmes des mots de Dyck.

L'équation (2) signifie qu'un mot de  $M$  est soit le mot vide, soit un mot commençant par un  $y$  suivi d'un mot de  $M$ , soit un mot qui peut être décomposé de façon unique en  $x f_1 \bar{x} f_2$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont aussi des mots de  $M$ .

Enfin, on dit qu'un mot  $f$  du langage de Dyck  $D$  est *premier* s'il est de la forme  $f = x f' \bar{x}$  où  $f'$  est lui-même un mot de Dyck.

### 3 Séries génératrices

Dans tout ce paragraphe, tableau signifiera tableau de Havender standard de hauteur 2 ( $p = 2$ ) ayant au moins une colonne ( $r \geq 1$ ). Soient deux tableaux  $P$  et  $P'$ ,  $P$  ayant les paramètres  $p = 2$ .

$r$  et  $n$  et  $P'$  les paramètres  $p' = 2, r'$  et  $n'$ . On définit la concaténation de  $P$  et  $P'$  (notée  $PP'$ ) comme étant le tableau ayant les paramètres  $2, r + r'$  et  $n + n'$  et formé par la juxtaposition des tableaux  $P$  et  $P'$  ( $P$  à gauche et  $P'$  à droite) où les nombres  $1, 2, \dots, r'$  dans  $P'$  sont remplacés par  $r + 1, r + 2, \dots, r + r'$ . La figure 3 donne un exemple de la concaténation de deux tableaux.

P =	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	2	3		6			1		4	5
2	3		6								
	1		4	5							

P' =	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td></td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td></td><td>3</td></tr></table>		2	4	1		3
	2	4					
1		3					

$P'' = PP' =$	<table border="1" style="display: inline-table;"><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td>6</td><td></td><td></td><td>8</td><td>10</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td></td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td></td><td>9</td></tr></table>	2	3		6			8	10		1		4	5	7		9
2	3		6			8	10										
	1		4	5	7		9										

Figure 3

Un tableau est dit *premier* s'il ne peut être décomposé en la concaténation de deux tableaux. Ainsi un tableau est soit premier, soit décomposable de façon unique en la concaténation d'au moins deux tableaux premiers. La figure 4 donne un exemple de décomposition d'un tableau non premier en la concaténation de tableaux premiers.

	2		3	6						7		9
		1		4	5			8	10			11

	2		1	3					1		3
		1		1	2			2	4		5

Figure 4

Nous allons diviser les tableaux premiers en deux classes:

- la classe  $\alpha$  comprenant d'une part le tableau formé d'une colonne de deux cases vides et d'autre part les tableaux où le nombre 1 apparaît sur la première ligne ou sur la première case de la deuxième ligne,
- la classe  $\beta$  comprenant les tableaux où le nombre 1 apparaît sur une case de la deuxième ligne qui n'est pas la première.

Nous dirons qu'un tableau est de *type*  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) s'il est décomposable en la concaténation de tableaux appartenant tous à la classe  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ).

Soit  $l$  la série énumératrice des tableaux de type  $\alpha$ , série en deux variables commutatives  $x$  et  $y$  où  $x$  compte toutes les cases du tableau et  $y$  les cases vides. Ainsi  $l = \sum_{p,q} l_{2p,q} x^{2p} y^q$  où  $l_{2p,q}$  est le nombre de tableaux de Havender de type  $\alpha$  ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $q$  cases vides.

**Théorème 1**  $l = \frac{1}{2x} (1 - 2x^2 - 2x^2y - x^2y^2 - \sqrt{(1 - x^2(y+2))^2(1 - x^2y^2)})$

**PREUVE:**

Nous allons coder les tableaux de type  $\alpha$  par des mots sur l'alphabet  $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$ . Pour cela nous allons parcourir le tableau case par case, et à chaque case recontrée nous écrivons une lettre:

- un  $x$  pour une case pleine de la première ligne,
- un  $\bar{x}$  pour une case pleine de la deuxième ligne,
- un  $y$  pour une case vide de la première ligne,
- un  $\bar{y}$  pour une case vide de la deuxième ligne.

Les règles définissant l'ordre de parcours sont les suivantes:

- on parcourt les cases dans l'ordre croissant des nombres qu'elles contiennent,
- si la première ligne commence par des cases vides, on parcourt ces cases vides jusqu'à la première case non vide, puis on va à la case numérotée 1,
- sur la première ligne, on parcourt les cases vides qui suivent une case pleine, s'il y en a, immédiatement après avoir lu cette case pleine,
- sur la deuxième ligne, on parcourt les cases vides qui précèdent une case pleine, s'il y en a, juste avant de lire cette case pleine,
- on finit le parcours par les cases vides qui terminent la deuxième ligne, s'il y en a.

La figure 5 donne un exemple de codage.

1		4	5	8	9	10		11		
		2	3		6		7		12	13

yy $\bar{y}$ iiiiyy $\bar{y}$ iiiiyy $\bar{y}$ iiiiyy $\bar{y}$

Figure 5

Soit  $\varphi$  le morphisme de  $\{x, \bar{x}, y, \bar{y}\}$  sur  $\{x, \bar{x}\}$  défini par  $\varphi(x) = \varphi(y) = x$  et  $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y}) = \bar{x}$ . Le langage  $L$  des mots qui codent les tableaux de type  $\alpha$  est caractérisé de la façon suivante:  $f$  appartient à  $L$  si et seulement si il vérifie les deux propriétés:

- $\varphi(f)$  appartient à  $D$ , le langage de Dyck,
- $f = f_1 \bar{f}_1 \bar{x} f_2 \bar{f}_2 \bar{x} f_3 \bar{f}_3 \bar{x} \dots x f_k \bar{f}_k$  où:
  - $f_i$  est un mot sur l'alphabet  $\{x, y\}$  pour  $i = 2, 3, \dots, k$ ,
  - $\bar{f}_j$  est un mot sur l'alphabet  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  pour  $j = 1, 2, \dots, k - 1$ ,
  - $f_1$  est un mot non vide sur l'alphabet  $\{x, y\}$ ,
  - $\bar{f}_k$  est un mot non vide sur l'alphabet  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ .

La condition i) indique que  $f$  est le codage d'un tableau de type  $\alpha$ , c'est à dire qu'à tout instant de la lecture, le nombre de cases lues sur la première ligne est supérieur ou égal au nombre de cases lues sur la deuxième ligne. La condition ii) reflète les règles de lecture des cases vides: lorsqu'on passe de la deuxième ligne à la première ligne, on vient de lire une case pleine sur la deuxième ligne et on va lire une case pleine sur la première ligne.

Nous noterons  $L'$  le langage constitué par les mots de  $L$  commençant par  $x$ . Ainsi tout mot  $f$  de  $L$  est:

- soit  $x\bar{x}$ ,  $x\bar{y}$ ,  $y\bar{x}$  ou  $y\bar{y}$ ,
  - soit de la forme  $af_1b$  avec  $a \in \{x, y\}$ ,  $b \in \{\bar{x}, \bar{y}\}$  et  $f_1 \in L'$ ,
  - soit de la forme  $a\bar{x}f_1$  avec  $a \in \{x, y\}$  et  $f_1 \in L'$ ,
  - soit de la forme  $af_1\bar{x}f_2$  avec  $a \in \{x, y\}$ ,  $f_1 \in L$  et  $f_2 \in L'$ .
- $L$  et  $L'$  vérifient donc l'équation de langages:

$$L = x\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{x} + y\bar{y} + xL\bar{x} + xL\bar{y} + yL\bar{x} + yL\bar{y} + x\bar{x}L' + y\bar{x}L' + xL\bar{x}L' + yL\bar{x}L' \quad (3)$$

Comme les décompositions reflétées par l'équation (3) sont uniques, on peut passer en commutatif pour obtenir une équation pour  $l$  et  $l'$ , à condition d'appliquer en même temps le morphisme qui transforme  $x$  et  $\bar{x}$  en  $x$ , et  $y$  et  $\bar{y}$  en  $xy$  de façon à obtenir exactement la série énumératrice  $l$  recherchée. On trouve ainsi l'équation:

$$l = x^2 + 2x^2y + x^2y^2 + (x^2 + 2x^2y - x^2y^2)l - (x^2 + x^2y)l' + (x^2 + x^2y)ll'$$

Si on remarque que  $l = (x + xy)l' / x$ , on obtient alors, pour  $l$ , l'équation:

$$l = x^2 + 2x^2y + x^2y^2 + (2x^2 + 2x^2y + x^2y^2)l + x^2l^2 \quad (4)$$

Lorsqu'on résout (4) et qu'on ne garde que la solution qui donne des coefficients positifs pour la série, on obtient le résultat annoncé. ■

Nous allons maintenant considérer les tableaux de la classe  $\beta$ . On peut vérifier facilement qu'ils peuvent être caractérisés par les propriétés suivantes:

- Ce sont des tableaux premiers.
- La case inférieure de la première colonne et la case supérieure de la dernière colonne ne sont pas vides.
- Dans chaque colonne, au moins une case est vide.
- Si la case supérieure d'une colonne  $i$  est occupée par le nombre  $r$ , alors il existe  $j < i$  et  $s > r$  tels que la case inférieure de la colonne  $j$  soit occupée par le nombre  $s$ .
- Si la case inférieure d'une colonne  $i$  est occupée par le nombre  $r$ , alors il existe  $j > i$  et  $s < r$  tels que la case supérieure de la colonne  $j$  soit occupée par le nombre  $s$ .

Soit  $r$  la série énumératrice des tableaux appartenant à la classe  $\beta$ , série de deux variables commutatives  $x$  et  $y$  où  $x$  compte toutes les cases du tableau et  $y$  les cases vides. Ainsi  $r = \sum_{p,q} r_{2p,q} x^{2p} y^q$  où  $r_{2p,q}$  est le nombre de tableaux de la classe  $\beta$  ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $q$  cases vides.

**Théorème 2**  $r = \frac{1}{2}(1 - 2x^2y - x^2y^2 - \sqrt{(1 - x^2y(y + 4))(1 - x^2y^2)})$



### PREUVE:

Nous allons coder les tableaux de la classe  $\beta$  par des mots sur l'alphabet  $\{x, \bar{x}, a, b\}$ . Pour cela nous allons parcourir le tableau dans l'ordre suivant:

- on parcourt les cases dans l'ordre croissant des nombres qu'elles contiennent en respectant pour les cases vides les règles suivantes:
- sur la deuxième ligne, on parcourt les cases vides qui précèdent une case pleine, s'il y en a, juste avant d'accéder à cette case pleine,
- sur la première ligne, on parcourt, jusqu'à la prochaine case non vide, les cases vides qui suivent une case pleine, immédiatement après avoir lu cette case pleine.

On code alors le tableau de la façon suivante:

- chaque fois qu'on rencontre pour la première fois une colonne où la première ligne est vide et où la deuxième ligne est numérotée, on écrit la lettre  $a$ , et lorsqu'on rencontre pour la deuxième fois cette colonne, on n'écrit rien,
- chaque fois qu'on rencontre pour la première fois une colonne où la deuxième ligne est vide et où la première ligne est numérotée, on écrit la lettre  $x$ , et lorsqu'on rencontre pour la deuxième fois cette colonne, on écrit une lettre  $\bar{x}$ ,
- chaque fois qu'on rencontre pour la première fois une colonne où la première et la deuxième ligne sont vides, on écrit la lettre  $b$  et lorsqu'on rencontre pour la deuxième fois cette colonne, on n'écrit rien.

On peut noter que, dans ce codage, la lettre  $a$  représente une case vide et une case pleine, la lettre  $x$  une case vide, la lettre  $\bar{x}$  une case pleine et la lettre  $b$  deux cases vides.

La figure 6 donne un exemple de tableau de la classe  $\beta$  et de son codage.

					1	2		5		8	9
3	4		6	7			10				

$x\bar{x}b\bar{x}\bar{x}a\bar{x}\bar{x}a\bar{x}\bar{x}a\bar{x}\bar{x}b\bar{x}a\bar{x}$

Figure 6

Soit  $\psi$  le morphisme de  $\{x, \bar{x}, a, b\}$  dans  $\{x, \bar{x}\}$  défini par  $\psi(x) = x$ ,  $\psi(\bar{x}) = \bar{x}$  et  $\psi(a) = \psi(b) = 1$ .

On peut alors caractériser un mot  $f$  qui code un tableau de la classe  $\beta$  de la façon suivante:

- $\psi(f)$  est un mot de Dyck premier,
- toute suite de  $\bar{x}$  consécutifs doit être précédée d'un  $a$ ,
- $f$  commence par un  $x$  et finit par un  $\bar{x}$ .

La condition i) indique que  $f$  est le codage d'un tableau de la classe  $\beta$ , c'est à dire qu'à tout instant du parcours le nombre de cases lues sur la deuxième ligne est supérieur au nombre de cases lues sur la première ligne et il n'y a égalité qu'à la fin de la lecture.

La condition ii) reflète les règles de lecture des cases vides: lorsqu'on passe de la deuxième ligne à la première ligne, on vient de lire une case pleine sur la deuxième ligne et on va lire une case pleine sur la première ligne.

La condition iii) reflète le fait que le tableau est un tableau premier dans la classe  $\beta$ : la deuxième ligne débute forcément par une case vide au-dessus d'une case pleine et le nombre le plus grand est forcément sur la première ligne au-dessous d'une case vide.

Le langage ainsi défini est bien en bijection avec les tableaux de la classe  $\beta$ . Cela se vérifie facilement en considérant l'algorithme de décodage qui suit.

On lit le mot de gauche à droite et on remplit les lignes de gauche à droite de la façon suivante (le numéro courant démarant a 1):

- lorsqu'on lit un  $x$ , on met une croix sur la case vide la plus à gauche de la deuxième ligne,
- lorsqu'on lit un  $\bar{x}$ , on met le numéro courant dans la case vide la plus à gauche de la première ligne, puis on incrémente le numéro courant,
- lorsqu'on lit un  $a$ , on met le numéro courant dans la case vide la plus à gauche de la deuxième ligne et une croix dans la même colonne sur la première ligne, puis on incrémente le numéro courant,
- lorsqu'on lit un  $b$ , on met une croix sur la case vide la plus à gauche de la deuxième ligne et une croix dans la même colonne sur la première ligne.

Les cases avec des croix représentent donc les cases vides du tableau. La figure 7 donne un exemple de décodage.

Soit  $R$  le langage des mots de  $\{x, \bar{x}, a, b\}^*$  codant les tableaux de la classe  $\beta$ . Si  $f$  appartient à  $R$ ,  $f$  est de la forme  $f = x f' \bar{x}$  avec  $f'$  vérifiant les trois conditions suivantes:

- $\psi(f')$  est un mot de Dyck,
- toute suite de  $\bar{x}$  consécutifs doit être précédée d'un  $a$ ,
- $f'$  finit par un  $\bar{x}$  ou un  $a$ .

Appelons  $N$  le langage des mots de  $\{x, \bar{x}, a, b\}^*$  vérifiant les trois conditions précédentes. Si  $g$  appartient à  $N$  alors  $g$  est:

- soit le mot  $a$ ,
- soit de la forme  $ag_1$  ou  $bg_1$  avec  $g_1 \in N$ ,
- soit de la forme  $xg_1\bar{x}$  avec  $g_1 \in N$ ,
- soit de la forme  $xg_1\bar{x}g_2$  avec  $g_1$  et  $g_2$  dans  $N$ .

On obtient alors pour  $N$  et  $R$  les équations non commutatives :

$$N = a + aN + bN + xN\bar{x} + xN\bar{x}N \quad (5)$$

$$R = xN\bar{x} \quad (6)$$

Par passage en commutatif, ce qui est licite puisque les décompositions utilisées dans les équations (5) et (6) sont uniques, et en utilisant un morphisme qui envoie  $x$  sur  $xy$ ,  $\bar{x}$  sur  $x$ ,  $a$  sur  $x^2y$  et  $b$  sur  $x^2y^2$ , on obtient pour  $r$  l'équation:

$$r = x^4y^2 + x^2y(y-2)r + r^2 \quad (7)$$

En résolvant et en ne gardant que la solution qui donne des coefficients positifs, on obtient le résultat annoncé. ■

**Théorème 3** La série  $s = \sum_{p,q} s_{2p,q} x^{2p} y^q$  qui énumère les tableaux de type  $\beta$  (où  $s_{2p,q}$  est le nombre de tableaux de type  $\beta$  ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $q$  cases vides) est égale à :

$$s = \frac{1 - 2x^2y - x^2y^2 - 2x^4y^2 - \sqrt{(1 - x^2y(y+4))(1 - x^2y^2)}}{2x^2y(2+y+x^2y)}$$

**PREUVE:**

Puisqu'un tableau de type  $\beta$  est une suite non vide de tableaux de la classe  $\beta$ , la relation  $s = r/(1 - r)$  relie les séries  $s$  et  $r$  (ou encore  $r = s/(1 + s)$ ). En portant la valeur de  $r$  dans l'équation (7) et en résolvant, on obtient le résultat annoncé. ■

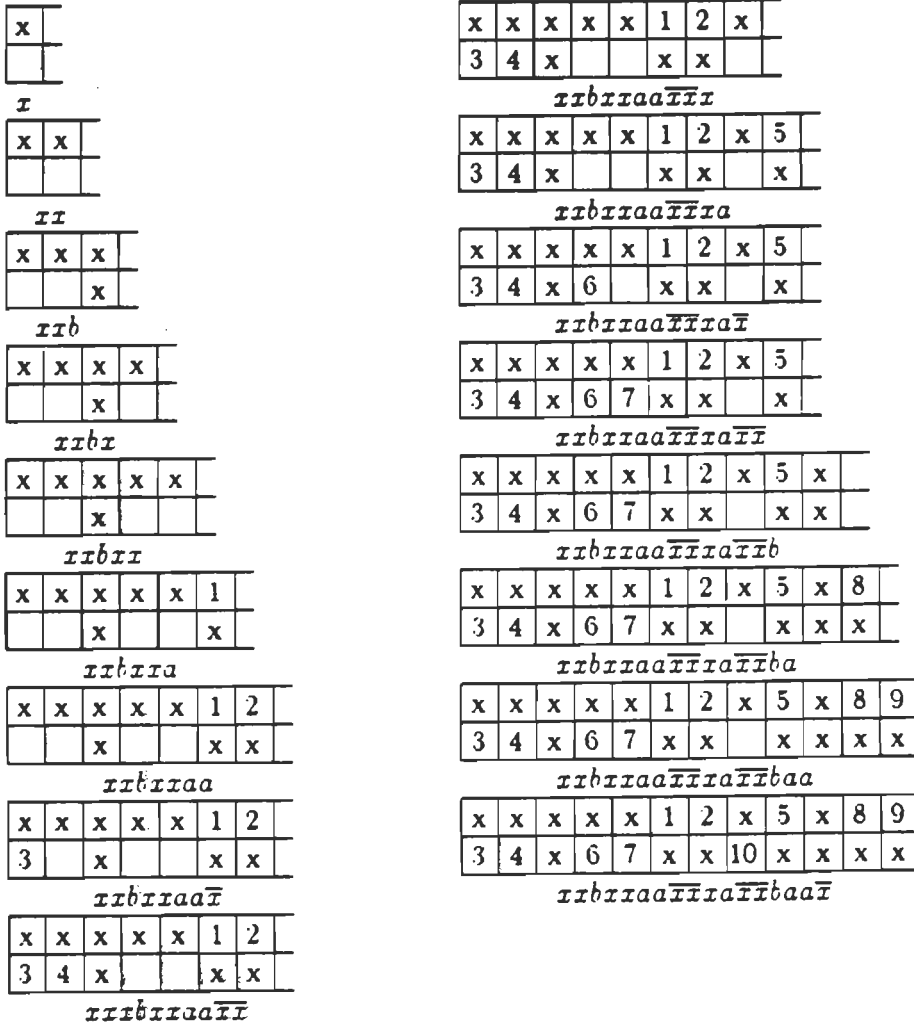


Figure 7

**Théorème 4** La série  $t = \sum_{p,q} t_{2p,q} x^{2p} y^q$  qui énumère les tableaux de Havender de hauteur 2 (où  $t_{2p,q}$  est le nombre de tableaux Havender ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $q$  cases vides) est égale à :

$$t = \frac{\sqrt{(1 - x^2y(y+4))(1 - x^2y^2)} - \sqrt{(1 - x^2(y+2)^2)(1 - x^2y^2)}}{2x^2(1 - x^2y^2)} - 1$$

**PREUVE:**

Il suffit de remarquer qu'un tableau est une suite alternée non vide de tableaux de type  $\alpha$  et de tableaux de type  $\beta$ . Il y a quatre possibilités:

- les suites ayant un nombre impair d'éléments premiers et commençant par un tableau de type  $\alpha$  (énumérées par  $l/(1-sl)$ ),
- les suites ayant un nombre impair d'éléments premiers et commençant par un tableau de type  $\beta$  (énumérées par  $s/(1-ls)$ ),
- les suites ayant un nombre pair d'éléments premiers et commençant par un tableau de type  $\alpha$  (énumérées par  $ls/(1-ls)$ ),
- les suites ayant un nombre pair d'éléments premiers et commençant par un tableau de type  $\beta$  (énumérées par  $sl/(1-sl)$ ).

La série  $t$  est donc égale à  $(s+l+2sl)/(1-sl)$ . En remplaçant  $s$  et  $l$  par leurs valeurs, on obtient le résultat annoncé. ■

Si on ne s'intéresse plus seulement aux tableaux rectangulaires mais aux tableaux dont la deuxième ligne est de longueur inférieure ou égale à celle de la première, on peut calculer par la même méthode que la série  $\sum_{p,q} u_{p,q} x^p y^q$  (où  $u_{p,q}$  est le nombre de tels tableaux ayant au plus deux lignes,  $p$  cases dont  $q$  vides) est égale à :

$$\frac{4x^2y-4x^2-xy-2x-1}{4x^2(1-xy)} + \frac{\sqrt{(1-x^2y(y+4))(1-x^2y^2)} - \sqrt{(1-x^2(y-2)^2)(1-x^2y^2)}}{4x^2(1-x^2y^2)} + \frac{\sqrt{(1-x^2y(y+4))(1-x^2(y+2)^2)}}{4x^2(1-xy)(1-x(y-2))}$$

## 1 Enumérations

**Théorème 5**  $l_p = \sum_{q=0}^{2p} l_{2p,q}$ , le coefficient de  $x^{2p}$  dans  $l$ , est égal à (pour  $p \geq 1$ ):

- $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \binom{p-1}{2i} C_i (1+(y+1)^2)^{p-2i-1} (y+1)^{2i+2}$
- $\sum_{i=1}^p \frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{i-1} (1+y)^{2p-2i-2}$

**PREUVE:**

L'équation(4) peut s'écrire:

$$l = x^2(1+y)^2 + x^2(1+(1+y)^2)l + x^2l^2 \quad (8)$$

En faisant le changement de variable  $l' = \frac{l}{x^2(1-y)^2}$ , on obtient à partir de (8) l'équation suivante pour  $l'$ :

$$l' = 1 + x^2(1+(1+y)^2)l' + x^4(1+y)^2l'^2 \quad (9)$$

Or le coefficient de  $x^n$  dans la série  $b$  solution de l'équation:

$$b = 1 + xub + x^2vb^2 \quad (10)$$

est égal à  $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} C_i u^{n-2i} v^i$ . En effet  $b$  est la série énumératrice des mots de Motzkin où les  $\bar{x}$  sont valués par  $v$ , les  $y$  sont valués par  $u$  et les  $x$  sont valués par 1 (cf. [5] et [18]).

Le coefficient de  $x^{2p}$  dans la série  $l'$  est donc  $\sum_{i=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2i} C_i (1+(1+y)^2)^{p-2i-1} (1+y)^{2i}$ .

Et ainsi le coefficient de  $x^{2p}$  dans la série  $l$  est égal à :

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \binom{p-1}{2i} C_i (1+(y+1)^2)^{p-2i-1} (y-1)^{2i+2}$$

D'autre part, un mot de Dyck non vide est:



- soit  $x\bar{x}$ ,
- soit de la forme  $x\bar{x}f$  où  $f$  est un mot de Dyck non vide,
- soit de la forme  $xf\bar{x}$  où  $f$  est un mot de Dyck non vide,
- soit de la forme  $xf\bar{x}g$  où  $f$  et  $g$  sont des mots de Dyck non vides.

Si on remplace dans chaque mot de Dyck non vide chaque facteur  $x\bar{x}$  par  $xy\bar{x}$ , le langage  $A$  obtenu vérifie l'équation non commutative:

$$A = xy\bar{x} + xy\bar{x}a + xA\bar{x} + xA\bar{x}A \quad (11)$$

La série énumératrice  $a = \sum_{p,q} a_{2p,q} x^{2p} y^q$ , où  $a_{2p,q}$  compte les mots de  $A$  ayant  $q$  lettres  $y$ ,  $p$  lettres  $x$  et  $p$  lettres  $\bar{x}$ , vérifie donc l'équation:

$$a = x^2 y + x^2 (1 + y) a + x^2 a^2 \quad (12)$$

Or  $a_{2p,q}$  compte aussi les arbres ayant  $p$  arêtes et  $q$  feuilles. Il est bien connu que  $a_{2p,q}$  est le nombre de Narayana  $p^{-1} \binom{p}{q} \binom{p}{q-1}$  que Kreweras [14] appelle aussi distribution  $\beta$  et qui est parfois appelé Runyon number. En rapprochant les équations (12) et (8), on s'aperçoit que  $l_{2p,q}$  compte les arbres ayant  $p$  arêtes et  $q$  feuilles, chaque feuille étant valuée par  $(1 + y)^2$ .

Donc  $l_p = \sum_{i=1}^p \frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{i-1} (1 + y)^{2i} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{p} \binom{p}{i} \binom{p}{i-1} (1 + y)^{2p-2i+2}$ . ■

**Théorème 6**  $r_p = \sum_{q=0}^{2p} r_{2p,q}$ , le coefficient de  $x^{2p}$  dans la série  $r$ , est égal à

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor} \binom{p-2}{2i} C_i (2 + y)^{p-2-2i} y^n.$$

**PREUVE:**

En faisant le changement de variable  $r' = \frac{r}{x^2 y^2}$ , on obtient, à partir de l'équation (7), l'équation suivante pour  $r'$ :

$$r' = 1 + yx^2(2 + y)r' + x^4 y^2 r'^2 \quad (13)$$

L'équation (13) est de la même forme que l'équation (10), le coefficient de  $x^{2p}$  dans  $r'$  est donc  $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor} \binom{p-2}{2i} C_i (2 + y)^{p-2-2i} y^n$ . En reportant cette valeur dans la série  $r$ , on obtient le résultat annoncé. ■

**Théorème 7**  $t_p = \sum_{q=0}^{2p} t_{2p,q}$ , le coefficient de  $x^{2p}$  dans  $t$  est égal à:

$$y^{2p} + \sum_{n=1}^p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} C_i y^{2p-2n} ((1 + y)^{2i-2} (1 + (1 + y)^2)^{n-2i-1} - y^{n-1} (2 + y)^{n-2i-1}).$$

**PREUVE:**

En rapprochant les théorème 1 et 2 et le théorème 4, on peut établir la relation:

$$t = \left( l - \frac{r}{x^2} + 1 \right) \left( \frac{1}{1 - x^2 y^2} \right) \quad (14)$$

D'autre part, considérons la série  $w(x, y) = \sum_{p>0} w_p x^{2p}$ . Le coefficient de  $x^{2p}$  de la série  $\frac{w(x, y)}{1 - x^2 y^2}$  est égal à  $\sum_{n=1}^p w_n y^{2p-2n}$ .

En portant dans (14) la valeur des coefficients de  $x^{2p}$  dans  $\frac{l}{1 - x^2 y^2}$ ,  $\frac{r}{x^2(1 - x^2 y^2)}$  et  $\frac{1}{1 - x^2 y^2}$ , on obtient le résultat annoncé. ■

**Théorème 8** Le coefficient de  $y^q$  dans

$$y^{2p} + \sum_{n=1}^p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} C_i y^{2p-2n} ((1+y)^{2i+2} (1+(1+y)^2)^{n-2i-1} - y^{n+1} (2+y)^{n-2i-1}),$$

est à dire le nombre de tableaux de Havender ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $q$  cases vides ( $p > 0$ ,  $0 \leq q \leq 2p$ ) est égal à:  $\sum_{j=\max(0,p-q)}^{\lfloor \frac{2p-q}{2} \rfloor} \frac{p!(4p-2q-2j)!}{(2p-q-2j)!(j+1)!(2p-q-j)!(2p-q-j)!(q-p+j)!}$ .

**PREUVE:**

Soit  $v(x, y) = \sum_{p,q} v_{2p,q} x^{2p} y^q$  la série définie par  $v(x, y) = t(xy, \frac{1}{y})$ . Le coefficient de  $x^{2p} y^q$  dans  $v(x, y)$  est le nombre de tableaux de Havender ayant 2 lignes,  $p$  colonnes et  $2p - q$  cases vides.

$$v(x, y) = \frac{\sqrt{1-x^2-4x^2y}}{2x^2y^2\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2-4x^2y-4x^2y^2}}{2x^2y^2\sqrt{1-x^2}} - 1$$

Soit  $w(x, y) = \sum_{p,q} w_{2p,q} x^{2p} y^q$  la série définie par  $w(x, y) = \frac{1}{1-x^2} v(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y)$ .

Les coefficients  $v_{2p,q}$  et  $w_{2i,j}$  sont liés par la relation:  $v_{2p,q} = \sum_{i=\lfloor q/2 \rfloor}^p \binom{p}{i} w_{2i,q}$ .

$$w(x, y) \text{ est égal à } \frac{\sqrt{1-4x^2y}}{2x^2y^2} - \frac{\sqrt{1-4x^2y-4x^2y^2}}{2x^2y} - \frac{1}{1+x^2}.$$

Or le développement de Taylor de  $\frac{\sqrt{1-4x^2y}}{2x^2y^2}$  est égal à:  $\frac{1}{2x^2y^2} - \sum_{p \geq 0} C_p x^{2p} y^{p-1}$

et celui de  $-\frac{\sqrt{1-4x^2(y+y^2)}}{2x^2y^2}$  à:  $\frac{-1}{2x^2y^2} + \sum_{p \geq 0} x^{2p} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} C_p y^{p-1+k}$ .

Les coefficients  $w_{2p,q}$  sont alors donnés par les formules:

- $w_{2p,q} = \binom{p-1}{2q-p} C_p$  pour  $0 < p \leq q \leq 2p$

- $w_{2p,0} = (-1)^{p-1}$  pour  $p \geq 1$

- $w_{0,0} = 0$

On obtient ainsi pour  $v_{2p,q}$  les valeurs suivantes:

$$\begin{aligned} v_{2p,q} &= \sum_{i=\lfloor q/2 \rfloor}^{\min(p,q)} \binom{p}{i} \binom{i+1}{2i-q} C_i \\ &= \sum_{i=\lfloor q/2 \rfloor}^{\min(p,q)} \frac{p!(2i)!}{(p-i)!(2i-q)!(q-i+1)!i!} \\ &= \sum_{j=\max(0,q-p)}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{(2q-2j)!p!}{(p-q-j)!(q-2j)!(j+1)!(q-j)!(q-j)!} \end{aligned}$$

Notons que cette formule est vraie pour  $q = 0$  ( $v_{2p,0} = 1$ ) puisque  $\sum_{i=1}^p \binom{p}{i} (-1)^{i+1} = 1$ . Il suffit de constater que  $t_{2p,q}$  est égal à  $v_{2p,2p-q}$  pour obtenir le résultat annoncé. La figure 8 donne les premières valeurs de  $t_{2p,q}$ . ■

p/q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	1										
2	2	6	8	4	1								
3	5	20	36	38	21	6	1						
4	14	70	160	220	202	116	40	8	1				
5	42	252	700	1190	1380	1152	670	260	65	10	1		
6	132	924	3024	6132	8610	8862	6904	4012	1680	490	96	12	1

A 259 992

Figure 8

Soit l'alphabet  $\{x, \bar{x}, y, a\}$  et  $\phi_1$  le morphisme de  $Y_1^*$  dans  $\{x, \bar{x}\}^*$  défini par  $\phi_1(x) = \phi_1(y) = x$ ,  $\phi_1(\bar{x}) = \bar{x}$  et  $\phi_1(a) = 1$ .

Le langage  $U \subset Y_1^*$  est défini de la façon suivante:  $f \in Y_1^*$  appartient à  $U$  si et seulement si il vérifie les 2 conditions suivantes:

i)  $\phi_1(f) \in D$ , le langage de Dyck,

ii) une suite de  $a$  est soit au début de  $f$ , soit précédée par un  $\bar{x}$ .

$U_a$  forme le langage des mots de  $U$  commençant par la lettre  $a$  et  $U_x$  le langage des mots de  $U$  ne commençant pas par une lettre  $a$ .

On a donc les équations de langages:

$$U = U_a + U_x$$

$$U_a = aU_a + aU_x$$

D'autre part, un mot  $f$  de  $U_x$  est:

• soit le mot vide 1,

• soit un mot de la forme  $f = x f_1 \bar{x} f_2$  où  $f_1 \in U_x$  et  $f_2 \in U$ ,

• soit un mot de la forme  $f = y f_1 \bar{x} f_2$  où  $f_1 \in U_x$  et  $f_2 \in U$ .

Donc  $U_x$  vérifie l'équation:  $U_x = 1 + xU_x \bar{x}U + yU_x \bar{x}U$  et ainsi  $U$  est donné par le système d'équations:

$$\begin{cases} U = U_a + U_x \\ U_a = aU_a + aU_x \\ U_x = 1 + xU_x \bar{x}U + yU_x \bar{x}U \end{cases} \quad (15)$$

**Théorème 9** La série énumératrice  $u = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$  des mots de  $U$  (où  $u_n$  compte les mots de  $U$  ayant  $n$  lettres dans l'alphabet  $\{x, y, a\}$ ) est égale à  $u = \frac{1-x-\sqrt{(1-9x)(1-x)}}{4x(1-x)}$  et  $u_n$  est égal à  $\sum_{i=0}^n C_i 2^i \binom{n}{i}$ .

### PREUVE:

A partir du système d'équations (15), en passant en commutatif après avoir appliqué le morphisme qui transforme les lettres  $x, y$  et  $a$  en  $x$  et la lettre  $\bar{x}$  en 1, on obtient le système:

$$\begin{cases} u = u_a + u_x \\ u_a = x u_a + x u_x \\ u_x = 1 + 2x u_x u \end{cases}$$

Après élimination, on trouve pour  $u$  l'équation du second degré:

$$2(x - x^2)u^2 + (x - 1)u + 1 = 0.$$

La solution qui donne des coefficients positifs pour  $u$  est  $\frac{1-x-\sqrt{(1-9x)(1-x)}}{4x(1-x)}$ .

D'autre part, un mot  $f$  de  $U$  ayant  $n$  lettres dans l'alphabet  $\{x, y, a\}$  est un mot de Dyck de longueur  $2i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) où les lettres  $x$  sont remplacées par des  $x$  ou des  $y$  ( $2^i$  possibilités) et où les  $n - i$  lettres  $a$  sont mises dans les  $i + 1$  intervalles délimités par les  $\bar{x}$  ( $\binom{n}{i}$  possibilités).  $u_n$  est donc égal à  $\sum_{i=0}^n C_i 2^i \binom{n}{i}$ . ■

Soit  $Y_2$  l'alphabet  $\{x, \bar{x}, a\}$  et  $\phi_2$  le morphisme de  $Y_2^*$  dans  $\{x, \bar{x}\}^*$  qui efface les lettres  $a$ . Le langage  $V \subset Y_2^*$  est défini de la façon suivante:  $f \in Y_2^*$  appartient à  $V$  si et seulement il vérifie les deux conditions suivantes:

i)  $\phi_2(f) \in D$ , le langage de Dyck,

ii) une suite de  $a$  est soit au début de  $f$ , soit précédée par un  $\bar{x}$ .

$V_a$  forme le langage des mots de  $V$  commençant par la lettre  $a$  et  $V_x$  le langage des mots de  $V$  ne commençant pas par un  $a$ .

On a donc les équations de langages:

$$V = V_a + V_z$$

$$V_a = aV_a + aV_z$$

D'autre part un mot  $f$  de  $V_z$  est:

- soit le mot vide 1,
- soit un mot de la forme  $f = x f_1 \bar{x} f_2$  où  $f_1 \in V_z$  et  $f_2 \in V$ .

Donc  $V_z$  vérifie l'équation  $V_z = 1 + xV_z\bar{x}V$  et ainsi  $V$  est donné par le système d'équations:

$$\begin{cases} V = V_a + V_z \\ V_a = aV_a + aV_z \\ V_z = 1 + xV_z\bar{x}V \end{cases} \quad (16)$$

**Théorème 10** La série énumératrice  $v = \sum_{n \geq 0} v_n x^n$  des mots de  $V$  (où  $v_n$  compte les mots de  $V$  ayant  $n$  lettres dans l'alphabet  $\{x, a\}$ ) est égale à  $v = \frac{1-x-\sqrt{(1-5x)(1-x)}}{2x(1-x)}$  et  $v_n$  est égal à  $\sum_{i=0}^n C_i \binom{n}{i}$ .

**PREUVE:**

A partir du système d'équations (16), en passant en commutatif après avoir appliqué le morphisme qui transforme les lettres  $x$  et  $a$  en  $x$  et la lettre  $\bar{x}$  en 1, on obtient le système:

$$\begin{cases} v = v_a + v_z \\ v_a = xv_a + xv_z \\ v_z = 1 + xv_z v \end{cases}$$

Après élimination, on trouve pour  $v$  l'équation du second degré:

$$(x - x^2)v^2 + (x - 1)v + 1 = 0.$$

La solution qui donne des coefficients positifs pour  $v$  est  $\frac{1-x-\sqrt{5x^2-6x+1}}{2x(1-x)}$ .

D'autre part, un mot  $f$  de  $V$  ayant  $n$  lettres dans l'alphabet  $\{x, a\}$  est un mot de Dyck de longueur  $2i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) où les  $n - i$  lettres  $a$  sont mises dans les  $i + 1$  intervalles délimités par les  $\bar{x}$  ( $\binom{n}{i}$  possibilités).  $v_n$  est donc égal à  $\sum_{i=0}^n C_i \binom{n}{i}$ . ■

**Théorème 11**  $h(x) = \sum_{p \geq 0} h_{2p} x^{2p}$ , la série énumératrice des tableaux de Havender de hauteur deux (où  $h_{2p}$  est le nombre de tableaux de Havender ayant 2 lignes et  $p$  colonnes), est égale à

$\frac{\sqrt{1-5x^2}-\sqrt{1-9x^2}}{2x^2\sqrt{1-x^2}} - 1$  et  $h_{2p}$  est égal à:

$$\begin{aligned} h_{2p} &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (2^{i+1} - 1) C_i \\ &= 1 + \sum_{n=1}^p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} C_i (4^{i+1} 5^{n-2i-1} - 3^{n-2i-1}) \\ &= \sum_{q=0}^{2p} \sum_{j=\max(0, p-q)}^{\lfloor \frac{2p-q}{2} \rfloor} \frac{p!(4p-2q-2j)!}{(2p-q-2j)!(j-1)!(2p-q-j)!(2p-q-j)!(q-p+j)!} \end{aligned}$$

**PREUVE:**

Il suffit de voir que  $h(x) = t(x, 1)$ . Ainsi, en utilisant le théorème 4, on obtient  $h(x) = \frac{\sqrt{1-5x^2}-\sqrt{1-9x^2}}{2x^2\sqrt{1-x^2}} - 1$ . En utilisant les résultats des théorèmes 9 et 10, on trouve pour  $h_{2p}$  la formule exacte  $h_{2p} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} (2^{i+1} - 1) C_i$ .

En utilisant le théorème 7, on obtient pour  $h_{2p}$  une deuxième formule exacte:

$$h_{2p} = 1 + \sum_{n=1}^p \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1}{2i} C_i (4^{i+1} 5^{n-2i-1} - 3^{n-2i-1}).$$

Enfin en utilisant le théorème 8, après sommation sur  $q$ , le nombre de cases vides, on trouve la troisième formule exacte  $h_{2p} = \sum_{q=0}^{2p} \sum_{j=\max(0, p-q)}^{\lfloor \frac{2p-q}{2} \rfloor} \frac{p!(4p-2q-2j)!}{(2p-q-2j)!(j-1)!(2p-q-j)!(2p-q-j)!(q-p+j)!}$ .



734.5

Les premières valeurs de  $h_{2p}$  sont ( $1 \leq p \leq 12$ ): 4, 21, 127, 831, 5722, 40879, 300440, 2258455, 17291704, 134417955, 1058279251, 8422155293. ■

**Théorème 12** *Le nombre de tableaux de Havender de hauteur 2 ayant p colonnes est asymptotiquement égal à  $\frac{27}{8\sqrt{2\pi}} \frac{9^p}{p\sqrt{p}} + O(9^p p^{-\frac{5}{2}})$  et le nombre moyen de cases vides dans un tel tableau est asymptotiquement égal à  $\frac{2}{3}p + O(1)$ .*

**PREUVE:**

Le nombre de tableaux de Havender de hauteur deux ayant p colonnes du point de vue asymptotique est obtenu en étudiant les singularités de la série  $\frac{\sqrt{1-5x^2}-\sqrt{1-9x^2}}{2x^2\sqrt{1-x^2}}$ .

La somme du nombre de cases vides des tableaux de Havender ayant p colonnes est obtenue en étudiant les singularités de la série  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\sqrt{(1-x^2y(y+4))(1-x^2y^2)} - \sqrt{(1-x^2(y+2)^2)(1-x^2y^2)}}{2x^2(1-x^2y^2)} \right) \Big|_{y=1}$ .

Ce qui donne, en utilisant le système de calcul formel  $\Lambda\Gamma\Omega$  [6]:  $\frac{9}{4\sqrt{2\pi}} \frac{9^p}{\sqrt{p}} + O(9^p p^{-\frac{3}{2}})$ . ■

**5 Références**

LOOK 

- [1] D.Arques, J.Françon, M.T.Guichet, P.Guichet, *Comparison of algorithms controlling concurrent access to a database: a combinatorial approach*, Theoretical Computer Science, 58(1988), 3-16.
- [2] D.Arques, P.Guichet, *asymptotic behaviour and comparison of algorithms controlling concurrent access to a database*, Tech. Rept. UHA No. 40, Université de Haute Alsace, 1986.
- [3] L.Comtet, *Advanced Combinatorics*, D.Reidel publ. comp. Boston, 1974.
- [4] R.Donaghey, L.W.Shapiro, *Motzkin Numbers*, J.C.T., Ser. A, 23(1977), 291-301.
- [5] P.Flajolet, *Combinatorial Aspects of Continued Fractions*, Discrete Math., 32(1980), 125-161.
- [6] P.Flajolet, B.Salvy, P.Zimmermann, *Lambda-Upsilon-Omega: an assistant algorithms analyser*, Rapport de Recherche N° 876, INRIA Rocquencourt, 1988.
- [7] J.Françon, *Sérialisabilité, communication, mélange et tableaux de Young*, Tech. Rept. UHA No. 27, Université de Haute Alsace, 1985.
- [8] J.Françon, *Une approche quantitative de l'exclusion mutuelle*, RAIRO Inform. Théor., 20(1986), 275-289.
- [9] J.Françon, *Combinatoire et parallélisme*, Journées Mathématiques et Informatique, Marseille-Luminy, 1987.
- [10] H.W.Gould, *Research Bibliography of two Special Number Sequences* rev. ed., Combinatorial Research Institute, Morgantown, W. Va., 1977.
- [11] D.Gouyou-Beauchamps, *Standard Young Tableaux of Height 4 and 5*, Europ. J. Combinatorics, 10(1989), 69-82.
- [12] J.W.Havender, *Avoiding Deadlock in Multitasking Systems*, IBM Systems Journal, 7(1968), 74-84.
- [13] D.E.Knuth, *The art of Computer Programming*, vol. 3, Sorting and Searching, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.
- [14] G.Kreweras, *Sur les éventails de segments*, Cahiers du B.U.R.O., 15(1970), 3-41.
- [15] T.Motzkin, *Relation between hypersurface cross ratio and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance and for non-associative products*, Bul. Amer. Soc., 54(1948), 352-360.

- [16] C.H.Papadimitriou, *Serializability of Concurrent Updates*, JACM, 26(1979), 631-653.
- [17] A.Regev, *Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams*, Adv. Math., 41(1981), 115-136.
- [18] G.Viennot, *Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux*, Soc. Math. France (à paraître).