Indexed

6973

Sur des fonctions symétriques liées aux vecteurs de Witt et à l'algèbre de Lie libre.

Christophe Reutenauer

Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Montréal
C.P. 8888, Succ. A
Montréal (Québec) H3C 3P8
CANADA

Abstract

With the notations of [9], we define symmetric functions q_n by Eq.(1.1). We conjecture that for $n \geq 2$, $-q_n$ is a sum of Schur functions, thus is the characteristic function of some representation of S_n. A first result is the "orthogonality relation" of Th.2.1, where ℓ_n is the symmetric function corresponding to the n-th free Lie algebra representation. The conjecture is deduced when n is a power of 2 (Cor. 2.5). When n is odd, a Hall basis construction shows that $-q_n$ has positive coefficients (Cor. 3.7); when n is a power of an odd prime, the construction of a functor embedded in the free Lie algebra implies the conjecture in this case (Cor. 4.2).

1. Introduction

Nous adoptons les notations de [9], en ce qui concerne les polynômes symétriques en une infinité de variables $x_1, x_2, \ldots$ En particulier, h_n désigne la fonction symétrique complète (somme de tous les monômes distincts de degré n), et p_n la fonction puissance (aussi appelée somme de Newton): $p_n = x_1^n + x_2^n + \ldots$

Désignons par t une nouvelle variable, et définissons des polynômes symétriques q_n $(n \geq 1)$ par la formule

(1.1)
$$\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-q_n t^n} = \sum_{n\geq 0} h_n t^n .$$

On a donc

(1.2)
$$\begin{aligned} q_1 &= h_1 \\ q_1^2 + q_2 &= h_2 \\ q_1^3 + q_1q_2 + q_3 &= h_3 \\ q_1^4 + q_1^2q_2 + q_1q_3 + q_2^2 + q_4 &= h_4 \quad \ldots , \end{aligned}$$

et comme les $h_n (n \geq 1)$ engendrent librement la $\mathbb{Z}$-algèbre $\Lambda(x) = \Lambda$ des polynômes symétriques [9], il en est de même pour les q_n. On remarquera que q_n est homogène de degré n.

La motivation pour l'étude de ces fonctions symétriques q_n provient des vecteurs de Witt: elle m'a été suggérée par des conversations avec A. Joyal; elle se trouve aussi implicitement dans [7] 17.2. Soit $W(\Lambda)$ l'anneau des vecteurs de Witt (généralisé, comme dans [5]) construit sur Λ. Comme par [9] p.17

$$\sum_{n\geq 0} h_n t^n = \exp\left(\sum_{i\geq 1} \frac{p_i}{i} t^i \right) ,$$

on a, par dérivation logarithmique,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{q_n n t^{n-1}}{1-q_n t^n} = \sum_{i\geq 1} p_i t^{i-1} .$$

En multipliant par t, on en tire

(1.3)
$$p_i = \sum_{i=nk} n\, q_n^k ,$$

ce qui exprime que les p_i sont les composantes fantômes des h_i. Soit $y_1, y_2, \ldots,$ une deuxième infinité de variables. On a alors, avec les notations de [9],

$$p_i(x, y) = p_i(x) + p_i(y) \ , \ p_i(xy) = p_i(x)\, p_i(y) \, .$$

Ceci implique que dans $W(\Lambda(x, y))$, la somme et le produit des vecteurs de Witt $(q_n(x))$ et $(q_n(y))$ sont égaux à $(q_n(x, y))$ et $(q_n(xy))$, respectivement. Comme les q_n forment une $\mathbb{Z}$-base de l'algèbre Λ, on a que $q_n(x, y)$ et $q_n(xy)$ s'expriment par des polynômes sur $\mathbb{Z}$ en les $q_i(x)$, $q_j(y)$. Et comme les fonctions q_n sont algébriquement indépendantes, on en déduit l'intégralité des polynômes exprimant la somme et le produit des vecteurs de Witt. Ainsi se trouve démontré un résultat de base sur les vecteurs de Witt.

Metropolis et Rota donnent dans [10] p.117 la formule suivante:

$$(1 - az)^{-1} (1 - bz)^{-1} = (1 - q_1 z)^{-1} (1 - q_2 q)^{-1} (1 - q_3 z)^{-1} \ldots ,$$

$$\begin{aligned} q_1 &= a + b \\ q_2 &= -ab \\ q_3 &= -a^2b - ab^2 \\ q_4 &= -ab(a + b)^2 \, . \end{aligned}$$

Les quatre dernières formules donnent l'expression des polynômes symétriques $q_n(a, b)$, pour $n =$ 1 à 4. Des calculs plus étendus conduisent à la conjecture suivante:

Conjecture 1: Pour $n \geq 2$, les polynômes symétriques $-q_n$ sont à coefficients positifs.

Classiquement, dans la théorie des fonctions symétriques, une telle conjecture en cache une autre, plus forte.

Conjecture 2: Pour $n \geq 2$, les polynômes symétriques $-q_n$ sont des sommes de fonctions de Schur.

Autrement dit, $-q_n$ est la fonction caractéristique (ou image de Frobenius) d'une représentation du groupe symétrique. La table des caractères de cette représentation (i.e. l'expression des q_n en fonction des p_n) donnerait les formules exprimant un vecteur de Witt en fonctions de ses composantes fantômes.

La conjecture 2 a été vérifiée sur ordinateur jusqu'à $n = 18$ (grâce à un sous-système de Maple, conçu par J. Stembridge). Elle est appuyée aussi par le résultat suivant: soit $-d_n$ la dimension de la représentation (conjecturée) correspondant à $-q_n$, pour $n \geq 2$. Ces nombres sont alors définis par la formule suivante, exprimant que les composantes fantômes de $(d_n/n!)$ sont (1, 0, 0, ...):

$$e^t = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-\left(\frac{d_n}{n!}\right)t^n} ,$$

Cette formule est obtenue en exprimant q_n en fonctions des p_n, et en projetant sur $\mathbb{Q}[[p_1]]$. Borwein et Shituo [2] ont montré directement qu'on a les inégalités

$$(1.4) \qquad 1 - \frac{2}{n} \leq \frac{-d_n}{(n-1)!} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} ,$$

si $n \geq 2$. Les premières valeurs de la suite $-d_n (n \geq 2)$ sont 1, 2, 9, 24, 130, 720, 8505, 35840, 412776, 3628800. Cette suite ne figure pas dans les tables de Sloane [11]. Pour n premier, $-d_n = (n-1)!$, comme on le voit facilement à partir de (1.3), et comme il découle de la suite de cet article. Le fait que $-d_n$ est équivalent à $(n-1)!$ s'interprète dans la suite comme le fait qu'un certain foncteur n'est pas très loin de l'algèbre de Lie libre (la dimension multilinéaire de celle-ci est $(n-1)!$).

Nous résumons maintenant cet article. Au paragraphe 2, nous rappelons quelles sont les fonctions symétriques ℓ_n, caractéristiques de l'action du groupe symétrique (ou linéaire) sur l'algèbre de Lie libre, et prouvons la "relation d'orthogonalité" (th.2.1)

$$\sum_{d|n} \ell_d \circ q_{n/d} = 0 \quad (n \geq 2) ,$$

où $\circ$ désigne le pléthysme des fonctions symétriques (qui correspond à la composition des représentations associées). Lorsque n est une puissance de 2, cette relation se réécrit, en utilisant la règle des signes du pléthysme,

$$-q_n = \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} \ell_d \circ (-q_n) .$$

Ceci implique la conjecture 2 dans ce cas (cor.2.5). Si n est impair, la relation d'orthogonalité s'écrit

$$-q_n = \ell_n - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} \ell_d \circ (-q_n) .$$

Sachant que ℓ_n énumère les éléments du magma libre correspondant à une base de Hall, on construit un sous-ensemble de cet ensemble énumérant $-q_n$. Ceci prouve la conjecture 1 dans le cas impair (cor.3.7). La "linéarisation" de cette construction conduit à introduire des foncteurs particuliers, naturellement plongés dans l'algèbre de Lie libre; le fait que ces foncteurs correspondent aux fonctions $-q_n$, c'est-à-dire qu'une certaine somme de sous-espaces est directe, est démontrée dans le cas où n est une puissance d'un nombre premier. Ainsi est démontrée la conjecture 2 dans ce cas (cor.4.2). Cette conjecture se trouve donc démontrée lorsque n est une puissance d'un nombre premier quelconque, ce qui correspond peut-être à la construction des vecteurs de Witt [14] usuels pour un nombre premier p (quoique la conjecture semble vraie en général).

2. Relation d'orthogonalité

Si g et h sont deux polynômes symétriques, nous désignons $g \circ h$ le *pléthysme* de h dans g [9]. Considérons les polynômes symétriques $\ell_n (n \geq 1)$ définis par

$$\ell_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\, p_d^{n/d} . \tag{2.1}$$

Ces polynômes sont déjà essentiellement chez Witt [13] ("formule de Witt"), et explicitement dans [4]; ils "énumèrent l'algèbre de Lie libre", i.e. le coefficient dans ℓ_n du monôme $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots$ (de degré n) est égal à la dimension de la composante de multi-degré $(i_1, i_2, \ldots)$ de l'algèbre de Lie libre. L'équivalence de cette formulation et de la formule de Witt se trouve par exemple dans [1] et [12].

Théorème 2.1: *Pour* $n \geq 2$, *on a la formule*

$$\sum_{d|n} \ell_d \circ q_{n/d} = 0 .$$

Nous utilisons un lemme du à Joyal [8], que nous démontrons pour faciliter la lecture du présent article. Notons H et L les fonctions symétriques $H = \Sigma_{n \geq 0} h_n$ et $L = \Sigma_{n \geq 1} \ell_n$.

Lemme 2.2: *On a la formule*

$$H \circ L = \frac{1}{1 - p_1} . \tag{2.2}$$

Joyal démontre cette formule en deux étapes: il montre d'abord que le composé des deux foncteurs analytiques "algèbre symétrique" et "algèbre de Lie libre" s'identifie au foncteur analytique "algèbre tensorielle" (comme conséquence du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt), puis il obtient la formule (2.2) en passant aux séries indicatrices et par inversion de Möbius.

Nous utiliserons le pléthysme sous la forme suivante. La $\mathbb{Q}$-algèbre des fonctions symétriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ s'identifie à l'anneau des séries formelles sur $\mathbb{Q}$ en les $p_i (i \geq 1)$. Si g, h sont écrites comme des séries en les p_i : $g = g(p_1, p_2 \ldots)$, $k = k(p_1, p_2, \ldots)$, notons k_j la fonction symétrique $k_j = k(p_j, p_{2j}, \ldots)$. Alors le pléthysme est donné par la formule

$$g \circ k = g(k_1, k_2, \ldots) . \tag{2.3}$$

On suppose bien entendu que k est sans terme constant. Nous utiliserons aussi la formule bien connue [9]

$$H = \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{p_i}{i}\right) . \tag{2.4}$$

Preuve du lemme: On a

$$\begin{aligned} H \circ L &= \exp\left(\sum_{i\geq 1} \frac{p_i}{i}\right) \circ L \\ &= \exp\left(\sum_{i\geq 1} \frac{L_i}{i}\right) \qquad \text{d'après (2.3)} . \end{aligned}$$

Or, d'après (2.1)

$$\begin{aligned} \sum_{i\geq 1} \frac{L_i}{i} &= \sum_{\substack{1 \leq d \mid n \\ i \geq 1}} \frac{1}{i}\frac{1}{n} \mu(d)\, p_{di}^{n/d} \\ &= \sum_{s,t\geq 1} p_s^t \sum_{d \mid s} \frac{1}{st} \mu(d) \\ &= \sum_{t \geq 1} \frac{1}{t} p_1^t \\ &= \log\left(\frac{1}{1-p_1}\right) . \end{aligned}$$

On en déduit (2.2). ❑

D'après (2.3), on a $p_1 \circ k = k_1$, et $g \longmapsto g \circ k$ est un homomorphisme d'algèbres. On a donc, pour toute famille sommable (k_α) de fonctions symétriques sans terme constant

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{p_i}{i}\right) \circ \left(\sum_\alpha k_\alpha\right) &= \exp\left(\frac{p_i}{i} \circ \sum_\alpha k_\alpha\right) \\ &= \exp\left(\sum_\alpha \frac{1}{i} (k_\alpha)_i\right) \end{aligned}$$

$$= \prod_{\alpha} \exp\left(\frac{1}{i} p_i \circ k_\alpha\right)$$

$$= \prod_{\alpha} \exp\left(\frac{1}{i} p_i\right) \circ k_\alpha .$$

Or, d'après (2.4)

$$H = \prod_{i} \exp\left(\frac{p_i}{i}\right) .$$

On en déduit

$$H \circ \sum h_\alpha = \left(\prod_{i} \exp\left(\frac{p_i}{i}\right)\right) \circ \sum k_\alpha$$

$$= \prod_{i} \exp\left(\frac{p_i}{i}\right) \circ \sum k_\alpha$$

$$= \prod_{i} \prod_{\alpha} \exp\left(\frac{1}{i} p_i\right) \circ k_\alpha$$

$$= \prod_{\alpha} \prod_{i} \exp\left(\frac{1}{i} p_i\right) \circ k_\alpha$$

$$= \prod_{\alpha} \left(\prod_{i} \exp \frac{1}{i} p_i\right) \circ k_\alpha$$

$$= \prod_{\alpha} H \circ k_\alpha .$$

Nous avons donc

$$H \circ \sum_{\alpha} k_\alpha = \prod_{\alpha} H \circ k_\alpha , \tag{2.5}$$

ce qui montre le fait bien connu: H joue le rôle d'une exponentielle pour le pléthysme.

Preuve du théorème: On a $\frac{1}{1 - p_1} \circ q_n = \frac{1}{1 - q_n}$. On déduit alors de (1.1)

$$H = \prod_{m \geq 1} \frac{1}{1 - q_m} = \prod_{m \geq 1} \frac{1}{1 - p_1} \circ q_m$$

$$= \prod_{m \geq 1} H \circ L \circ q_m$$

$$= H \circ \left(\sum_{m \geq 1} L \circ q_m\right)$$

d'après (2.5). Le coefficient de p_1 dans la fonction H - 1 est 1; on déduit donc des théorèmes généraux d'inversion qu'il existe K tel que $K \circ (H - 1) = p_1$. Comme $H - 1 = (H - 1) \circ (\Sigma_{m \geq 1} L \circ q_m)$, on en tire $p_1 = \Sigma_{m \geq 1} L \circ q_m$. Revenant à la définition de L, on trouve

$$\sum_{d,m\geq 1} \ell_d \circ q_m = p_1 ,$$

et le théorème s'en déduit par projection sur la composante homogène de degré n. ❑

Notons ω l'automorphisme involutif de l'algèbre des fonctions symétriques défini par la formule

(2.6) $$\omega(p_i) = (-1)^{i-1} p_i .$$

De celle-ci et de (2.3), on déduit que pour des polynômes symétriques homogènes g, h, avec h de degré n, on a

(2.7) $$g \circ (-h) = (-1)^n \omega(g) \circ h ,$$

(cf [9], ex.1 p.67).

Corollaire 2.3: *On a pour* $n \geq 2$

$$-q_n = \ell_n + \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} (-1)^d \omega(\ell_d) \circ (-q_{n/d})$$

En particulier, si n est premier, on a $-q_n = \ell_n$.

Preuve: Le résultat découle immédiatement de ce que $q_1 = p_1 = \ell_1$ est élément neutre pour le pléthysme, du théorème 2.1 et de (2.7). ❑

Comme remarqué en [6], on a $\omega(\ell_d) = \ell_d$ si d n'est pas le double d'un nombre impair: cela découle en effet de (2.6) et (2.1). On en déduit immédiatement le résultat suivant.

Corollaire 2.4: *Soit* n *un entier impair* ≥ 3. *Alors*

$$-q_n = \ell_n - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} \ell_d \circ (-q_{n/d}) .$$

La fonction symétrique ℓ_n est la fonction caractéristique de la représentation du groupe symétrique S_n agissant sur la composante de multi-degré (1, ..., 1) (n fois) de l'algèbre de Lie libre. Par suite ℓ_n est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{N}$ de fonctions de Schur (voir par exemple [9]). Nous notons s_λ la fonction de Schur correspondant à la partition λ.

Corollaire 2.5: *Si* n *est une puissance de* 2, *alors*

$$-q_n = \ell_n + \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} \omega(\ell_d) \circ (-q_{n/d})$$

En particulier, $-q_n$ *est une combinaison linéaire positive de fonctions de Schur, et correspond donc à une représentation de* S_n.

Preuve: Cela découle du Corollaire 2.3, de $-q_2 = \ell_2 = s_{11}$, et de ce que le pléthysme préserve les combinaisons linéaires positives de fonctions de Schur (et même que le pléthysme homogène correspond au produit en couronne des représentations; voir [9] A7). ❑

3. Une interprétation combinatoire

Motivé par le corollaire 2.4, nous définissons récursivement des fonctions symétriques r_n(n ≥ 1) par

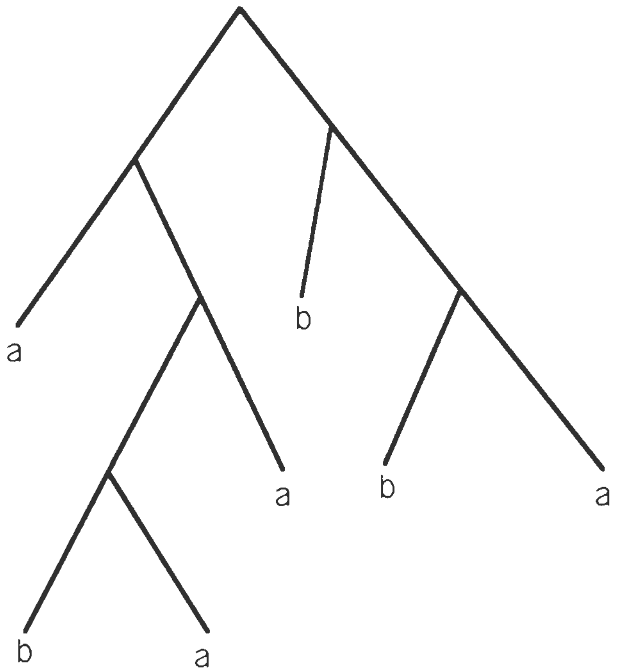
(3.1) $$r_n = \ell_n - \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} \ell_d \circ r_{n/d} .$$

On remarquera qu'on a donc

(3.2) $$r_n = -q_n \ , \quad \text{si n impair} \geq 3 .$$

Ceci découle du corollaire 2.4.

Nous allons donner une interprétation combinatoire à ces polynômes symétriques r_n. Pour cela, nous avons besoin des ensembles et bases de Hall. Soit X un ensemble de variables: le *magma libre* M(X) consiste en tous les arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées dans X, ou encore en les expressions bien parenthésées en les éléments de X (voir figure 3.1; rappelons qu'un magma est une ensemble avec une loi de composition interne).



= ((a,((b,a),a)),(b,(b,a)))

Figure 3.1

Le *degré* | a | d'un arbre a est le nombre de ses feuilles. Pour tout arbre a de degré au moins 2, nous notons a'(resp. a") son sous-arbre gauche (resp. droit). Nous écrivons a = (a', a"). Soit $\leq$ un ordre total sur M(X) vérifiant la condition

(3.3) $$\forall a, b \in M(X) \ , \ |a| > |b| \ \Rightarrow \ a > b \, .$$

On définit alors récursivement l'ensemble de Hall H, relatif à cet ordre, par: $X \subseteq H$, et pour tout a = (a', a"), a est dans H si et seulement si les 2 conditions suivantes sont réalisées:

(3.4) $$a', a'' \in H \ \text{ et } \ a' > a'' \, ;$$

(3.5) $$\text{soit } a' \in X \ , \ \text{ soit } a' = (b, c) \ \text{ avec } \ c \leq a'' .$$

Nous appelons *poids* d'un arbre a, noté p(a), le monôme, dans $\mathbb{Z}[X]$, qui est égal au produit des étiquettes des feuilles de a. Si A est un ensemble d'arbres, nous dirons que la série formelle, dans $\mathbb{Z}[[X]]$, qui est la somme de tous les poids des arbres dans A, *énumère* A.

Lemme 3.1: *La fonction symétrique* L *énumère* H.

Preuve: Chaque arbre de Hall (i.e. élément de H) détermine un élément d'une base (de Hall) de l'algèbre de Lie libre, de même multi-degré que lui (voir [3]). Le lemme s' en déduit, moyennant la remarque suivant la définition (2.1) de ℓ_n. ❑

Soit n un entier fixé et Y un ensemble d'arbres de degré n. On peut considérer le magma libre M(Y), et l'homomorphisme de magma canonique $M(Y) \to M(X)$, qui prolonge l'identité sur Y. Cette application est clairement injective, et nous identifierons M(Y) à un sous-magma de M(X). L'ordre $\leq$ sur M(X) définit par restriction un ordre $\leq_Y$ sur M(Y), qui vérifie clairement la condition (3.3) relative à M(Y). On obtient donc un ensemble de Hall H(Y) dans M(Y).

Nous définissons récursivement un ensemble d'arbres de Hall. Notons H_n l'ensemble des arbres de Hall de longueur n, $Y_1 = H_1 = X$, et pour $n \geq 2$

(3.6) $$Y_n = H_n \setminus \bigcup_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} H(Y_d)\,.$$

Théorème 3.2: *Le polynôme symétrique* r_n *énumère* Y_n.

Nous démontrons d'abord plusieurs lemmes.

Lemme 3.3: *Si* Y *est un sous-ensemble de* H_n, *alors* $H(Y) \subseteq H$.

Preuve: On a $Y \subseteq H$ par hypothèse. Soit a un élément de H(Y), de Y-degré ≥ 2. On peut écrire dans M(Y), d'après (3.4) et (3.5): a = (a', a"), a', a" $\in$ H(Y), a' $>_Y$ a" et soit a' $\in$ Y, soit a' = (u, v) dans M(Y) et v $\leq_Y$ a". Comme $\leq_Y$ coïncide avec $\leq$ sur M(Y), le seul cas méritant l'attention est celui où a' $\in$ Y et a' = (b, c), b, c $\in$ M(X). Mais alors $| c | < | a' | = n$ (puisque a' $\in$ Y) et $| a" | \geq n$ (puisque a" $\in$ M(Y)). D'où $| c | < | a" |$ et c < a" par (3.3). On en conclut a $\in$ H, par (3.4) et (3.5), puisque par hypothèse de récurrence a', a" $\in$ H. ❑

Lemme 3.4: *Si* Y *est un sous-ensemble de* H_n, *alors* H(Y) *est énuméré par* $L \circ S$, *où* Y *est énuméré par* S.

Preuve: Soit $p_Y(a)$ le Y-poids d'un élément a de M(Y), i.e. le monôme dans $\mathbb{Z}[Y]$ obtenu par produit des étiquettes des feuilles de a. Comme H(Y) est une ensemble de Hall, on a

$$\sum_{a\in H(Y)} p_Y(a) = L(Y)\,,$$

d'après le lemme 3.1. Soit $\theta : \mathbb{Z}[[Y]] \to \mathbb{Z}[[X]]$ l'homomorphisme défini par $\theta(y) = p(y)$, pour tout arbre y dans Y. Alors pour tout arbre a dans M(Y), $p(a) = \theta(p_Y(a))$. Par suite

$$\sum_{a \in H(Y)} p(a) = \theta(L(Y)) .$$

Mais par ailleurs, $S = \sum_{y \in Y} p(y)$, et, avec des notations évidentes, on a $L \circ S = L(p(y_1), p(y_2), \ldots)$, où $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ (voir [9] (8.2) p.65). Ceci s'écrivant aussi $L \circ S = \theta(L(Y))$, le lemme s'en déduit. ❑

Lemme 3.5: *Si* $n \neq p$ $(n, p \geq 2)$, *alors les ensembles* $H(Y_n)$ *et* $H(Y_p)$ *sont disjoints.*

Preuve: Supposons $a \in H(Y_n) \cap H(Y_p)$. Si $a \in Y_n$, alors $a \in Y_n \cap H(Y_p)$, donc $n = | a | = pq$, où q est la Y_p-longueur de a. On a $p \neq 1, n$, ce qui contredit (3.6). Il en est de même si $a \in Y_p$.

Nous pouvons donc supposer que les Y_p - et Y_n-degrés de a sont ≥ 2. On aura alors la même factorisation a = (a', a'') dans $M(Y_p)$ et $M(Y_q)$, avec $a' \in H(Y_p)$ et $a' \in H(Y_q)$ d'après (3.4). On conclut donc par récurrence. ❑

Preuve du théorème: On raisonne par récurrence sur n. Le cas n = 1 est clair. Supposons $n \geq 2$ et soit $d|n$, $d \neq 1, n$. Alors les arbres de degré n dans $H(Y_{n/d})$ sont, d'après le lemme 3.4, énumérés par la partie homogène de degré n de $L \circ r_{n/d}$, i.e. $\ell_d \circ r_{n/d}$. Mais ces arbres sont, d'après le lemme 3.3, tous contenus dans H_n, qui est énuméré par ℓ_n. Comme pour $d \neq e$, les arbres dans $H(Y_{n/d})$ et $H(Y_{n/e})$ sont distincts (lemme 3.5), on obtient que, d'après (3.6), Y_n est énuméré par $\ell_n - \sum_{\substack{d|n \\ d \neq 1,n}} \ell_d \circ r_{n/d}$. C'est-à-dire r_n, d'après (3.1). ❑

Corollaire 3.6: *Le polynôme symétrique* r_n *est à coefficients positifs.*

Autrement dit, r_n s'exprime comme combinaison linéaire sur $\mathbb{N}$ dans la base des fonctions symétriques monomiales m_λ.

Corollaire 3.7: *Si* n *est un entier impair* ≥ 3, $-q_n$ *est à coefficients positifs.*

Ceci découle du corollaire 3.6 et de (3.2).

4. Une interprétation fonctorielle

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1: *Si* n *est une puissance d'un nombre premier, la fonction symétrique* r_n *(voir* (3.1)*) est une somme de fonctions de Schur.*

On obtient donc, avec (3.2):

Corollaire 4.2: *Si* $n > 1$ *est une puissance d'un nombre premier impair, la fonction symétrique* $-q_n$ *est une somme de fonctions de Schur.*

Pour démontrer le théorème, nous utilisons le formalisme des foncteurs polynomiaux de Macdonald [9] (appendice au chapitre 1; on pourrait aussi utiliser les foncteurs analytiques de Joyal [8]). Nous allons construire un foncteur polynomial R_n qui soit énuméré par la fonction symétrique r_n (voir [9] p.83). Cela démontrera le théorème.

Notons L_n le foncteur polynomial "partie homogène de degré n de l'algèbre de Lie libre": de manière formelle, pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{Q}$, $L_n(V)$ est l'espace des polynômes de Lie homogènes de degré n dans l'algèbre de Lie libre L(V) construite sur V. D'après la remarque suivant (2.1), le foncteur L_n est énuméré par ℓ_n. Définissons $R_1 = L_1$. Soit $n \geq 2$, et supposons construits $R_1, \ldots, R_{n-1}$, plongés naturellement dans $L_1, \ldots, L_{n-1}$ respectivement. Pour $f < n$ notons $V_{e,f}$ le sous-espace de L(V) engendré par les polynômes de Lie de la forme $Q(P_1, \ldots, P_k)$, où $Q(t_1, \ldots, t_k)$ est un polynôme de Lie homogène de degré e en des variables non commutatives $t_1, \ldots, t_k$, et $P_1, \ldots, P_k$ des éléments dans $R_f(V)$. $V_{e,f}$ est donc un sous-espace de $L_{ef}(V)$, et $V \to V_{e,f}$ est un foncteur polynomial. Il en est de même de la somme

$$S_n(V) = \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} V_{d,n/d} \tag{4.1}$$

qui est un foncteur polynomial naturellement plongé dans $L_n(V)$. Il existe donc un foncteur polynomial R_n tel qu'on ait une somme directe

$$L_n(V) = R_n(V) \oplus S_n(V)\,. \tag{4.2}$$

Nous allons montrer que le foncteur $V_{d,n/d}$ est énuméré par la fonction symétrique $\ell_d \circ r_{n/d}$, et que la somme (4.1) est directe quand n est une puissance d'un nombre premier. On en déduira le théorème, à cause de la définition (3.1) des fonctions r_n.

Lemme 4.3: Si R_f *est énuméré par* r_f*, alors le foncteur polynomial* $V_{e,f}$ *est énuméré par* $\ell_e \circ r_f$.

Preuve: D'après [9] (p.84), le foncteur composé $L_e \circ R_f$ est énuméré par $\ell_e \circ r_f$. Comme R_f est naturellement plongé dans L_f, il existe une transformation naturelle $L_e \circ R_f \to L_{ef}$, dont l'image est $V_{e,f}$, par définition de ce dernier. Pour démontrer que cette transformation naturelle est injective, il suffit de vérifier que la transformation naturelle $L_e \circ L_f \to L_{ef}$ est injective. Mais cela découle de la théorie des bases de Hall, et plus précisément du lemme 3.3. ❑

Lemme 4.4: Si n *est une puissance d'un nombre premier, la somme* (4.1) *est directe.*

Preuve: Soit $n = p^u$, $u \geq 1$, p premier. Supposons que la somme (4.1) ne soit pas directe. Il existe donc une relation

$$(4.3) \qquad \sum_{\substack{d|n \\ d\neq 1,n}} P_d = 0,$$

où $P_d \in V_{d,n/d}$ est un polynôme homogène de degré n et $P_d \neq 0$ pour au moins un d. Nous pouvons supposer $P_{p^\ell} \neq 0$, et $P_{p^k} = 0$ pour $0 < k < \ell$, pour un certain $\ell \in \{1, \ldots, u-1\}$. Par définition de $V_{d,n/d}$, P_d est un polynôme de Lie en les éléments de $R_{n/d}(V)$, donc a fortiori de la forme

$$P_d = \sum_i \alpha_{di} Q_{di1} \ldots Q_{did},$$

où $\alpha_{di} \in \mathbb{Q}$ et où $Q_{dij} \in R_{n/d}(V)$ est de degré n/d. Comme P_{p^ℓ} est non nul, nous pouvons aussi supposer que

$$P_{p^\ell} = \sum_j Q_j T_j,$$

où les Q_j sont linéairement indépendants, où $Q_j \in R_{n/p^\ell}(V)$ est de degré $p^{u-\ell}$ et T_j de degré $p^u - p^{u-\ell}$, et où $T_1 \neq 0$. La relation (4.3) s'écrit alors

$$\sum_j Q_j T_j + \sum_{u>k>\ell} \sum_i \alpha_{p^k i} Q_{p^k i1} \ldots Q_{p^k i p^k} = 0.$$

On remarquera que pour $k > \ell$, le polynôme $Q_{p^k i1} \ldots Q_{p^k ip^k}$ est le produit des deux polynômes $Q_{p^k i1} \ldots Q_{p^k ip^{k-\ell}}$ et de $Q_{p^k i(p^{k-\ell}+1)} \ldots Q_{p^k ip^k}$, qui sont homogènes de degré $(p^u/p^k)(p^{k-\ell}) = p^{u-\ell}$ et $p^u - p^{u-\ell}$, respectivement. Or, d'une relation

$$\sum A_i B_i = 0$$

dans l'algèbre associative libre, où les A_i (resp. B_i) sont des polynômes homogènes de degré a (resp. b), avec $B_1 \neq 0$, on déduit que A_1 est combinaison linéaire des autres A_i. On en déduit que

$$Q_1 + \sum_{j \neq 1} \beta_j Q_j = \sum_{u>k>\ell} \sum_i \gamma_{ki} Q_{p^k i1} \cdots Q_{p^k i p^{k-\ell}} , \tag{4.4}$$

où les β_j et γ_{ki} sont des scalaires. Comme les Q_j ont été supposés linéairement indépendants, nous en concluons qu'un polynôme P non nul dans $R_{n/p^\ell}(V)$ est combinaison linéaire de polynômes de la forme

$$S_1 \ldots S_d ,$$

où les S_i sont dans $R_{n/p^\ell d}(V)$, et $d \mid n/p^\ell$, $d \neq 1$, $d \neq n/p^\ell$. Ces polynômes S_i peuvent être supposés linéairement indépendants, et nous pouvons donc les intégrer à une base totalement ordonnée de l'algèbre de Lie libre; par redressement et par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (ou par projection canonique sur l'algèbre de Lie libre), nous en concluons que P est dans $\sum_{\substack{d \mid n/p^\ell \\ d \neq 1, n/p^\ell}} V_{d, n/p^\ell d}$, ce qui contredit (4.2). ❑

Remerciements. Je tiens à remercier D. Taylor et A. Joyal pour des conversations sur les vecteurs de Witt, qui ont précédé ce travail. Enfin, je remercie tout particulièrement M.-P. Schützenberger, dont l'assistance au présent travail a été déterminante.

Références

[1] D. Blessenohl, H. Laue, *On Witt's dimension formula for free Lie algebras and a theorem of Klyachko*, Bull. Austral. Math. Soc. **40** (1989) 49-57.

[2] J. Borwein, L. Shituo, *Asymptotics of a sequence of Witt vectors*, manuscript (1990).

[3] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres II et III, Diffusion CCLS, Paris (1972).

[4] A. Brandt, *The free Lie ring and Lie representations of the full linear group*, Trans. Amer. Math. Soc. **56** (1944) 528-536.

[5] P. Cartier, *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés*, C.R. Acad. Sc. Paris **265** (1967) 49-52.

[6] H.O. Foulkes, *The analysis of the characters of the Lie representations of the general linear group*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959) 497-501.

[7] M. Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Acad. Press, New York (1978).

[8] A. Joyal, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, dans: Combinatoire Énumérative, Actes, Montréal (1985), ed. G. Labelle et P. Leroux, Lect. Notes Math. 1234 (1986) 126-159.

[9] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press (1979).

[10] N. Metropolis, G.-C. Rota, *Witt vectors and the algebra of necklaces*, Advances Math. **50** (1983) 95-125.

[11] N.J.A. Sloane, *A handbook of integer sequences*, Acad. Press, Orlando (1973).

[12] F. Wever, *Über Invarianten in Lieschen Ringen*, Math. Annalen **120** (1949) 563-580.

[13] E. Witt, *Treue Darstellung Liescher Ringe*, J. Reine Angew. Math. **177** (1937) 152-160.

[14] E. Witt, *Zyklishe Körper und Algebren der Characteristik p vom Grad p^m*, J. Reine Angew. Math. **176** (1937) 126-140.

Déjà parus

Pour obtenir la liste des 130 premiers rapports, s'adresser au responsable de la publication des rapports de recherche.[1]

131. **Lalonde, P.** (20 septembre 1990)
Lyndon Heaps: An Analogue of Lyndon Words in Partially Commutative Monoids

132. **Bergeron, F. et Bergeron, N.** (10 octobre 1990)
Symbolic Manipulation in Descent Algebras of Coxeter Groups

133. **Dion, J.-P. et Yanev, N. M.** (29 octobre 1990)
Limit Theorems and Estimation Theory for Branching Processes With or Without Immigration

134. **Labelle G. et Laforest L.** (31 octobre 1990)
Étude asymptotique du nombre moyen de noeuds à un enfant dans un arbre quaternaire

135. **Reutenauer, C. et Schützenberger, M.-P.** (14 novembre 1990)
Sur les fonctions de mots rationnelles

136. **Godin, R., Missaoui, R. et April, A.** (26 novembre 1990)
Experimental Comparison of Galois Lattice Browsing With Conventional Information Retrieval Methods

137. **Labrèche, M.** (30 novembre 1990)
Polynômes orthogonaux et processus de naissance et de mort

138. **Chiricota, Y.** (18 décembre 1990)
Représentation des structures en Maple

139. **Melançon, G.** (19 décembre 1990)
Construction de bases des idéaux à droite dans l'algèbre des polynômes non commutatifs

140. **Charras, A. et van Eeden, C.** (15 janvier 1991)
Inadmissibility for Squared Error Loss of the MLE of a Left Truncated Mean of an Exponential Distribution

141. **Mili, H.** (8 mars 1991)
Reusing Software: Issues and Research Directions

142. **Labelle, G.** (11 mars 1991)
Counting Asymmetric Enriched Trees

143. **Ferland, R., Fernique, X. et Giroux, G.** (22 mars 1991)
Compactness of the Fluctuations Associated with some Generalized Nonlinear Boltzmann Equations

144. **Lamnabhi-Lagarrigue, F., Leroux, P. et Viennot, X. G.** (19 mars 1991)
Combinatorial Approximations of Volterra Series by Bilinear Systems

145. **Labelle, J.** (20 mars 1991)
Quelques problèmes concernant les chemins de Dyck généralisés

146. **Lalonde, F.** (15 avril 1991)
Suppression lagrangienne de points doubles et rigidité symplectique

147. **Belaga, S. E. G.** (29 avril 1991)
On the Probable Failure of the Uncountable Power Set Axiom

148. **Bergeron, F. et Bergeron, N.** (24 mai 1991)
Orthogonal Idempotents in the Descent Algebra of B_n and Applications

149. **Bergeron, F., Bergeron N. et et al.** (7 juin 1991)
A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group

150. **Lalonde, F.** (7 juin 1991)
Engouffrement hamiltonien de sous-variétés lagrangiennes irrationnelles avec petit premier nombre de Betti

---

1 *Le responsable actuel est Alain Latour.*

151. **Chiricota, Y. et Labelle, G.** (13 juin 1991)
Familles de solutions combinatoires de $y' = 1 + y^2$ *et d'équations différentielles autonomes*
152. **Bergeron, A.** (26 juin 1991)
Symbolic Computation and Discrete Probabilities
153. **Mili Hafedh** (26 juin 1991)
Hypertext: Managing Software Documentation Within an Object-Oriented Tool for Software Reuse
154. **Leslie, J. et van Eeden, C.** (16 juillet 1991)
On a Characterization of the Exponential Distribution Based on a Type 2 Right Censored Sample
155. **Godin, R., Missaoui, R. et Alaoui, H.** (9 septembre 1991)
Incremental Algorithms for Updating the Galois Lattice of a Binary Relation
156. **Björner, A. et Reutenauer, C.** (9 septembre 1991)
Rationality of the Möbius Function of Subword Order
157. **Boyer, S.** (16 septembre 1991)
Realization of Simply-Connected 4-Manifolds with a Given Boundary
158. **Joyal, A. et Tierney, M.** (20 septembre 1991)
Classifying Spaces for Sheaves of Simplicial Groupoids
159. **Joyal, A. et Tierney, M.** (20 septembre 1991)
Strong Stacks And Classifying Spaces
160. **Froda, S. et Luong, A.** (26 septembre 1991)
Minimum Distance Estimators for the Accelerated Failure Model
161. **Leroux, P. et Miloudi, B.** (30 septembre 1991)
Généralisations de la formule d'Otter
162. **Villemaire, R.** (30 septembre 1991)
The Theory of $<\mathrm{N}, +, V_k, V_\ell>$ *Is Undecidable*
163. **Cherkaoui, O., Cléroux, R. et MacGibbon, B.** (22 octobre 1991)
On Exact Analytic Solutions to Inference Problems for Two-Way Multinomial Contingency Tables with Ordinal Variables under Positive Association
164. **Bergeron, F. et Plouffe, S.** (22 octobre 1991)
Computing the Generating Function of a Series Given its First Terms
165. **Bélair, L.** (25 novembre 1991)
Infinitesimally Stable Theories of Henselian Rings
166. **Kovalev, M.** (25 novembre 1991)
Méthode d'ordre partielle en optimisation combinatoire
167. **Bédard, R.** (3 décembre 1991)
Generic Roots and Reflection Representations of Hecke Algebras
168. **Plante, A.** (23 janvier 1992)
An Inclusion-consistent Solution to the Problem of Absurd Confidence Statements: 2. Consistent-Nonexact Confidence Interval Estimation
169. **Gessel, I. M. et Reutenauer, C.** (23 janvier 1992)
Counting Permutations With Cycle Structure and Descent Set
170. **Malvenuto, C.** (23 janvier 1992)
P-Partitions and the Plactic Congruence
171. **Dion , J.-P., Dimitrov, B. et Khalil, Z.** (3 février 1992)
Statistical Estimation of the Parameters of a Production-Demand Process
172. **Dion, J.-P. et Ferland, R.** (26 février 1992)
Absolute Continuity, Singular Measures and Asymptotics for Estimators
173. **Brlek, S. et Mallette, R.** (26 février 1992)
Sur le calcul des chaînes d'additions optimales
174. **Décoste, H.** (6 mars 1992)
Séries indicatrices et q-séries

175. Joyal, A. et Street, R. (17 mars 1992)
An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups

176. Bergeron, F., Flajolet, P. et Salvy, B. (26 mars 1
Varieties of Increasing Trees

177. Reutenauer, C. (26 mars 1992)
Sur des fonctions symétriques liées aux vecteurs de Witt et à l'algèbre de Lie libre

178. Charras, A. et van Eeden, C. (31 mars 1992)
Inadmissibility for Squared Error Loss when the Parameter to Be Estimated is Restricted to the Interval $[a, \infty)$

Scan 6973
Reutenauer
Original
in English