Scan A6973

Reutenauer

in French

J94 A6973

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, p. 487-490, 1991

Algèbre/*Algebra*

Sur des fonctions symétriques reliées aux vecteurs de Witt

Christophe REUTENAUER

Résumé – On définit, par un produit infini inspiré des vecteurs de Witt, des fonctions symétriques, dont on conjecture qu'elles correspondent à des représentations du groupe symétrique. Cette conjecture est démontrée dans certains cas.

On symmetric functions related to Witt vectors

Abstract – *We define symmetric functions, by an infinite product formula, inspired by Witt vectors. It is conjectured that these functions correspond to representations of the symmetric group. We prove this conjecture in some cases.*

Abridged English Version – 1. WITT VECTORS AND SYMMETRIC FUNCTIONS. – Notations are as in [2]. We define symmetric functions q_n by formula (2). Motivation comes from Witt vectors: the isomorphism (1) between the ring W(A) of Witt vectors over a ring A and the free λ-ring Λ(A) shows that addition and multiplication of Witt vectors are defined by union and product of the set of variables underlying the symmetric functions (*see* [3], 17.2); the ghost components correspond to the power symmetric functions.

2. CONJECTURE. – The values of $q_n(x_1, x_2)$ for $n=1, 2, 3, 4$ may be found in [4], p. 117. Together with other hand and computer (Stembridge's package on Maple) calculations, they suggest the following conjecture: *for* $n \geqq 2$, $-q_n$ *is a positive linear combination of Schur functions.* ($q_1=h_1$ is immediate.) In other words, $-q_n$ corresponds, via the characteristic map, to representation of the n-th symmetric group. The character table of these representations would give the formulas expressing the components of a Witt vector as a function of its ghost components. The dimensions $-d_n$ of these representations are given by (3). J. Borwein and L. Shituo [5] proved directly the positivity of these numbers. In particular, they prove that $-d_n \sim (n-1)!$, which in the interpretation below means that these representations are "close" to the free Lie algebra.

3. RESULTS. – The symmetric functions q_n have a close relation with the symmetric functions l_n which enumerate the n-th component of the free Lie algebra, and which are given by (4). This relation is a kind of orthogonality relation involving plethysm [*see* (5) below]. We prove the validity of the conjecture when n is a power of 2, or if n is odd. The first case is a simple consequence of (5). For the second case, we introduce symmetric functions r_n [*see* (6)] and show that $-q_n=r_n$ for n odd. Then we construct for any n a subspace of the free Lie algebra, stable under the action of the linear group und enumerated by r_n; hence the latter is a sum of Schur functions. A consequence is that r_n is a sum of monomial symmetric functions. This can be shown directly as follows. Let H be a Hall basis, with total order compatible with the degree and stable under homogeneous substitution of trees (such a Hall set exists). Let H_n denote the set of Hall trees of degree n, and H_{ij} the set of Hall trees obtained by substituting elements of H_j at the leaves of a tree of degree i. Let $K_n = H_n \setminus \bigcup_{\substack{d \mid n \\ d \neq n, 1}} H_{d, n/d}$. Then one shows that r_n is the enumerator of K_n.

Note présentée par Marcel-Paul SCHÜTZENBERGER.

0764-4442/91/03120487 $ 2.00

1. Vecteurs de Witt et fonctions symétriques. — Soient A un anneau commutatif, W(A) l'anneau des vecteurs de Witt sur A et $\Lambda(A)$ l'ensemble des séries formelles de terme constant 1 à coefficients dans A, muni de sa structure de λ-anneau libre, comme dans [1].

Il est bien connu que la fonction

$$(1) \qquad (q_n)_{n \geqq 1} \mapsto \prod_{n \geqq 1} (1 - q_n t^n)^{-1}$$

définit un isomorphisme de W(A) sur $\Lambda(A)$.

Si l'on considère des éléments génériques dans $\Lambda(A)$, il est commode d'utiliser les fonctions symétriques (sur une infinité de variables) comme anneau des coefficients. Plus précisément, une série générique de terme constant 1 est $\sum_{n \geqq 0} h_n t^n$, où h_n désigne la n-ième fonction symétrique homogène (comme dans [2], dont nous utiliserons les notations), car ces fonctions sont algébriquement indépendantes. On est alors amené à introduire des fonctions symétriques q_n, par la formule

$$(2) \qquad \prod_{n \geqq 1} \frac{1}{1 - q_n t^n} = \sum_{n \geqq 0} h_n t^n.$$

Comme nous l'a fait remarquer A. Joyal, ce point de vue — esquissé aussi dans [3], 17.2 — permet de ramener la question bien connue de l'intégralité des formules donnant la somme et le produit dans W(A) à des résultats bien connus [2] (chapitre 1) sur les fonctions symétriques. En effet, les q_n engendrent librement la $\mathbb{Z}$-algèbre des fonctions symétriques, puisqu'il en est ainsi pour les h_n, et qu'on a par (1) les formules triangulaires de changement de base : $q_1 = h_1$, $q_2 + q_1^2 = h_2$, $q_3 + q_1 q_2 + q_1^3 = h_3$, ... Comme, dans $\Lambda(A)$, la somme (resp. le produit) des deux séries $\sum h_n(x_1, x_2, \ldots) t^n = \prod_i (1 - x_i t)^{-1}$ et $\sum h_n(y_1, y_2, \ldots) t^n = \prod_j (1 - y_j t)^{-1}$ (où les x_i, y_j sont des variables distinctes, pour assurer la généricité des calculs) est la série $\prod_i (1 - x_i t)^{-1} \prod_j (1 - y_j t)^{-1}$ (resp. $\prod_{i,j} (1 - x_i y_j t)^{-1}$), l'intégralité des formules résulte de ce que les q_n engendrent librement la $\mathbb{Z}$-algèbre des fonctions symétriques. On notera qu'avec cette interprétation, les composantes fantômes de (q_n) sont les p_n, les fonctions symétriques sommes de puissances.

2. Conjecture. — Pour $n = 1$ à 4, on trouve dans [4], p. 117, les valeurs de $q_n(x_1, x_2)$, exprimées comme des polynômes en x_1, x_2. Des calculs plus poussés (à la main, puis par ordinateur) nous ont conduit à la conjecture suivante : *pour* $n \geqq 2$, $-q_n$ *est une combinaison linéaire à coefficients dans* $\mathbb{N}$ *de fonctions de Schur*. Ceci signifie qu'il existe une représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ dont la fonction symétrique caractéristique est $-q_n$.

La table des caractères de ces représentations supposées, dont le calcul revient à exprimer les $-q_n$ en fonction des p_n, fournit donc les formules exprimant les composantes d'un vecteur de Witt en fonction de ses composantes fantômes. Par ailleurs, les dimensions $-d_n$ de ces représentations sont données par la formule, obtenue en projetant (2) sur $\mathbb{Q}[[p_1]]$:

$$(3) \qquad \prod_{n \geqq 1} \frac{1}{1 - (d_n/n!)\, t^n} = e^t.$$

J. Borwein et L. Shituo [5] ont montré directement que les d_n définis par (3) vérifient

$$1-\frac{2}{n} \leqq \frac{-d_n}{(n-1)!} \leqq 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

($n \geqq 2$), ce qui conforte la conjecture ci-dessus.

3. Résultats. — Les résultats ci-dessous donnent une connexion nouvelle, semble-t-il, entre les deux articles [6] et [7] de Witt. Nous notons l_n la fonction symétrique associée à la n-ième composante homogène de l'algèbre de Lie libre. Elle est donnée par la formule suivante (essentiellement équivalente à la formule de Witt [7]) :

$$l_n = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \mu(d) p_d^{n/d} \tag{4}$$

(*voir* [8] et [9]). Nous notons $\circ$ le pléthysme des fonctions symétriques (qui correspond au produit en couronne des représentations des groupes symétriques).

Théorème 1. — *Pour tout $n \geqq 2$, on a la formule*

$$\sum_{d \mid n} l_d \circ q_{n \mid d} = 0. \tag{5}$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise la formule [équivalente à (2)] :

$$\prod_{n \geqq 1} (1-q_n t^n)^{-1} = \exp\Big(\sum_{i \geqq 1} p_i t^i / i\Big).$$

Cette formule donne aussi immédiatement la valeur de q_n, quand n est premier :

$$-q_n = \frac{1}{n}(p_1^n - p_n) = l_n.$$

Le cas général est nettement plus compliqué, mais nous avons obtenu le résultat suivant ($n \geqq 2$) :

Théorème 2. — *Pour n égal à une puissance de 2, ou n impair, $-q_n$ est une somme de fonctions de Schur.*

Le cas d'une puissance de 2 se traite directement à partir de (5). Pour le cas n impair, on introduit des fonctions symétriques r_n définies par :

$$r_1 = h_1, \qquad r_n = l_n - \sum_{\substack{d \mid n \\ d \neq n,\, 1}} l_d \circ r_{n \mid d} \qquad (n \geqq 2). \tag{6}$$

Le théorème 1 implique que $-q_n = r_n$ pour n impair (c'est loin d'être le cas pour n pair). On montre, pour tout n, que r_n correspond à une représentation de $\mathfrak{S}_n$ en construisant récursivement un sous-espace de l'algèbre de Lie libre dont la fonction génératrice est r_n.

L'auteur remercie M.-P. Schützenberger pour de nombreuses discussions au cours de l'élaboration de ce travail.

Note remise le 17 décembre 1990, acceptée le 8 janvier 1991.

Références bibliographiques

[1] P. Cartier, Groupes formels associés aux anneaux de Witt, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 265, série A, 1967, p. 49-52.

[2] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[3] M. Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Acad. Press, New York, 1978.

[4] N. Metropolis et G.-C. Rota, Witt vectors and the algebra of necklaces, *Advances in Math.*, 50, 1983, p. 95-125.

[5] J. Borwein et L. Shituo, *Asymptotics of a sequence of Witt vectors*, preprint, 1990.

[6] E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Characteristik p vom Grad p^m, *J. reine angew. Math.*, 176, 1937, p. 126-140.

[7] E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, *J. Reine angew. Math.*, 177, 1937, p. 152-160.

[8] A. Brandt, The free Lie ring and Lie representations of the full linear group, *Amer. Math. Soc. Trans.*, 56, p. 528-536.

[9] A. A. Klyachko, Lie elements in the tensor algebra, *Sib. Mat. Zhurnal* (trad.), 15, 1974, p. 1296-1304.

Mathématiques-Informatique, *U.Q.A.M.*, C.P. n° 8888, Succ. « A »,
Montréal, *Québec*, *Canada* *H3C 3P8*.