6694

Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux
Année 1983-1984 - exposé n° 20

SUITES INFINIES A RÉPÉTITIONS BORNÉES

par

Jean-Paul ALLOUCHE

-:-:-:-

Ce papier est le résumé d'un article au titre identique destiné à paraître ultérieurement et où on pourra trouver les démonstrations des résultats annoncés dans les deux derniers paragraphes.

Introduction

Les répétitions dans un mot fini ou infini ont été étudiées, entre autres raisons, à cause de leurs liens avec

- les flots sur certaines surfaces ([15]),
- les parties "sans fin" aux échecs ([16]),
- les semi-groupes nilpotents,
- le problème de Burnside en théorie des groupes, (voir par exemple [1]).

Disons un mot de ce dernier problème :

Soit G un groupe finiment engendré, et d'exposant fini, alors G est-il nécessairement fini ?

Scan 6694

allouche

En notant m le nombre de générateurs de G, et n un entier tel que :

$$n > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in G \qquad x^n = e ,$$

les résultats connus sont les suivants :

- si G est commutatif, G est clairement fini (et de cardinal majoré par n^m) ; c'est en particulier le cas si $m = 1$ ou $n = 2$;
- si $m > 1$ et $n = 3$: G est fini (Burnside, 1902) ;
- si $m > 1$ et $n = 4$: G est fini (Sanov, 1940) ;
- si $m > 1$ et $n = 6$: G est fini (Hall, Marshall Jr, 1957) ;
- si $m > 1$, n impair et $n \geq 4\,381$: G n'est pas nécessairement fini (Novokov et Adjan, 1968) ;
- si $m > 1$, n impair et $n \geq 665$: G n'est pas nécessairement fini (Adjan, 1973).

Les deux derniers résultats, aux démonstrations extrêmement techniques, donnent la présentation d'un groupe $\Gamma(n, m)$, à m générateurs, d'exposant n et infini ; l'une des étapes consiste à étudier les répétitions dans certaines suites sur l'alphabet des générateurs.

Nous allons, dans ce qui suit, commencer par rappeler quelques définitions, puis indiquer des exemples de voies explorées dans l'étude des répétitions des suites. Enfin nous donnerons les résultats de Prodinger et Urbanek ([20] et [19]) sur les suites à répétitions bornées, puis les résultats que nous avons obtenus sur cette question.

I. - Quelques définitions

Un ensemble fini (ou alphabet) $\mathcal{A}$ étant donné, on appelle mot fini ou infini sur $\mathcal{A}$ une suite finie ou infinie d'éléments (ou lettres) de $\mathcal{A}$.

- Si u et v sont deux mots sur $\mathcal{A}$, u étant fini, on appelle concaténé de u et v, et on note $u.v$ la suite dont les premiers termes sont toutes les lettres de u et les termes suivants celles de v.

- La longueur (ou nombre de lettres) de u est notée $|u|$ et le mot vide (mot sans lettres) est noté $\mathbb{1}$.

Le mot fini w est dit facteur du mot u s'il existe un mot fini r et un mot s tels que $u = r.w.s$.

- Un mot fini ou infini est dit sans carré (sans cube, sans puissance $k^{\text{ème}}$...) s'il ne contient pas de facteur $w^2 = w.w$ (de facteur w^3, de facteur w^k...) .

II. - Quelques exemples de voies explorées

1) Puissances $k^{\text{èmes}}$

Le lecteur se convaincra aisément que tout mot de longueur supérieure ou égale à 4 sur un alphabet à deux lettres contient nécessairement un carré.

Les résultats ci-dessous précisent l'importance de la taille de l'alphabet :

- La suite de Thue-Morse sur l'alphabet $\{0,1\}$, définie comme le point fixe commençant par 0 du morphisme $0 \longrightarrow 01$, $1 \longrightarrow 10$ est sans cube, et même sans chevauchement c'est-à-dire sans facteur de la forme wwa où w est un mot fini et a la première lettre de w (voir [21], [22], et aussi [5]). Cette suite commence par 0110100110010110... (voir par exemple [6]).

- Il existe un mot infini sans carré sur un alphabet à trois lettres (par exemple le mot d'Aršon, voir [2]).

- On peut encore affiner la notion de répétition en définissant des puissances $n^{\text{èmes}}$ d'un mot, même lorsque n n'est pas entier (voir l'article de F. Dejean [9] et celui de Pansiot [18]).

2) Problèmes de théorie des langages

Le langage des mots contenant un carré n'est pas algébrique ; que dire des mots contenant une puissance $k^{\text{ème}}$? (voir par exemple [4]).

3) Problèmes de décidabilité

Par exemple, un morphisme est dit sans carré si l'image de tout mot sans carré est un mot sans carré. Est-il décidable si un morphisme donné est sans carré ? (voir par exemple [8], [3]).

III. - Mots infinis à répétitions bornées ; les résultats de Prodinger et Urbanek

1) DÉFINITION. - Un mot infini u est dit à répétitions bornées s'il existe une constante C strictement positive telle que : si w^2 est facteur de u, alors la longueur de w est inférieure ou égale à C.

Remarque. - Un tel mot ne contient pas de puissances $(2[C]+2)^{\text{èmes}}$.

Cette définition apparaît en particulier dans un article d'Erdös ([12], p. 240) où il cite une communication suivant laquelle de tels mots n'existent pas sur un alphabet à deux lettres : cette affirmation est fausse comme le montre le 2) ci-dessous, (voir aussi [11]).

2) Les résultats de Prodinger et Urbanek ([20] et [19])

Dans les deux articles [20] et [19], Prodinger et Urbanek commencent par définir la transformée de Toeplitz d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous résumerons par le schéma suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
a_o & . & a_1 & . & a_2 & . & a_3 & . & a_4 & . & a_5 & . & a_6 & \cdots \\
 & a_o & & . & & a_1 & & . & & a_2 & & . & & \cdots \\
 & & & a_o & & & & . & & & & a_1 & & \cdots \\
 & & & & & & & a_o & & & & & & \cdots \\
\hline
a_o & a_o & a_1 & a_o & a_2 & a_1 & a_3 & a_o & a_4 & a_2 & a_5 & a_1 & a_6 & \cdots
\end{array}
$$

La nouvelle suite obtenue, soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera aussi notée $T(a_n)$. Cette transformation a été étudiée par Jacob et Keane ([13]) ainsi que par Neveu ([1... elle est appelée transformation de Toeplitz car elle est inspirée d'une construc... de Toeplitz ([23]) destinée à fabriquer des fonctions réelles presque-périodiq... qui ne soient pas combinaisons linéaires finies de fonctions périodiques mais q... soient "facilement dessinables".

Prodinger et Urbanek démontrent alors les résultats suivants :

. $T(0\ 1)^{\omega}$ est à répétitions bornées (en on peut prendre C égal à 5) ; de plus $T(0\ 1)^{\omega}$ peut être définie de façon "récursive" (voir [20]).

. L'ensemble des suites à répétitions bornées sur un alphabet à deux lettres a la puissance du continu (et même, pour chaque α dans $[0,1]$, il existe une telle suite dont la fréquence des 1 soit α).

. Pour chaque réel α entre 0 et 1, pour chaque réel γ, la suite :

$$b_n = [\alpha(n+1)+\gamma] - [\alpha n+\gamma]$$

est à répétitions non bornées, (c'est immédiat pour α rationnel) ; dans le cas où γ est égal à $1/2$, la suite b_n est liée à un problème de dessin de droite sur un écran graphique.

. $T(0110)^{\omega}$ est à répétitions bornées (on peut encore prendre C égal à 5).

3) <u>Questions</u>

A la lecture des résultats ci-dessus, on peut se poser plusieurs questions ; par exemple :

- <u>Existe-t-il des suites</u> A <u>telles que</u> TA <u>soit à répétitions non bornées</u> ?

Il est immédiat que $T(1^{\omega}) = 1^{\omega}$, puis que $T(010)^{\omega} = (001)^{\omega}$. Une étude systématique des suites périodiques à transformée de Toeplitz périodique est entreprise au paragraphe V de ce travail.
Un exemple moins immédiat est le suivant : soit M la suite de Thue-Morse définie plus haut (II.1), alors $TM = \overline{dM}$, où d est le décalage (shift) et $\overline{}$ l'opération de conjugaison (qui change les 0 en 1 et les 1 en 0) ;

$$T(011010011001\ldots) = 00101100110\ldots$$

Pour montrer que M (donc $\overline{dM}$) est à répétitions non bornées, on appelle σ le morphisme $0 \longrightarrow 01$, $1 \longrightarrow 10$, de sorte que $M = \sigma M = \ldots = \sigma^k M$.
Mais $M = 011\ldots$, d'où $M = \sigma^k M = \sigma^k(0)\,\sigma^k(1)\,\sigma^k(1)\ldots$ et M contient le facteur $(\sigma^k(1))^2$, le mot $\sigma^k(1)$ étant de longueur 2^k.

- <u>Y-a-til un lien entre la transformation</u> T <u>et les</u> 2-<u>automates</u> ([6]) ?

Une réponse sera donnée dans le paragraphe IV ci-dessous.

- Un calcul immédiat montre que $T(0\,1)^{\omega}$ est égale à 0010011000110... c'est-à-dire à la suite de pliage régulier de papier (voir [10], voir aussi [7] et [14]).

Que peut-on dire des suites les plus générales de pliage de papier ?

Une réponse sera donnée au paragraphe IV ci-dessous.

IV. - La transformée de Toeplitz et les 2-automates ; le pliage de papier et les suites à répétitions bornées

1) PROPOSITION. - La suite A est reconnue par un 2-automate (au sens de [6]) si et seulement si la suite TA est reconnue par un 2-automate.

La démonstration peut être faite de deux manières ; la première utilise l'équivalence : la suite A est 2-automatique si et seulement si les suites $n \to A(2^k n + a)$ avec $k \geq 0$, $0 \leq a \leq 2^k - 1$ sont en nombre fini. La seconde, beaucoup plus courte, utilise la caractérisation donnée dans [6] : la suite A est 2-automatique si et seulement si la série formelle $\sum_0^{+\infty} A(n) X^n$ est algébrique sur le corps des fractions rationnelles modulo 2, $\mathbb{F}_2(X)$.

2) COROLLAIRE. - Les suites $T(0\,1)^{\omega}$ et $T(0\,1\,1\,0)^{\omega}$ sont 2-automatiques.

Ceci généralise la définition récursive de $T(0\,1)^{\omega}$ donnée dans [20] et s'applique à l'image par T de toute suite périodique.

3) THÉORÈME. - Quelle que soit la suite P de pliage de papier (voir [10]) la suite $T(P)$ est à répétitions bornées (et on peut choisir la borne C de la définition égale à 5).

Ce résultat se démontre en généralisant la méthode utilisée dans [20], et montre à nouveau que l'ensemble des suites à répétitions bornées sur un alphabet à deux lettres a la puissance du continu.

V. - Suites périodiques à transformées de Toeplitz périodiques

Nous nous intéressons ici aux suites A telles que A et TA soient simultanément périodiques (donc bien sûr à répétitions non bornées).

Une famille de telles suites est $(010)^{\omega}$, $(00100)^{\omega}$, $(0001000)^{\omega}\ldots$ de transformées de Toeplitz respectives $(001)^{\omega}$, $(00001)^{\omega}$, $(0000001)^{\omega}\ldots$.

On démontre sans peine que :

1) PROPOSITION. - a) A et TA sont périodiques si et seulement si TA est périodique. Dans ce cas A et TA ont même plus petite période, et cette plus petite période est un entier impair.

b) Soit A une suite de plus petite période $2u+1$ $(u \geq 1)$, soit C la suite $C(n) = A(n+u+1)$, alors :

$$TA \text{ est périodique si et seulement si } \begin{cases} \forall k \in [0, u-1], & C(k) = C(2k+1), \\ \forall k \in [0, u-1], & C(k+u) = C(2k) . \end{cases}$$

L'affirmation b) signifie que pour une suite A donnée de plus petite période $2u+1$, il existe un algorithme fini permettant de décider si TA est périodique.

2) PROPOSITION. - Le nombre de suites de plus petite période $2u+1$ à transformées de Toeplitz périodiques est égal à

$$2^{f(u)+1} ,$$

où $f(u)$ est le nombre de cycles dans la décomposition en produit de cycles de la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & u & u+1 & u+2 & \ldots & 2u \\ 2 & 4 & \ldots & 2u & 1 & 3 & \ldots & 2u-1 \end{pmatrix} .$$

Le comportement de la fonction f est assez curieux (voir page suivante la table des deux cents premières valeurs de f) ; une étude plus précise de la permutation ci-dessus permet de montrer le résultat suivant :

3) PROPOSITION. - *Notons, pour* d *impair au moins égal à* 3 , $\alpha(d)$ *l'ordre multiplicatif de* 2 *modulo* d , *alors on a* :

$$f(n) = \sum_{\substack{d \mid 2n+1 \\ d \neq 1}} \frac{\varphi(d)}{\alpha(d)} ,$$

où φ *est l'indicatrice d'Euler*.

COROLLAIRES.

$*$ $f(n) = O(\frac{n}{\operatorname{Log} n})$ (C. Pomerance et J.-L. Nicolas m'ont communiqué une preuve de l'optimalité de cette majoration),

$*$ $f(n) = 1 \Leftrightarrow$ {2n+1 est premier et 2 est racine primitive modulo 2n+1 .}

(*En particulier on ne sait donc pas si* f *prend une infinité de fois la valeur* 1 , *ce qui résulterait par exemple de l'hypothèse de Riemann généralisée* !)

Remarque. - f est aussi l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 (ou la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1) pour une matrice de permutation réelle associée à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & u & u+1 & u+2 & \ldots\ldots & 2u \\ 2 & 4 & \ldots\ldots & 2u & 1 & 3 & \ldots\ldots & 2u-1 \end{pmatrix} .$$

dans une base convenable une telle matrice s'écrit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad u \quad} & \overleftrightarrow{\quad u \quad} \end{array} \\ 2u \updownarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

On peut calculer le polynôme caractéristique de cette matrice, il vaut :

$$\prod_{\substack{d \mid 2n+1 \\ d \neq 1}} (X^{\alpha(d)} - 1)^{(\varphi(d)/\alpha(d))} .$$

A 6694

20-09

6694

Les deux cents premières valeurs de la fonction f

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	*	0	1	1	2	2	1	1	4	2	1
1	*	5	2	2	3	1	6	4	5	1	4
2	*	2	3	7	2	4	7	1	4	4	1
3	*	1	12	6	1	5	2	8	7	5	2
4	*	4	1	11	4	8	9	13	4	2	7
5	*	1	2	14	1	3	4	4	5	11	8
6	*	2	7	3	18	10	1	9	10	2	1
7	*	5	4	6	9	1	10	12	13	3	4
8	*	8	1	13	2	2	11	1	8	4	1
9	*	1	4	6	7	19	2	2	19	1	2
10	*	4	5	11	8	4	1	5	10	20	17
1	*	11	6	12	1	3	14	8	5	5	2
2	*	10	5	9	8	4	5	5	34	16	9
3	*	7	2	6	17	1	2	26	15	3	20
4	*	4	3	13	8	4	7	1	4	10	5
5	*	11	4	6	3	5	2	2	35	1	4
6	*	4	7	11	10	8	11	11	4	16	13
7	*	37	6	14	1	1	18	4	5	23	2
8	*	2	7	17	2	12	5	1	10	6	1
9	*	37	2	14	17	1	8	4	5	9	26

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. I. ADJAN, Burnside groups of odd exponents and irreducible systems of group identities, in Boone and Cannonito Lydon ed., Word Problems, (North Holland Amsterdam 1974).

[2] S. ARŠON, Démonstration de l'existence de suites asymétriques infinies, Mat. Sb. 44 (1937), 19-38.

[3] J. BERSTEL, Mots sans carrés et morphismes itérés, Discrete Math. 29 (1980), 235-244.

[4] J. BERSTEL, Some recent results on squarefree words, Publications du L.I.T.P., Paris VII, 84-6 (1984).

[5] A. CERNY, On generalized words of Thue-Morse, Publications du L.I.T.P., Paris VII, 83-44 (1983).

[6] G. CHRISTOL, T. KAMAÉ, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY, Suites algébriques, automates et substitutions, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401-419.

[7] J. COQUET, Harmonic properties of some arithmetical sequences, Manuscripta Math. 39 (1982), 233-243.

[8] M. CROCHEMORE, Mots et morphismes sans carré, Annals of Discrete Math. 17 (1983), 235-245.

[9] F. DEJEAN, Sur un théorème de Thue, J. Comb. Theory, Ser. A, 13 (197[illegible]) 90-99.

[10] M. DEKKING, M. MENDÈS FRANCE and A. J. van der POORTEN, Folds ! I, II et III, Math. Intelligencer, vol. 4 (3) (1982), 130-138 ; vol. 4 (4) (1982), 173-181 ; vol. 4 (4) (1982), 190-195.

[11] R. C. ENTRINGER, D. E. JACKSON and J. A. SCHATZ, On nonrepetitive sequences, J. Comb. Theory, Ser. A, 16 (1974), 159-164.

[12] P. ERDÖS, Some unsolved problems, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 6 (1961), 221-254.

[13] K. JACOBS and M. KEANE, On 0-1 sequences of Toeplitz type, Z. Wars[illegible] Geb. 13 (1969), 123-131.

[14] M. MENDÈS FRANCE and A. J. van der POORTEN, Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences, Bull. Austr. Math. Soc. 24 (1981), 123-131.

[15] M. MORSE, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. Am. Math. Soc., t. 22 (1921), 84-100.

[16] M. MORSE and G. A. HEDLUND, Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semi-groups, Duke Math. J. 11 (1944), 1-7.

[17] J. NEVEU, Sur les suites de Toeplitz, Z. Warsch. Geb. 13 (1969), 132-133.

[18] J. J. PANSIOT, A propos d'une conjecture de F. Dejean sur les répétitions dans les mots, Discrete Applied Math. 7 (1984), 297-311.

[19] H. PRODINGER, Non-repetitive sequences and Gray code, Discrete Math. 43 (1983), 113-116.

[20] H. PRODINGER and F. J. URBANEK, Infinite 0-1 sequences without long adjacent identical blocks, Discrete Math. 28 (1979), 277-289.

[21] A. THUE, Über unendliche Zeichenreihen, Norske vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl. , Christiana 7 (1906), 1-22.

[22] A. THUE, Über die gegenseitige Lage gleicher Teile gewisser Zeichenreihen, Norske vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana 1 (1912), 1-67.

[23] O. TOEPLITZ, Ein Beispiel zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, Math. Ann. 98 (1928), 281-295.

(texte reçu le 25 juin 1984)

-:-:-:-

Jean-Paul ALLOUCHE
U.E.R. de Math. et Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F - 33405 TALENCE CEDEX