→ 904
905
1660

Lucas

to be punched

Lorsque l'on sait diviser géométriquement la circonférence en $p, q, r, \ldots$ parties égales, on saura la diviser en $pqr\ldots$ parties égales, si les nombres $p, q, r, \ldots$ sont impairs et premiers entre eux deux à deux; et, par suite, on saura la diviser en $2^\alpha pqr\ldots$ parties égales. Les seuls nombres $p, q, r, \ldots$ connus actuellement sont les nombres premiers

$$3,\quad 5,\quad 17,\quad 257,\quad 65537,$$

et le nombre suivant serait $(2^{128}+1)$, qui a 39 chiffres, si l'on pouvait démontrer que ce nombre est premier (voir n° 34, *Ex. I*).

Exemple II. — Décomposer en fractions simples le nombre $\dfrac{6099380351}{1271808720}$. On trouve (*Disq. Arith.*, n° 317)

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{7}+\frac{5}{13}+\frac{7}{47}+\frac{52}{59}.$$

NOTES ET ADDITIONS.

I. — Sur la partition des polygones (n° 57).

D'après une communication qui nous a été adressée par M. Cayley, le théorème énoncé à la page 93 doit être attribué à Kirkmann, qui l'a démontré dans son Mémoire : *On the k-partitions of the r-gone,* publié dans les *Philosophical Transactions* (t. CXLVII; Londres, 1857).

D'autre part, nous avons reçu de M. Élie Perrin, professeur à l'École J.-B. Say, les remarques suivantes : Soit ABC...HKL un polygone de $(n+1)$ côtés; choisissons AB pour base principale, et désignons par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ les côtés BC, CD, DE, ..., KA. Si, par exemple, le triangle ABG fait partie d'une décomposition, le sommet G décompose le périmètre BCD...GHK en deux polygones ayant pour bases principales BG et AG, qui remplacent AB; de même, si le triangle BGE fait partie d'une décomposition, il sépare le polygone BCDEG en deux autres, et ainsi de suite; on classe ainsi, *dichotomiquement,* les $(n-1)$ sommets du polygone, autres que A et B.

Plaçons, sur une ligne horizontale, les côtés

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_n,$$

et supposons, pour fixer les idées, que n est égal à 8. Si le point G fait partie de la décomposition, il sépare a_5 de a_6 et nous représenterons cette première décomposition par

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5),\quad (a_6, a_7, a_8):$$

puis, si BGE fait partie de la décomposition, nous séparerons $a_1, \ldots, a_5$ en deux par

$$((a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5)), (a_6, a_7, a_8),$$

et ainsi de suite. Par conséquent, si l'on considère la décomposition du polygone de 9 côtés, dans laquelle on a tracé les diagonales GK, GA, GB, GE, BE, CE, on peut représenter cette décomposition par le symbole

$$\Big(\big((a_1), (a_2, a_3)\big), (a_4, a_5)\Big), \big((a_6, a_7), (a_8)\big),$$

ou

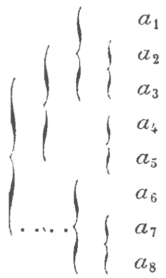
$$\overline{\overline{\overline{a_1,\ \overline{a_2, a_3}},\ \overline{a_4, a_5}},\ \overline{\overline{a_6, a_7},\ a_8}}.$$

En général, à toute décomposition d'un polygone de $(n+1)$ côtés, en $(n-1)$ triangles, correspond une manière d'obtenir le produit de n facteurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, par $(n-1)$ multiplications de deux facteurs, en effectuant suivant l'ordre des indices, et inversement. Par conséquent :

Le nombre des manières d'effectuer le produit de n facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *au moyen de* $(n-1)$ *multiplications de deux facteurs, pris dans l'ordre des indices, est égal au nombre des décompositions d'un polygone convexe de* $(n+1)$ *côtés en triangles, par des diagonales qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone.*

On en déduit facilement cet autre théorème : *Le nombre des manières d'effectuer le produit de n facteurs, au moyen de* $(n-1)$ *multiplications de deux facteurs pris dans un ordre quelconque, est égal au produit du nombre des décompositions du polygone de* $(n+1)$ *côtés en triangles, par le nombre* $n!$ *des permutations des n facteurs.*

Fig. 76.



La figure ci-jointe nous montre encore que le nombre des manières d'interpréter une fraction étagée de n termes (n° 82, *Ex. II*) est égal au nombre des décompositions d'un polygone de $(n+1)$ côtés en triangles.

Et ainsi le nombre des classements, par voie dichotomique, de n objets rangés dans un certain ordre, est égal au nombre des décompositions d'un polygone de $(n+1)$ côtés en triangles, par $(n-1)$ diagonales qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone.

II. — Sur le problème des rencontres (n° 123).

Le nombre Q_n des permutations de n lettres, où aucune lettre n'occupe la place que lui assigne son rang dans l'alphabet, est égal au nombre des substitutions irréductibles de n lettres.

Cette même question a été traitée par Laplace et généralisée, au moyen de la théorie des fonctions génératrices, dans la *Théorie analytique des Probabilités* (*Œuvres*, t. VII, p. 242).

De la formule

$$Q_{n+1} = (n+1)Q_n + (-1)^{n+1},$$

on déduit, en remplaçant n successivement par $1, 2, \ldots, n$, et en faisant la somme des égalités obtenues,

$$Q_{n+1} = \Sigma n Q_n + \text{const.},$$

la constante étant égale à o ou à 1, suivant que n est pair ou impair.

On peut obtenir diverses propriétés arithmétiques des nombres Q_n. On remarque d'abord que deux nombres consécutifs sont premiers entre eux, par suite de la formule (2) du n° 123. De plus, Q_{n+1} est divisible par n, comme cela résulte de la première formule de la page 213. De la formule symbolique

$$(P+x)^n \doteq (Q+x+1)^n,$$

on déduit la formule générale

$$f(P+x) \doteq f(Q+x+1),$$

et, par exemple, en supposant

$$f(z) = z^r(z-1)^s,$$

il vient

$$(P+x)^r(P+x-1)^s \doteq (Q+x+1)^r(Q+x)^s,$$

et pour $x = 0$

$$P^r(P-1)^s \doteq Q^s(Q+1)^r.$$

Si l'on remplace r par un nombre premier p, en observant que P_n est divisible par p, pour $n \geqq p$, et en tenant compte des restes du triangle arithmétique, il vient

$$Q_{p+s} \equiv -Q_s \pmod{p};$$

on en tire, plus généralement,

$$Q_{hp+s} \equiv (-1)^h Q_s \pmod{p},$$

et ainsi les restes de Q_n par p se reproduisent périodiquement.

III. — Sur le problème des ménages (n° 123).

Nous désignerons par F et H, avec les indices de 1 à n, les n femmes et leurs maris respectifs ; puis, par

λ_n le nombre des permutations des n ménages qui sont conformes à l'énoncé ;

μ_n » qui présentent le seul défaut de finir par 1 ;

ν_n le nombre des permutations qui présentent un seul défaut, à l'exception de commencer ou de finir par 1, ou de finir par n;

ρ_n » qui se terminent par 1 et présentent un seul autre défaut.

Supposons que les n ménages soient assis autour de la table dans l'une des λ_n dispositions cherchées et que survienne un ménage que nous désignerons par F_{n+1} et H_{n+1}; alors les convives se serrent de manière à ouvrir deux nouvelles places formant un intervalle que nous pouvons imaginer situé immédiatement à gauche de F_1. Alors F_{n+1} se place dans cet intervalle, et si son mari s'y plaçait, la permutation serait fautive; mais le mari H_{n+1} peut changer de place avec les n maris, à l'exception de deux, H_1 et celui qui est à la gauche de F_1. Par conséquent, par cette intercalation, nous obtenons $(n-2)\lambda_n$ dispositions. Mais on peut encore obtenir d'autres permutations, conformes à l'énoncé, en commençant par les permutations fautives de n ménages, que nous avons désignées par μ_n, ν_n, ρ_n.

1° Supposons que, dans la permutation qui précède l'arrivée des nouveaux venus, le mari H_1 soit à la gauche de sa femme F_1; dans ce cas, le ménage d'indice $(n+1)$ peut se placer à la gauche de F_1; mais le mari H_{n+1} doit échanger sa place avec l'un quelconque des maris, à l'exception de H_1; on obtient ainsi $(n-1)\mu_n$ permutations des ménages.

2° Supposons que la permutation qui précède l'arrivée des nouveaux venus soit une de celles que nous avons désignées par ν_n, alors le ménage d'indice $(n+1)$, se plaçant à la gauche de F_1, la permutation est fautive; mais on ne peut la rendre conforme à l'énoncé que par l'échange de H_{n+1} avec le mari qui se trouvait à côté de sa femme; on a ainsi ν_n permutations des $(n+1)$ ménages, distinctes des précédentes.

3° Si la permutation qui précède l'arrivée du $(n+1)^{\text{ième}}$ ménage est une de celles que nous avons désignées par ρ_n, le premier défaut se trouve corrigé par l'intercalation de F_{n+1} à la gauche de F_1, et le second défaut par H_{n+1}, qui remplace le mari qui se trouvait à côté de sa femme, tandis que celui-ci vient se placer entre F_1 et F_{n+1}; par suite, ρ_n permutations distinctes des précédentes.

Inversement, si l'on considère une permutation quelconque λ_{n+1} de $(n+1)$ ménages, conforme aux conditions de l'énoncé, le départ du ménage $(n+1)$ conduit à l'une des quatre dispositions que nous avons désignées par λ_n, μ_n, ν_n et ρ_n. On a donc la formule

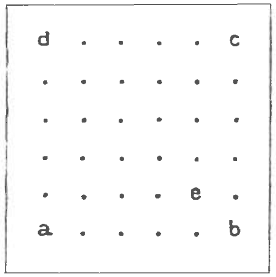
$$(1)\qquad \lambda_{n+1} = (n-2)\lambda_n + (n-1)\mu_n + \nu_n + \rho_n.$$

Pour obtenir d'autres formules, nous reprendrons la figuration sur un échiquier de n^2 cases (p. 215), en désignant par a, b, c, d, e, les cases que nous aurons à considérer plus spécialement (*fig.* 77). Les permutations sans défaut (λ_n) sont celles qui correspondent au problème des n tours placées sur les cases de l'échiquier, à l'exception des cases de la diagonale ac, des cases situées immédiatement au-dessus, et de la case b. Nous supposerons toutes les cases *blanches*, à l'exception de celles que nous venons d'indiquer et que nous considérerons comme *noires*.

Les dispositions dans lesquelles une tour occupe la case a, et les $(n-1)$ autres tours sont sur des cases blanches, ont été désignées par μ_n: celles dans lesquelles une seule tour occupe une case noire autre que a, b, c, sont des ν_n; enfin, celles où une tour occupe une case noire autre que a, b, c et où, en outre, une tour occupe la case a, constituent la catégorie ρ_n.

Si nous considérons l'une des permutations μ_n et si nous supprimons par la pensée la ligne et la colonne renfermant la case a, il reste un échiquier de $(n-1)^2$ cases sur lequel les $(n-1)$ autres tours forment une

Fig. 77.



Problème des ménages.

certaine permutation. Si la case e n'est pas occupée, cette permutation rentre dans la catégorie λ_{n-1}, et si la case e est occupée, elle rentre dans la catégorie μ_{n-1}. On a donc

$$(2)\qquad \mu_n = \lambda_{n-1} + \mu_{n-1}.$$

Si nous considérons l'une des permutations ν_n, elle présente cette circonstance que l'une des cases noires, autre que a, b ou c, est occupée par une tour. Or, par des permutations circulaires des colonnes, puis des lignes de l'échiquier, on peut amener cette tour à occuper la position a et former ainsi l'une des permutations μ_n; mais il y a sur l'échiquier $(2n-3)$ cases noires autres que a, b, c; on a donc

$$(3)\qquad \nu_n = (2n-3)\mu_n.$$

Enfin, dans une permutation ρ_n, la case a est toujours occupée. Si la case d est occupée, la permutation figurée qui reste lorsque l'on supprime la ligne et la colonne contenant a, appartient à la catégorie ρ_{n-1}, comme on le reconnaît facilement en tournant l'échiquier d'un demi-tour autour de son centre. Si la case d n'est pas occupée, on peut toujours amener la case fautive à occuper cette place extrême par des permutations convenables des lignes et des colonnes, ce qui donne une permutation μ_{n-1}; mais comme il y a $(2n-3)$ cases noires que l'on peut amener en d, on en conclut la formule

$$\rho_n = (2n-3)\mu_{n-1} + \rho_{n-1}. \tag{4}$$

Des formules (1) et (3), on déduit

$$\lambda_{n+1} = (n-2)\lambda_n + (3n-4)\mu_n + \rho_n. \tag{5}$$

Au moyen des diverses relations qui précèdent, et des valeurs initiales

$$\begin{cases} \lambda_3 = 1, \\ \lambda_4 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_3 = 0, \\ \mu_4 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \nu_3 = 0, \\ \nu_4 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_3 = 1, \\ \rho_4 = 1, \end{cases}$$

on peut former le Tableau des valeurs de λ_n, μ_n, ν_n, ρ_n pour les premières valeurs de n; les différences des λ et des ρ vérifient les formules (2) et (4), que l'on peut écrire

$$\lambda_{n-1} = \Delta\mu_{n-1}, \qquad \mu_{n-1} = \frac{\Delta\rho_{n-1}}{2n-3}.$$

En donnant à n des valeurs successives, on déduit les formules

$$(n-1)\lambda_{n+1} = (n^2-n+1)(\lambda_n + \lambda_{n-1}) + n\lambda_{n-2}, \tag{6}$$

$$\lambda_{n+1} = (n+1)\lambda_n + 2\lambda_{n-1} - (n-3)\lambda_{n-2} - \lambda_{n-3}, \tag{7}$$

où n'entrent plus que des λ. Enfin, il y a lieu de noter la formule

$$\mu_{n+2} = n(\mu_{n+1} + \mu_n) + \mu_{n-1}. \tag{8}$$

Les formules et les démonstrations précédentes ont été obtenues, pour la première fois, par M. LAISANT. D'un autre côté, M. C. MOREAU, colonel d'artillerie, qui est parvenu aux mêmes résultats, a encore indiqué les formules suivantes. On peut écrire la relation (6) sous la forme

$$\begin{aligned}(n-1)\lambda_{n+1} - (n+1)(n-1)\lambda_n - (n+1)\lambda_{n-1} \\ = -[(n-2)\lambda_n - n(n-2)\lambda_{n-1} - n\lambda_{n-2}];\end{aligned}$$

on peut donc poser

$$(n-2)\lambda_n - n(n-2)\lambda_{n-1} - n\lambda_{n-2} = K(-1)^{n-1},$$

en désignant par K une constante que l'on trouve égale à 4. Ainsi

$$(n-1)\lambda_{n+1} = (n^2-1)\lambda_n + (n+1)\lambda_{n-1} + 4(-1)^n. \tag{9}$$

L'observation du Tableau qui contient les premières valeurs de λ conduit à poser

$$\lambda_n - 2(-1)^n = n\theta_n, \tag{10}$$

et l'équation précédente donne

$$\theta_{n+1} = n\theta_n + \theta_{n-1} + 2(-1)^n. \tag{11}$$

La formule (11) permet de calculer rapidement les valeurs de θ_n; on a ensuite celles de λ_n par la formule

$$\lambda_n = \theta_{n+1} - \theta_{n-1};$$

on trouve ainsi, pour les premières valeurs de n,

n.	θ_n. 904	λ_n. (179)
4	0	2
5	3	13
6	13	80
7	83	579
8	592	4738
9	4821	43387
10	43979	4 39792
11	4 44613	48 90741
12	49 34720	592 16642
13	596 61255	7755 96313
14	7805 31033	1 09274 34464
15	1 09870 95719	16 48064 35783
16	16 55869 66816	264 93914 69058
17	266 03785 64777	4522 64356 01207
18	4539 20225 68023	81705 64062 24416
19	81971 67847 89193	15 57461 89109 94665
20	15 62001 09335 62688	312 40021 86712 53762
21	313 21993 54560 42955	....

IV. — Sur les nombres d'HAMILTON (n° 81).

Considérons le Tableau suivant; il est formé d'étages successifs, séparés par une barre horizontale; dans chaque étage, un nombre quelconque est égal au nombre placé immédiatement au-dessus, augmenté de tous ceux qui précèdent celui-ci dans la même ligne. Cette loi subsiste quand on passe d'un étage à l'étage inférieur, excepté pour les premières colonnes de chaque étage, qui sont formées par la suite naturelle des nombres en-

1	0	0	0	0	0	0	...
	1	1	1	1	1	1	...
		2	3	4	5	6	...
		1	5	9	14	20	...
			6	15	29	49	...
			5	21	50	99	...
			4	26	76	175	...
			3	30	106	281	...
			2	33	139	420	...
			1	35	174	594	...
				36	210	804	...
				35	246	1050	...
				34	281	1331	...
				.	.	.	...
				.	.	.	...

Les nombres d'Hamilton.

1660 tiers positifs et décroissants jusqu'à 1. Les premiers nombres de chaque étage, que nous désignerons par a_0, a_1, a_2, a_3, ..., forment la suite

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 6, \quad 36, \quad 876, \quad \ldots;$$

si l'on pose

$$s_{n+1} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}_n = s_n + 1,$$

on obtient, pour H_1, H_2, H_3, ..., les nombres renfermés dans le Tableau suivant :

905

H_n.		n.
2	1	1
3	2	2
5	6	3
11	36	4
47		5
923		6
4 09619		7
8 37632 06255		8
35 08125 90629 08587 98171		9
615 34736 87096 57875 84485 22809 27507 75204 33167		10

Les nombres H, que M. Sylvester a appelés *nombres d'Hamilton*, jouent un très grand rôle dans la théorie des équations [1].

Le calcul des nombres du Tableau précédent a été effectué au moyen d'une formule très remarquable, due à M. J. Hammond.

Soit

$$\begin{aligned}
1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots &= g_0(x),\\
2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots &= g_1(x),\\
6x^2 + 15x^3 + 29x^4 + \ldots &= g_2(x),\\
36x^3 + 210x^4 + \ldots &= g_3(x),
\end{aligned}$$

et ainsi de suite; en général,

$$a_n x^n + b_n x^{n+1} + c_n x^{n+2} + d_n x^{n+3} + \ldots = g_n(x).$$

On multiplie $g_n(x)$ par le développement de la puissance de $(1-x)$ d'exposant égal à $-a_n$; si l'on compare le résultat au développement de $g_{n+1}(x)$, en tenant compte de la loi de formation,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= b_n + \frac{a_n(a_n+1)}{1.2},\\
b_{n+1} &= c_n + a_n b_n + \frac{a_n(a_n+1)(2a_n+1)}{1.2.3},\\
c_{n+1} &= d_n + a_n c_n + \frac{a_n(a_n+1)(a_n+2)(3a_n+1)}{1.2.3.4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on a

$$g_{n+1}(x) = \frac{g_n(x)}{(1-x)^{a_n}} - \frac{x^{n-1}}{(1-x)^{a_n-1}} + x^{n-1}(1-x).$$

Multiplions les deux membres par $(1-x)^{s_{n+1}}$, il vient

$$\begin{aligned}
&(1-x)^{s_{n+1}} g_{n+1}(x) - (1-x)^{s_n} g_n(x)\\
&\quad = x^{n-1}(1-x)^{s_{n+1}+1} - x^{n-1}(1-x)^{s_n+1}.
\end{aligned}$$

Remplaçons successivement n par $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, et ajoutons les identités obtenues; il vient, après quelques transformations,

$$\begin{aligned}
&(1-x)^{s_n} g_n(x) - (1-x)^{-1} + x^{-1}(1-x) - x^{n-1}(1-x)^{s_n+1}\\
&\quad = x^{n-2}(1-x)^{s_n+2} + x^{n-3}(1-x)^{s_{n-1}+2} + \ldots\\
&\quad\quad + x^{n-4}(1-x)^{s_{n-2}+2} + \ldots + x^{-1}(1-x)^{s_1+2}.
\end{aligned}$$

---

[1] Sylvester, *Sur les nombres dits de Hamilton*. Congrès de Toulouse, 1887, p. 165. — Sylvester et Hammond, *On Hamilton's Numbers*, dans les *Philosophical Transactions*, vol. CLXXVIII, p. 285-312, et vol. CLXXIX, p. 65-71. Londres, 1887.

~~§) can't get this to work!~~ 4/16/99

En égalant les coefficients de x^n dans les deux membres, on obtient ainsi la formule de M. HAMMOND

X

$$\mathrm{H}_{n+1} - 1 = \frac{\mathrm{H}_n(\mathrm{H}_n - 1)}{2!} - \frac{\mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{H}_{n-1} - 1)(\mathrm{H}_{n-1} - 2)}{3!} + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{H}_1(\mathrm{H}_1 - 1)(\mathrm{H}_1 - 2) \ldots (\mathrm{H}_1 - n)}{(n+1)!}.$$

2 §

En multipliant les deux membres de l'identité précédente par $(1 - x)$ et en identifiant les coefficients de x^n, on trouve, après avoir posé $l_n = \mathrm{H}_n + 1$, la formule donnée par M. SYLVESTER

$$1 - l_{n-1} + \frac{l_{n-2}(l_{n-2} - 1)}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{l_0(l_0 - 1) \ldots (l_0 - n + 1)}{n!} = 0$$

ou, en se servant de la notation des combinaisons,

$$1 - \mathrm{C}^1_{l_{n-1}} + \mathrm{C}^2_{l_{n-2}} - \mathrm{C}^3_{l_{n-3}} + \ldots = 0.$$

V. — Sur les réseaux d'un quinconce (n° 190, *Ex. II*).

Quelles que soient les dimensions du quinconce, on peut en séparer tous les sommets par deux séries de lignes parallèles (*fig.* 78), et de telle sorte que chaque sommet occupe le centre d'un carré formé par le réseau des deux systèmes de parallèles. Puisque tous les sommets du réseau sont des points d'ordre pair (2 ou 4), ce réseau peut toujours être décrit d'un seul trait (n° 59); mais, conformément à l'énoncé, les lignes des deux systèmes de parallèles doivent être décrites d'un seul trait continu. Soient p et q les nombres des points contenus sur les côtés AT et AG du rectangle; de plus, supposons p et q premiers entre eux; sur la figure on a $p = 5$ et $q = 7$.

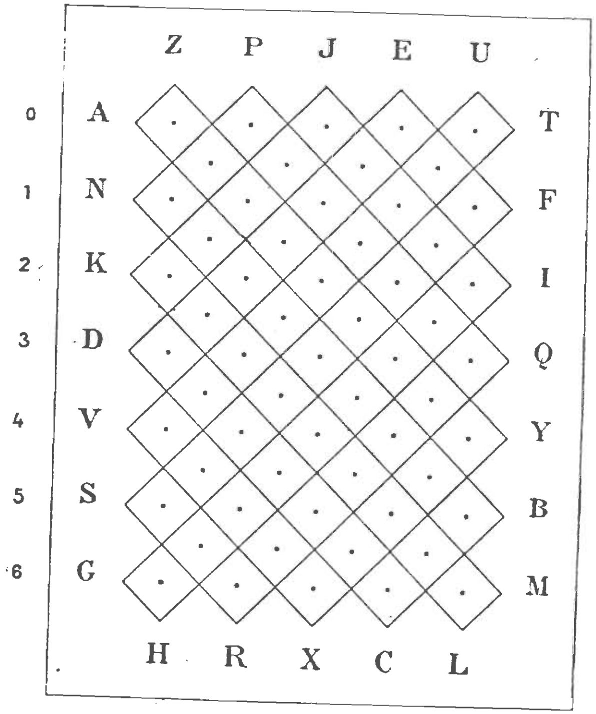
Supposons que la figure soit repliée autour de la ligne HL, puis que l'on replie de nouveau la figure autour du côté inférieur, et ainsi de suite; on forme donc de deux en deux le même dessin et de deux en deux des images du dessin. Cela posé, en partant de A, on décrit le chemin AB en descendant de p lignes, puis le chemin BCD, dont on remplace la partie CD par sa symétrique, de manière à descendre toujours entre les deux côtés AG et TM du rectangle. En partant du côté gauche, pour y revenir après réflexion sur le côté droit, on descend donc de $2q$ lignes sur l'échiquier indéfini. Pour obtenir les numéros des points de brisure sur AG ou son prolongement, on forme donc la progression arithmétique, de raison $2p$,

$$0, \quad 2p, \quad 4p, \quad 6p, \quad \ldots.$$

Mais si l'on veut obtenir les numéros correspondants sur le rectangle primitif de la figure, on prend les restes de ces nombres par $2q$; alors

deux cas peuvent se présenter, suivant que le reste r, toujours pair, ne dépasse pas $(q - 1)$ ou est plus grand que $(q - 1)$; dans le premier cas, on conserve le reste obtenu, car le numéro de brisure correspond à un

Fig. 78.



rectangle de même orientation que le rectangle primitif; dans le second cas, si l'on a

$$r > q - 1,$$

le point de brisure se trouve dans un rectangle symétrique du premier; alors on remplace r par son complément à $(2q - 1)$.

Ainsi, dans l'exemple, on forme les nombres

$$0, \quad 10, \quad 20, \quad 30, \quad 40, \quad 50, \quad 60, \quad 70;$$

les restes par 14 sont

$$0, \quad 10, \quad 6, \quad 2, \quad 12, \quad 8, \quad 4, \quad 0.$$

On conserve les restes 0, 6, 2, 4, et l'on remplace les autres par leurs compléments à 13; on a ainsi

$$0, \quad 3, \quad 6, \quad 2, \quad 1, \quad 5, \quad 4, \quad 0.$$