**Министерство на образованието и науката**
**Съюз на математиците в България**

# Национално зимно математическо състезание “Атанас Радев”

**Ямбол, 27 януари 2024 г.**

**Ямбол, 2024 г.**

## Условия, кратки решения и критерии за оценяване

**Задача 8.1.** Дадено е уравнението

$$2 + x\sqrt{9+6\sqrt{2}} = x\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{6} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

а) Запишете корена на уравнението във вида $m - \sqrt{n}$, където $m$ и $n$ са естествени числа.
б) Разложете израза $a^3 - 3a^2 - 5a + 7$ на два неконстантни множителя с цели коефициенти и пресметнете стойността на този израз, ако $a$ е намереният в а) корен.

*Отговор.* а) $1-\sqrt{2}$; б) $(a-1)(a^2-2a-7)$; $6\sqrt{2}$.

*Решение.* а) Пресмятаме

$$\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{3}\sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{3}(\sqrt{2}+1) = \sqrt{6}+\sqrt{3}$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3-2\sqrt{6}+2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

Уравнението добива вида

$$x\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{6}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$$

$$x\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right),$$

откъдето (предвид $\sqrt{6}+\sqrt{2}>0$) окончателно $x = 1-\sqrt{2}$.
б) Имаме $a^3-3a^2-5a+7 = a^3-a^2-2a^2+2a-7a+7 = (a-1)(a^2-2a-7)$. Произведението на $a-1=-\sqrt{2}$ и $a^2-2a-7=(a-1)^2-8=2-8=-6$ е $6\sqrt{2}$.

**Оценяване.** (6 точки) а) 4 т., от които: 1 т. за $\sqrt{9+6\sqrt{2}} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$; 1 т. за $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$; 2 т. за $x = 1-\sqrt{2}$. б) 2 т., от които 1 т. за разлагането и 1 т. за правилното пресмятане на стойността.

**Задача 8.2.** Симетралите на страните $AC$ и $BC$ на остроъгълния триъгълник $ABC$ с $\measuredangle ACB = 30^\circ$ се пресичат в точка $O$. Точките $M$ и $N$ съответно от страните $AC$ и $BC$ са такива, че $O$ е средата на отсечката $MN$. Колко пъти произведението от дължините на отсечките $CM$ и $CN$ е по-голямо от произведението на дължините на отсечките $AM$ и $BN$?

*Отговор.* $\frac{4}{3}$.

*Решение.* Нека $L$ е средата на $BC$ (съответно $OL \perp BC$) и $K$ е петата на перпендикуляра от $M$ към $BC$. Тогава $OL \parallel MK$ и с $MO = ON$ следва, че $OL$ е средна отсечка в триъгълника $KMN$ – в частност $KL = LN$. От друга страна, имаме и $BL = CL$, откъдето $BN = CK$.

От правоъгълния триъгълник $CKM$ с $\measuredangle KCM = 30^\circ$ получаваме $KM = \frac{1}{2}CM$ и $CK = \sqrt{CM^2 - KM^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}CM$ от Питагоровата теорема. Следователно $\frac{CM}{BN} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Аналогично имаме $\frac{CN}{AM} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, откъдето окончателно $\frac{CM \cdot CN}{AM \cdot BN} = \frac{4}{3}$.

**Оценяване.** (6 точки) 4 т. за доказване на $\frac{CM}{BN} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (или $\frac{CN}{AM}$), от които: 1 т. за въвеждането на $MK \perp BC$, 2 т. за $BN = CK$ (от които 1 т. за средната отсечка през $O$), 1 т. за $\frac{CM}{CK} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; 1 т. за аналогичен извод за $\frac{CN}{AM}$, 1 т. за окончателен отговор.

**Задача 8.3.** Дадено е естествено число $n$. Имаме $n+1$ топки, номерирани с 1, 1, 2, 3, …, $n$ (само първите две са еднакви). Трябва да оцветим тези топки в $n$ дадени цвята, така че всяка топка е в един цвят и всеки цвят да се използва поне веднъж. Означаваме с $a_n$ броя на възможните оцветявания. Намерете най-малкото $n$, за което $a_n$ се дели на 2024.

*Отговор.* 13.

*Решение.* Точно един от цветовете ще се използва за две от топките; нека техните номера са $a$ и $b$, като $a \leq b$.
Ако $a > 1$, то имаме $(n-1)(n-2)/2$ избора за $a$ и $b$, както и $n$ избора за цвета им. Останалите $n-1$ топки (две от които еднакви) трябва да се оцветят в оставащите $n-1$ цвята; за това имаме $(n-1)!/2$ варианта. Следователно в този случай броят на възможните оцветявания е $\frac{1}{4}(n-1)!.n(n-1)(n-2) = \frac{1}{4}n!(n^2-3n+2)$.
Ако $a = 1$, то за оцветяване в $n$ цвята на всички топки освен $a$ има $n!$ варианта. Сега има $n$ избора за цвета на $a$. Така в този случай има $n!.n$ възможни оцветявания.
Окончателно $a_n = \frac{1}{4}n!(n^2-3n+2+4n) = \frac{1}{4}n!(n^2+n+2)$. Ако $a_n$ е кратно на $2024 = 2^3.11.23$ и $n < 23$, то трябва $23|n^2+n+2$. Директна проверка сочи, че най-малкото такова $n$ е 9, но $a_9 = 9!.23$ не се дели на 11, а следващото подходящо $n$ е 13, при което $a_{13} = 13!.46$ се дели на $2^3.11.23$.

*Алтернативно решение.* Нека цветовете са 1, 2, ..., $n$ (номерацията няма отношение към тази на топките). Има $(n+1)!/2$ възможни пермутации на $n+1$-те топки. За всяка от тях използваме цветовете в нарастващ ред на номерата им, използвайки един ($n$ избора кой) за две съседни топки. Получаваме $(n+1)!.n/2$ възможни оцветявания. Ако двете едноцветни топки са с номера 1, 1, то има $n$ възможни избора за цвета им и $(n-1)!$ възможни оцветявания на останалите; общо $n.(n-1)! = n!$ възможни оцветявания. Остават $(n+1)!.n/2 - n! = \frac{1}{2}n!(n^2+n-2)$ оцветявания, всяко от които е броено по два пъти (понеже редът на двете топки с еднакъв цвят не влияе на резултата). Окончателно $a_n = n! + \frac{1}{4}n!(n^2+n-2) = \frac{1}{4}n!(n^2+n+2)$. Кратността на 2024 се анализира като по-горе.

**Оценяване.** (7 точки) 4 т. за доказване $a_n = \frac{1}{4}n!(n^2+n+2)$ или на еквивалентна формула; 3 т. за доказване, че най-малкото подходящо $n$ е 13.

**Задача 8.4.** Естествено число ще наричаме *ямболско*, ако може да се представи във вида $a^2+6ab+b^2$, където $a$ и $b$ са (не непременно различни) естествени числа. Числото $36^{2024}$ е записано като сбор на $k$ на брой (не непременно различни) ямболски числа. Каква е най-малката възможна стойност на $k$?

*Отговор.* 2

*Решение.* Първо ще покажем, че $k=1$ не е възможно, т.е. $a^2+6ab+b^2 = 2^{4048} \cdot 3^{4048}$ няма решение в естествени числа. Ако такива $a, b$ съществуват, то $a^2+b^2$ се дели на 3 и значи $a$ и $b$ се делят на 3. Записвайки $a = 3a_1$, $b = 3b_1$ и разделяйки на $3^2$, получаваме $a_1^2+6a_1b_1+b_1^2 =$

$2^{4048} \cdot 3^{4046}$; повтаряйки този аргумент още 2023 пъти, достигаме до уравнение от вида

$$u^2 + 6uv + v^2 = 2^{4048}$$

където $u$ и $v$ са естествени числа.
Ако $v$ е четно, то и $u$ е четно; записвайки $u = 2u_1$, $v = 2v_1$ и разделяйки на 4, получаваме $u_1^2 + 6u_1v_1 + v_1^2 = 2^{4046}$; повтаряйки неколкократно това, достигаме до уравнение от вида

$$s^2 + 6st + t^2 = 2^{2A},$$

където $s, t, A$ са естествени числа, $t$ е нечетно и $A \geq 2$ (тъй като лявата страна е по-голяма или равна на 8). Последното е еквивалентно на $(s + 3t)^2 - 8t^2 = 2^{2A}$. Сега от модул 8 виждаме, че $(s + 3t)^2$ се дели на 8, значи $s + 3t$ се дели на 4, т.е. $(s + 3t)^2$ се дели на 16. Но тогава $8t^2$ трябва да се дели на 16, което е невъзможно за нечетно $t$, противоречие. Следователно $k = 1$ не е възможно.

За пример с $k = 2$ да забележим първо че

$$36 = [1^2 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2] + [3^2 + 6 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2]$$

и сега умножение по $(6^{2023})^2$ води до

$$36^{2024} = [(6^{2023})^2 + 6 \cdot 6^{2023} \cdot 6^{2023} + (6^{2023})^2] + [(3 \cdot 6^{2023})^2 + 6 \cdot (3 \cdot 6^{2023}) \cdot 6^{2023} + (6^{2023})^2]$$

т.е. $36^{2024}$ е сбор на числата $a_1^2 + 6a_1b_1 + b_1^2$ и $a_2^2 + 6a_2b_2 + b_2^2$, където $a_1 = b_1 = b_2 = 6^{2023}$ и $a_2 = 3 \cdot 6^{2023}$.

*Коментар.* . Стъпката с модул 3 при $k = 1$ не може да се избегне; иначе, ако работим само с модул 4, бихме достигнали $s^2 + 6st + t^2 = 2^{2A} \cdot 3^{4048}$. Проблемът в последното е, че $A$ може всъщност да е 0 и тогава във вида $(s + 3t)^2 - 8t^2 = 3^{4048}$ не изглежда като да може да се достигне противоречие, без да се използва модул 3 многократно.
**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за верен отговор, 2 т. за пример при $k = 2$ (от които 1 т. за представяне на 36), 4 т. за отхвърляне на $k = 1$, от които 1 т. за елиминиране на $3^{4048}$, 1 т. за свеждане до уравнение с поне една нечетна променлива, 1 т. за отделяне на точен квадрат и разглеждане на модул 8, 1 т. за довършване.

**Задача 9.1.** Да се реши системата уравнения:

$$\begin{aligned}(x+1)^2(y+1)^2 &= 27xy \\ (x^2+1)(y^2+1) &= 10xy.\end{aligned}$$

*Решение.* Да отбележим че лявата страна на второто уравнение е положителна и значи $xy > 0$. Тогава нека разпишем повдигането на квадрат в първото уравнение и да разделим и двете страни на $xy$. Получаваме:

$$\begin{aligned}\left(x+2+\frac{1}{x}\right)\left(y+2+\frac{1}{y}\right) &= 27\\ \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right) &= 10.\end{aligned}$$

Полагаме $u=(x+\frac{1}{x})$ и $v=(y+\frac{1}{y})$. Получаваме:

$$\begin{aligned}(u+2)(v+2) &= 27\\ uv &= 10.\end{aligned}$$

Преработваме и получаваме:

$$\begin{aligned}u+v &= 13/2\\ uv &= 10.\end{aligned}$$

Но по формулите на Виет, значи че $u$ и $v$ са корени на $2z^2-13z+20=(2z-5)(z-4)$. Също така, да отбележим и че системата е симетрична за двете променливи, както и изначално за $x$ и $y$. Нека върнем полагането:

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

Следва $x=2$ или $x=\frac{1}{2}$.

$$y+\frac{1}{y}=4$$

Следва $y=2\pm\sqrt{3}$.
Така окончателно получаваме следните 8 решения за $(x,y)$: $(1/2,2+\sqrt{3})$, $(1/2,2-\sqrt{3})$, $(2,2+\sqrt{3})$, $(2,2-\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3},1/2)$, $(2+\sqrt{3},1/2)$, $(2+\sqrt{3},2)$, $(2-\sqrt{3},2)$.

**Оценяване.** (6 точки) 2т. за преработването и полагането; 2т. за намиране на $u$ и $v$; 2т. за довършване.

**Задача 9.2.** Дадено е число $x=\frac{q}{p}$, където $p$ и $q$ са прости числа, $p>q$ и 240 не дели $p^4-q^4$. Да се намери максималната стойност на $x$.

*Решение.* Първо, за просто число $p>3$ имаме че $p\equiv\pm1 \pmod 3$ от където $p^4\equiv 1 \pmod 3$ и $p^4-q^4$ се дели на 3 за прости числа по-големи от 3.
Също така $p^4\equiv 1 \pmod 5$ по малката теорема на Ферма (или по теорема на Ойлер, или просто чрез директно изчерпване), следователно $p^4-q^4$ се дели на 5 за прости числа по-големи от 5.

Сега $p^4 - q^4 = (p^2+q^2)(p+q)(p-q)$. Ако $p$ и $q$ са нечетни прости числа с различни остатъци по модул 4, то $p+q$ се дели на 4, а останалите две числа са четни и произведението се дели на 16. Ако са нечетни прости числа с еднакви остатъци по модул 4, то $p-q$ се дели на 4, а останалите две числа са четни и произведението се дели на 16. Ако $q = 2$ произведението не се дели на 16.

Получаваме, че за да бъде изпълнено условието на задачата трябва $q \leq 5$. Остава да проверим кой от трите максимума за фиксирано $q$: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{7}$ е най-голям. Отговор: $\frac{5}{7}$.

**Оценяване.** (6 точки) 1т. за разсъжденията по модул 3; 2т. за разсъжденията по модул 5; 2т. за делимостите на степен на 2; 1 точка за верен отговор.

**Задача 9.3.** Даден е триъгълник $ABC$ с дължина на страните $BC$, $CA$ и $AB$ съответно $a, b, c$, като $2b = a + c$. Нека $O$ и $J$ са съответно центровете на описаната и вписаната за триъгълника окръжности. Да се докаже, че правите $OJ$ и $BJ$ са перпендикулярни.

*Решение.* Нека $BB_1$ е ъглополовяща на $\measuredangle ABC$ и $B_1$ лежи на $AC$. Знаем че $BB_1^2 = AB.AC - AB_1.B_1C$. Имаме също $CB_1 = \frac{ab}{a+c} = \frac{ab}{2b} = \frac{a}{2}$ и аналогично $AB_1 = \frac{c}{2}$. Така получаваме, че $BB_1 = \sqrt{ac - \frac{ac}{4}} = \frac{\sqrt{3ac}}{2}$.

От свойствата на ъглополовящата за триъгълник $CBB_1$ имаме $B_1J : JB = B_1C : CB = 1 : 2$ и значи $3B_1J = BB_1$.

Нека $BB_1$ пресича описаната окръжност в точка $J'$. Тогава от свойствата на хордите имаме $AB_1.B_1C = J'B_1.B_1B$. Или:

$$\frac{ac}{4} = \frac{\sqrt{3ab}}{2}.J'B_1$$

От тук $J'B_1 = \frac{\sqrt{3ab}}{6} = \frac{1}{3}BB_1$. Но тогава значи $B_1J = B_1J'$ и следователно $JJ' = BJ$. $J$ е среда на хорда и значи $OJ \perp BJ$.

**Оценяване.** (7 точки) 2т. за изразяване на $BB_1$; 2т. за $B_1J$; 2т. за $J'B_1$; 1т. за довършване.

**Задача 9.4.** 11 точки са разположени на равни разстояния по окръжност. Прекарани са няколко отсечки, с краища дадените точки. Отсечките са оцветени в два цвята така, че всяка отсечка пресича във вътрешна за нея точка не повече от една отсечка от същия цвят. Да се определи колко най-много могат да бъдат прекараните отсечки.

*Решение.* Първо ще докажем, че максималният брой отсечки в един цвят, такива, че всяка от тях пресича не повече от една от останалите е 23. Нека P е броят на отсечките, които не пресичат нито една от отсечките и нека Q е броят на отсечките, които пресичат точно една от останалите. Тогава

$$P + \frac{Q}{2}$$

не надвишава броят на отсечките в някоя триангулация на точките, който е винаги

$$\frac{9.3 - 11}{2} + 11 = 19,$$

тъй като всяка триангулация в 11-ъгълника е съставена от 9 триъгълника и всяка отсечка, която не е по изпъкналата обвивка участва в 2 триъгълника. Оттук

$$P+Q=P+\frac{Q}{2}+\frac{Q}{2}\leq 19+\frac{Q}{2},$$

което достига най-голяма стойност когато Q е възможно най-голямо. Всяка двойка пресичащи се отсечки, образува изпъкнал четириъгълник, който не се пресича от никоя от останалите отсечки (в противен случай някоя от двете отсечки, които са диагонали в четириъгълника ще се пресича с поне две други). Такъв четириъгълник ще наричаме *независим*. Сумата от ъглите на 11-ъгълника е

$$(11-2).180^o=180^o+4.360^o$$

т.е. броят на независимите четириъгълници е не повече от 4. Откъдето и

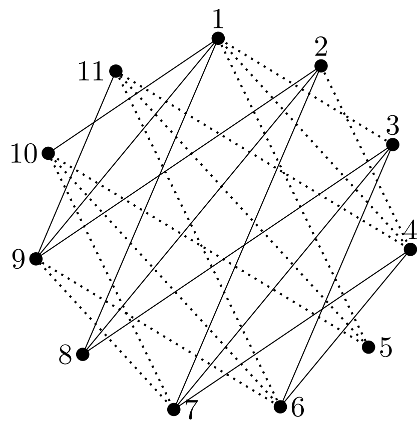
$$Q\leq 4.$$

Така броят на отсечките в 11-ъгълника така, че всяка от тях пресича не повече от 1 от останалите е 19+4=23.

Оттук максималният брой отсечки от един от цветовете, които са във вътрешността на многоъгълника е 23-11=12. Общия брой на отсечките в двата цвята не надвишава

$$2.12+11=35.$$

Пример. Нека поставим точките в координатна система и двата цвята са син и оранжев. Нека да номерираме точките с 1,2,3,...,11 и да ги свържем както е показано. Правите, които съдържат сините отсечки са с положителен наклон спрямо абсцисата, а оранжевите - с отрицателен: Отсечките по изпъкналата обвивка може да са и в двата цвята.




**Оценяване.** (7 точки) 2 точки за ограничаването на $P+\frac{Q}{2}$ от триангулация; 1 точка за брой на отсечки в триангулация; 2 точки за $Q\leq 4$; 2 точки за пример.

*Забележка. Задачата може да се обобщи за произволен брой точки, като за нечетен брой – 2n+1 търсеният брой е 8n-5. За четен брой – 2n, търсеният брой е 8n-8. Примерът се построява по аналогичен начин.*

**Задача 10.1.** Да се пресметне $A_{2024}$, където

$$A_n=1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 8+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n.$$

*Решение.* Тъй като

$$2A_n = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^n + (2n-1) \cdot 2^{n+1},$$

то

$$\begin{aligned} A_n = 2A_n - A_n &= (2n-1) \cdot 2^{n+1} - (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + \cdots + 2 \cdot 2^n) \\ &= (2n-1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n) + 1 \cdot 2 \\ &= (2n-1) \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2-1} + 2 = (2n-3) \cdot 2^{n+1} + 6. \end{aligned}$$

Следователно $A_{2024} = 4045 \cdot 2^{2025} + 6$.

**Оценяване.** (6 точки) 2т. за пресмятането на $2A_n$; 1т. за изразяването $A_n = 2A_n - A_n$; 2т. за пресмятане на геометричната прогресия и изразяване на $A_n$ в затворена форма; 1т. за довършване.

**Задача 10.2.** Да се намерят всички естествени числа $k$, за които съществуват естествени числа $x, y$, такива че числото $\dfrac{x^k y}{x^2 + y^2}$ е просто.

*Решение.* Нека $d = (x, y)$ е най-големият общ делител на числата $x$ и $y$. Тогава, $x = dx_1$, $y = dy_1$, където $x_1, y_1$ са естествени и взаимно прости. Изразът в условието се преработва до

$$A(x,y) = \frac{d^{k-1}}{x_1^2 + y_1^2} x_1^k y_1 = p,$$

където искаме $p$ да е просто. Но

$$\left(x_1^k, x_1^2 + y_1^2\right) = \left(x_1^{\min(k,2)}, y_1^2\right) = 1 = \left(x_1^2, y_1\right) = \left(y_1, x_1^2 + y_1^2\right),$$

т.е., $x_1^k y_1$ е взаимно просто с $x_1^2 + y_1^2$ и за да бъде $p$ цяло е необходимо $x_1^2 + y_1^2 \mid d^{k-1}$. Тъй като $x_1^2 + y_1^2 \geq 2$, то $k \geq 2$. Освен това, ако $x_1 > 1$, то съществува негов прост делител $q$ и $q^k \mid p$, което е противоречие с простотата на $p$. Следователно, за да бъде $p$ просто цяло число е необходимо да сме в един от следните два сценария: едновременно да са изпълнени

1) $x_1 = 1$, $y_1 = p$ и $x_1^2 + y_1^2 = d^{k-1}$; или 2) $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ и $p \cdot (x_1^2 + y_1^2) = d^{k-1}$.

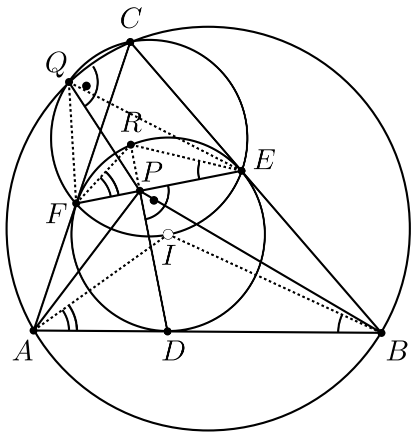
Първият сценарий води до $d^{k-1} = p^2 + 1$. Директна проверка показва, че за $p = 2$, $2^2 + 1 = 5$ не е степен на естествено число, а за $p > 2$, $2 \mid p^2 + 1$, но $4 \nmid p^2 + 1$. Следователно, $k > 2$ не води до решение тук. При $k = 2$, за произволно просто $p$ двойката $(x, y) = \left(p^2 + 1, p(p^2 + 1)\right)$ води до $A(x, y) = p$ и изпълнява условието на задачата. Следователно, $k = 2$ е решение.

Вторият сценарий води до $2 \cdot p = d^{k-1}$, чието единствено решение е $p = 2$ и $k = 3$. В този случай единствено двойката $(x, y) = (2, 2)$ води до $A(x, y) = 2$ и изпълнява условието на задачата.

Окончателно, всички решения са $k \in \{2,3\}$, като при $k=2$ $A(x,y)$ може да приеме произволна проста стойност, докато при $k=3$ единственото просто $A(x,y)$ е $A(2,2)=2$.

**Оценяване.** (6 точки) По 1т. за определяне всеки от двата сценария; по 2т. за пълното решаване на всеки от тях.

**Задача 10.3.** Вписаната окръжност в $\triangle ABC$ ($AC \neq BC$) се допира до страните му $AB$, $BC$ и $CA$ в точките $D$, $E$ и $F$ съответно. Нека $P$ е петата на перпендикуляра от $D$ към $EF$ ($P \in EF$). Ако описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle EFC$ се пресичат за втори път в точка $Q$, да се докаже, че $\angle PQC = 90^\circ$.




*Решение.* От факта, че $C$ лежи на описаната около $\triangle FEQ$ окръжност и $CE = CF$ следва, че $CQ$ е външна ъглополовяща за $\sphericalangle FQE$ и остава да докажем, че $QP$ е ъглополовяща на $\sphericalangle FQE$, т.е. $QF : QE = FP : PE$. От $\sphericalangle QFC = \sphericalangle QEC$ и $\sphericalangle QAC = \sphericalangle QBC$ следва, че $\triangle QFA \sim \triangle QEB$, т.е.

$$QF : QE = AF : BE = AD : BD.$$

Нека $I$ е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност $k$ и правата $DP$ пресича за втори път $k$ в точка $R$. Тогава

$$\sphericalangle REF = \sphericalangle RDF = 90^\circ - \sphericalangle DFE = 90^\circ - \sphericalangle DIB = \sphericalangle IBA$$

и аналогично $\sphericalangle RFE = \sphericalangle IAB$, т.е. $\triangle FER \sim \triangle ABI$. Но $RP \perp EF$, $ID \perp AB$, т.е. $P$ и $D$ са съответни елементи в подобни триъгълници и $FP : PE = AD : BD$, с което доказателството е завършено

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за свеждане на задачата до $QF : QE = FP : PE$; 2 т. за $QF : QE = AD : BD$; 3 т. за $FP : PE = AD : BD$.

**Задача 10.4.** Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намери най-малкото реално число $k > 0$ със следното свойство: Ако $G$ е свързан граф с $n$ върха и $m$ ребра, то винаги е възможно да изтрием не повече от $k \cdot \left(m - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ ребра, така че върховете да могат да се оцветят в два цвята и всяко неизтрито ребро да има разноцветни върхове.

*Отговор.* $k = 1/2$ за всяко $n$.

*Решение.* **Лема:** Нека $G$ е свързан граф с поне 3 върха. Тогава или съществуват два върха, свързани с ребро, премахването на които (заедно с ребрата, излизащи от тях) оставя $G$ свързан, или съществуват два върха от степен 1 (т.е., “листа”).

Доказателство: Да разгледаме произволно “покриващо дърво” на $G$ и да вземем за негов “корен” произволен връх, който не е “листо”. Нека $v$ е най-отдалечения връх от “корена”, а $u$ е “предшественика” му. Нека $v_1, v_2, \ldots, v_k$ са “наследниците” на $u$. Ясно е, че те всички са листа в дървото.

1 сл. Измежду $v_1, v_2, \ldots, v_k$ има два върха, свързани с ребро в $G$. Тогава премахването на тези два върха оставя дървото (а значи и $G$) свързано.

2 сл. Измежду $v_1, v_2, \ldots, v_k$ има два върха, които са листа в $G$. Тогава в изходния граф наистина има поне две листа.
3 сл. Измежду $v_1, v_2, \ldots, v_k$ има не повече от един връх, който е листо в $G$ (б.о.о., нека това е $v_1$). Тогава да "свържем" всеки от $v_2, \ldots, v_k$ с произволен връх в $G$, различен от $u$ (такива върхове има, като никое от тези "свързващи" ребра не е част от покриващото дърво, поради екстремалния избор на $u$, т.е., всяко от тях е част от цикъл, всички останали ребра на който са от покриващото дърво). Сега можем да премахнем $u$ и $v_1$ и отново ще имаме покриващо дърво, а значи $G$ остава свързан.
С това лемата е доказана. С нейна помощ лесно можем да докажем следното
**Твърдение:** Нека $G$ е свързан граф с $n \geq 2$ върха. Тогава можем да оцветим върховете му в два цвята, така че ако $x$ и $y$ са съответно броя на "разноцветните" и "едноцветните" ребра, то $x - y \geq \left[\frac{n}{2}\right]$.
Доказателство: При $n = 2, 3$ твърдението се проверява непосредствено. Нека $n \geq 4$ и $G$ е свързан граф с $n$ върха. Нека $u$ и $v$ са двата върха от Лемата. "Премахваме" $u$ и $v$ и оцветяваме $G \setminus \{u, v\}$ съгласно индукционната хипотеза. Сега не е трудно да се съобрази, че можем да оцветим $u \cup v$ така, че разглежданата разлика да се увеличи поне с 1. Наистина, това е ясно, ако $u$ и $v$ са листа, а в противен случай, разглеждайки четността на броя съседи на $u \cup v$ в $G \setminus \{u, v\}$, виждаме че винаги има такъв начин. Твърдението е доказано по индукция.
Нека сега разгледаме произволен свързан граф $G$ с $n \geq 3$ върха и $m$ ребра. "Оцветяваме" го съгласно Твърдението: имаме $x - y \geq \left[\frac{n}{2}\right]$; $x + y = m$, следователно

$$y \leq \frac{1}{2} \cdot \left(m - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

и изтриването на $y$ ребра удовлетворява условието. Така, получихме $k \leq \frac{1}{2}$.
За да покажем, че $k \geq \frac{1}{2}$ нека разгледаме пълния граф с $n$ върха. Необходимо и достатъчно условие за да имаме оцветяването от условието е, получения след изтриването на ребрата граф да е двуделен. Наистина, в графа не трябва да има цикли с нечетна дължина, което е еквивалентно на горното.
1 сл. $n = 2n_1$, $n_1 \geq 2$. Тогава $m = \binom{n}{2}$. За досатигане до двуделен граф, трябва да изтрием всички ребра във всяка от двете групи върхове, като броя изтрити ребра е минимален, когато двете групи са равномощни и съдържат по $n_1$ върха. Така, трябва да изтрием поне

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_1}{2} = n_1^2 - n_1$$

ребра. Оттук

$$n_1^2 - n_1 \leq k \cdot \left(\binom{2n_1}{2} - \left[\frac{2n_1}{2}\right]\right) = k \cdot \left(\frac{2n_1(2n_1-1)}{2} - n_1\right) \implies k \geq \frac{1}{2}.$$

2 сл. $n = 2n_1 + 1$, $n_1 \geq 1$. Аналогично, тук трябва да изтрием поне

$$\binom{n_1+1}{2} + \binom{n_1}{2} = n_1^2$$

ребра и отново

$$n_1^2 \le k \cdot \left( \binom{2n_1+1}{2} - \left[ \frac{2n_1+1}{2} \right] \right) = k \cdot \left( \frac{2n_1(2n_1+1)}{2} - n_1 \right) \implies k \ge \frac{1}{2}.$$

Задачата е решена.

**Оценяване.** (7 точки) 5т. за $k \le 1/2$, от които 3т. за Лемата, 1т. за Твърдението и 1т. за конструкция на оцветяването; 2т. за $k \ge 1/2$.

**Задача 11.1.** Първият, седмият и седемнадесетият членове на аритметична прогресия са различни и са последователни членове на геометрична прогресия. Да се намери разликата на аритметичната прогресия, ако първият ѝ член е решение на уравнението

$$x^2 - 9x + x\sqrt{12-x} - 9\sqrt{12-x} = 0.$$

*Решение.* Нека $a_1$ и $d$ са съответно първият член и разликата на аритметичната прогресия. От условието $a_1$, $a_1 + 6d$ и $a_1 + 16d$ са последователни членове на геометрична прогресия, т. е.

$$(a_1 + 6d)^2 = a_1.(a_1 + 16d) \iff d.(a_1 - 9d) = 0.$$

Тъй като $d \neq 0$, то получаваме, че $a_1 = 9d$. Освен това имаме $(x-9)(x+\sqrt{12-x}) = 0$ и $x \le 12$. Тогава $x = 9$ или $\sqrt{12-x} = -x$, т.е. $x^2 + x - 12 = 0$ и $x \le 0$, откъдето $x = -4$. Тогава $a_1 = 9$ и $a_1 = -4$, като съответно $d = 1$ и $d = -\dfrac{4}{9}$.

**Оценяване.** (6 точки) 2т. за извода $a_1 = 9d$; 3т. за намиране на $x = a_1 = 9$ и $x = a_1 = -4$ и 1т. съответно за $d = 1$ и $d = -\dfrac{4}{9}$.

**Задача 11.2.** Точките $P$, $Q$ и $R$ са от страните $AB$, $BC$ и $AC$ на $\triangle ABC$. Ако отсечките $AQ$, $BR$ и $CP$ се пресичат в една точка и $\measuredangle APR = \measuredangle BPQ$, да се докаже, че $CP \perp AB$.

*Решение.* Нека $X$ и $Y$ са пресечните точки на $PR$ и $PQ$ с правата през $C$, успоредна на $AB$. От подобията $\triangle CXR \sim \triangle APR$ и $\triangle CQY \sim \triangle BQP$ получаваме, че

$$\frac{CX}{AP} = \frac{CR}{RE} \quad \text{и} \quad \frac{CY}{BP} = \frac{CQ}{QB}.$$

Следователно $CX = \dfrac{AP.CR}{RE}$ и $CY = \dfrac{CQ.BP}{QB}$. От теоремата на Чева имаме

$$\frac{AP}{PB}.\frac{BQ}{QC}.\frac{CR}{RA} = 1$$

откъдето следва, че $CX = CY$. От друга страна $\triangle PXY$ е равнобедрен поради $\measuredangle PXY = \measuredangle APR = \measuredangle BPQ = \measuredangle PYC$. Тъй като $PC$ е медиана в равнобедрения триъгълник, получаваме $CP \perp AB$.

**Критерии за оценяване:** (6 точки) 1 точка за разглеждане на точките $X$ и $Y$; 3 точки за $PX = PY$; 2 точки за довършване.

**Задача 11.3.** Дадено е рационално число $q > 3$ такова, че $q^2 - 4$ е квадрат на рационално число. Редицата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е дефинирана по следния начин:

$$a_0 = 2,\ a_1 = q,\ a_{i+1} = qa_i - a_{i-1}, \text{ за всяко } i = 1, 2, \dots$$

Съществуват ли естествено число $n$ и ненулеви цели числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ със сбор 0 такива, че ако запишем числото $b_0a_0 + b_1a_1 + \dots + b_na_n$ във вида $\dfrac{A}{B}$, където $A$ и $B$ са взаимнопрости цели числа, то $A$ не се дели на квадрат на просто число.

*Решение.* Ще докажем, че такива числа не съществуват.

Квадратното уравнение $x^2 - qx + 1 = 0$ има два рационални корена $t$ и $\dfrac{1}{t}$, за които $t + \dfrac{1}{t} = q$. По индукция лесно следва, че $a_m = t^m + \dfrac{1}{t^m}$. Да допуснем, че съществуват цели числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ удовлетворяващи условието на задачата.

*Лема.* Нека $f(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$ е полином с ненулеви цели коефициенти за които $c_{n-k} = c_k$ за всяко $k = 0, 1, \dots, n$ и $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} c_i = 0$. Тогава $f(x) = (x-1)^2g(x)$, където $g(x)$ е полином с цели коефициенти.

*Доказателство:* От условието имаме, че $f(1) = 0$. Тъй като

$$f'(x) = nc_nx^{n-1} + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + \dots + c_1,$$

то

$$2f'(1) = (nc_n + (n-1)c_{n-1} + \dots + c_1) + (nc_0 + (n-1)c_1 + \dots + c_{n-1}) = n(c_n + c_{n-1} + \dots + c_1 + c_0) = 0$$

и следователно $x = 1$ е двоен корен. Лемата е доказана.

Полиномът $f(x) = b_nx^{2n} + b_{n-1}x^{2n-1} + \dots + b_1x^{n+1} + 2b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x + b_n$. изпълнява условията на лемата. Не е трудно да се види, че

$$t^n\left(b_n\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right) + b_{n-1}\left(t^{n-1} + \frac{1}{t^{n-1}}\right) + \dots + 2b_0\right) = f(t) = (t-1)^2g(t).$$

Освен това, ако $t = \dfrac{r}{s}$, $(r, s) = 1$, то от $\dfrac{r}{s} + \dfrac{s}{r} = q > 3$ лесно следва, че $r \geq s + 2$, т.е. $r - s \geq 2$. Тогава $g\left(\dfrac{r}{s}\right)$ е число от вида $\dfrac{l}{s^{2n-2}}$.

Окончателно $b_0a_0 + b_1a_1 + \dots + b_na_n$ се представя във вида $\dfrac{(r-s)^2.l}{r^n.s^n}$ и понеже числото $r - s \geq 2$ и $(r-s, r) = (r-s, s) = 1$, то числителят винаги ще се дели на квадрат на просто число.

**Оценяване.** (7 точки) 2т. за $a_m = t^m + \dfrac{1}{t^m}$; 3т. за лемата; 2т. за довършване на решението.

**Задача 11.4.** Страните и диагоналите на правилен $n$-ъгълник са оцветени в $k \geq 3$ цвята. За всеки цвят $i$ между всеки два върха на многоъгълника съществува път, съставен само от отсечки от цвят $i$. Да се докаже, че съществуват три върха на многоъгълника $A$, $B$ и $C$ такива, че отсечките $AB$, $BC$ и $AC$ са разноцветни.

*Решение.* Трябва да докажем, че в пълен граф с $n$ върха и $k$ цвята, където индуцирания граф по всеки цвят е свързан, съществува разноцветен триъгълник. Да означим цветовете с $1, 2, 3, \ldots, k$ и да преоцветим всички ребра, които са в някой от цветовете $4, 5, \ldots, k$ в цвят 3. Новият граф изпълнява условието за свързаност по всеки цвят и ако за него има разноцветен триъгълник, то същия триъгълник в началния граф също ще бъде разноцветен. Следователно можем да считаме, че $k = 3$.
Да допуснем, че твърдението не е вярно за граф $G$, като можем да изберем $G$ да има минимален брой върхове. От минималността на $G$ следва, че след премахването на произволен връх, новият граф няма да бъде свързан по някой от цветовете и нека това е цвят 1. Да означим с $G_1, G_2, \ldots, G_t$ компонентите на свързаност по цвят 1 след изтриване на връх $A$. Тъй като $G$ е свързан по цвят 1, то съществуват $A_i \in G_i$ за които $AA_i$ е в цвят 1. Отсечката $A_1A_2$ не е в цвят 1, защото $G_1$ и $G_2$ са различни компоненти на свързаност. Нека тя е в цвят 2. Ако $A_1B$ е отсечка с цвят 1 от $G_1$, то отсечката $A_2B$ не може да е от цвят 1, защото $G_1$ и $G_2$ са различни компоненти на свързаност; не може да е от цвят 3, защото тогава $A_1A_2B$ е разноцветен триъгълник и следователно е от цвят 2. Аналогично се доказва, че всички отсечки между точките от $G_1$ и $G_2$ са от цвят 2. Получихме, че всички отсечки между всеки две компоненти на свързаност са или в цвят 2 или в цвят 3.
Сега да разгледаме отсечки $AX$ и $AY$ съответно в цвят 2 и 3 (такива отсечки има, тъй като $G$ е свързан по всеки от цветовете). Без ограничение имаме следните два случая:
1. $X, Y \in G_1$, като тогава единият от триъгълниците $AXA_2$ и $AYA_2$ е разноцветен.
2. $X \in G_1$ и $Y \in G_2$, като тогава единият от триъгълниците $AXA_2$ и $AYA_1$ е разноцветен.
Полученото противоречие показва, че за всеки граф с дадените свойства съществува разноцветен триъгълник.

**Оценяване.** (7 точки) 1т. за свеждане на задачата до три цвята; 1т. за разглеждане на минимален граф; 1т. за наблюдението, че след премахване на една точка графът не е свързан по един от цветовете; 2т. за наблюдението, че отсечките между две компоненти са едноцветни; 2т. за получаване на противоречие.

**Задача 12.1.** Мария и Биляна играят следната игра. Мария разполага с 2024, а Биляна с 2023 честни монети. Монетите се хвърлят на случаен принцип - вероятността за всяка отделна монета да бъде ези след хвърлянето е $\frac{1}{2}$. Мария печели, ако сред нейните монети има строго повече езита отколкото сред тези на Биляна, а в противен случай Биляна печели. Каква е вероятността Мария да спечели?

*Решение.* Нека $p$ е вероятността Мария да има повече езита от Биляна след хвърляне на първите 2023 от монетите на Мария. Тогава от съображения за симетрия вероятността

Мария да има по-малко езита от Биляна е също $p$ и следователно вероятността Мария и Биляна да са хвърлили равен брой езита е $1-2p$. Ако Мария е хвърлила по-малко езита от Биляна до този момент, вероятността и да спечели е 0(независимо от последната монета), ако е хвърлила сторго повече езита, вероятността да спечели е 1 (отново независимо от последната монета), а ако са хвърлили по равен брой вероятността да спечели е $\frac{1}{2}$(тук последната монета трябва да е ези задължително).
Така получаваме, че вероятността Мария да спечели е $p+\frac{1-2p}{2}=\frac{1}{2}$.

**Оценяване.** (6 точки) 1т. за разглеждане на първите 2023 монети на Мария; 3т. за съображението за симетрия; 2т. за довършване.

**Задача 12.2.** Даден е разностранен и остроъгълен $\triangle ABC$ с $AC > BC$. Нека точка $P$ от вътрешността на $\triangle ABC$ е такава, че $\measuredangle APB = 180^\circ - \measuredangle ACB$ и нека $AP$ и $BP$ пресичат отсечките $BC$ и $AC$ в точките $A_1$ и $B_1$ съответно. Нека $M$ е средата на $A_1B_1$, а окръжностите описани около $\triangle ABC$ и $\triangle A_1CB_1$ се пресичат за втори път в точка $Q$. Да се докаже, че $\measuredangle PQM = \measuredangle BQA_1$.

*Решение.* Нека $P'$ е симетрична на $P$ спрямо средата $N$ на $AB$. Тогава имаме, че $AP'BP$ е успоредник, откъдето следва, че $AP'BC$ е вписан. Оттук получаваме, че $\measuredangle AQP' = \measuredangle ABP' = \measuredangle BAP$. От друга страна $\measuredangle AQP = \measuredangle AQC - \measuredangle PQC = 180^\circ - \measuredangle ABC - \measuredangle AA_1B = \measuredangle PAB$, където използвахме, че $P$ лежи на описаната около $\triangle A_1B_1C$ окръжност. Така получаваме, че $\measuredangle AQP' = \measuredangle AQP$, откъдето следва, че $P, Q, P'$ лежат на една права, т.е $N \in PQ$. Също имаме, че $\triangle AQB \sim \triangle B_1QA_1$, което означава, че $\measuredangle NQB = \measuredangle MQA_1$ като съответни елементи. Последното е еквивалентно на $\measuredangle PQB = \measuredangle MQA_1$, откъдето следва, че $\measuredangle PQM = \measuredangle BQA_1$.

**Оценяване.** (6 точки) 1т. за построяване на точка $P'$; 2т. за доказване, че $N \in PQ$; 2т. за $\triangle AQB \sim \triangle B_1QA_1$; 1т. за довършване.

**Задача 12.3.** Нека $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{A}$ е непразна фамилия от непразни подмножества на $\{1, 2, \ldots, n\}$ със следното свойство – ако $A \in \mathcal{A}$ и $A \subset B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, то $B \in \mathcal{A}$. Да се докаже, че функцията

$$f(x) := \sum_{A\in\mathcal{A}} x^{|A|}(1-x)^{n-|A|}$$

е строго растяща в интервала $(0, 1)$.

*Решение.* (Първи начин)
За удобство ще наричаме свойството на $\mathcal{A}$ от условието свойство $(P)$. За произволна фамилия $\mathcal{B}$ от подмножества на $\{1, 2, \ldots, k\}$ да дефинираме $f(x, \mathcal{B}, k) := \sum\limits_{A\in\mathcal{B}} x^{|A|}(1-x)^{k-|A|}$.
Нека $\mathcal{A}_0 := \{A \subseteq \{1, 2, , \ldots, n-1\} : A \in \mathcal{A}\}$ и $\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\} : A \cup \{n\} \in \mathcal{A}\}$ и да забележим, че $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$, както и че $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ също имат свойство $(P)$. Също така имаме, че

$$\begin{aligned} f(x, \mathcal{A}, n) &= \sum_{A\in\mathcal{A}_0} x^{|A|}(1-x)^{n-|A|} + \sum_{A\in\mathcal{A}_1} x^{|A|+1}(1-x)^{n-|A|-1|} \\ &= (1-x)f(x, \mathcal{A}_0, n-1) + xf(x, \mathcal{A}_1, n-1). \end{aligned}$$

Сега твърдението следва с индукция по $n$. За $n = 1$ имаме, че $\mathcal{A} = \{1\}$ и $f(x, \mathcal{A}, 1) = x$ съответно. Нека $n \geq 2$. Да допуснем, че $f(x, \mathcal{B}, k)$ е растяща за всяко $k \leq n-1$ и произволна фамилия $\mathcal{B}$ от подмножества на $\{1, 2, \ldots, k\}$, която има свойството $(P)$. Тогава имаме

$$f'(x, \mathcal{A}, n) = (1-x)f'(x, \mathcal{A}_0, n-1) + xf'(x, \mathcal{A}_1, n-1) + f(x, \mathcal{A}_1, n-1) - f(x, \mathcal{A}_0, n-1) > 0,$$

което следва от индукционната хипотеза и от $f(x, \mathcal{A}_1, n-1) - f(x, \mathcal{A}_0, n-1) \geq 0$, защото $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1$.
(Втори начин)
Нека $0 < p < q < 1$. Да забележим, че $p^* = \frac{q-p}{1-p} \in (0, 1)$. Конструираме множествата $X$ и $Y$ по следния начин : За всеки елемент $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ слагаме $i$ в $X$ с вероятност $p$(независимо едно от друго), а за всеки елемент $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \backslash X$ поставяме $j$ в $Y$ с вероятност $p^*$. Тогава $\mathbb{P}(x \in X \cup Y) = p + (1-p)p^* = q$. Лесно се вижда, че $f(p) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{A})$, а $f(q) = \mathbb{P}(X \cup Y \in \mathcal{A})$, но т.к $\mathcal{A}$ има свойството от условието имаме, че $X \subseteq X \cup Y \Rightarrow f(p) < f(q)$.

**Оценяване.** (7 точки) 1т. за идея за иднукция по $n$; 1т. за дефиниране на $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$; 1т. за отбелязване, че $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ имат свойството $(P)$; 2т. за доказване на рекурентната зависимост за $f$; 2т. за довършване.

**Задача 12.4.** Ще наричаме едно естествено число $m$ *Спировско*, ако съществуват цели числа $a, b, c$, за които $m = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$. Да се докаже, че съществува естествено число $n < 2024$ такова, че за безбройно много прости числа $p$, числото $np$ е *Спировско.*

*Решение.* **Лема.** Нека $p$ е просто число, а $a, b, c \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тогава съществуват $x, y, z \in \mathbb{Z}$ такива, че $|x|, |y|, |z| < \sqrt[3]{p}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ и $ax + by + cz \equiv 0 \pmod{p}$.
*Доказателство.* Да разгледаме множеството $M := \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \sqrt[3]{p} \rfloor\}\}$. Имаме, че $|M| > p$, т.е в $M$ има два различни елемента $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$, за които $ax_1 + by_1 + cz_1 \equiv ax_2 + by_2 + cz_2 \pmod{p}$. Така $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ изпълнява условията от лемата.
Нека сега $p \equiv 2 \pmod{3}$. Тогава сравнението $x^3 \equiv 2 \pmod{p}$ има решение $a$, т.к функцията $x \mapsto x^3$ е инективна в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, откъдето следва, че е сюрективна. Един начин да се провери това е да се види, че $x^3 \equiv 1 \pmod{p}$ има само 1 за решение, т.к $(3, p-1) = 1$ и следователно показателят на $x \pmod{p}$ е 1.
От лемата съществуват $x, y, z$ с $|x|, |y|, |z| < \sqrt[3]{p}$, за които $x + ay + a^2z \equiv 0 \pmod{p}$. Оттук получаваме, че $x^3 + a^3y^3 + a^6z^3 - 3a^3xyz \equiv 0 \pmod{p}$. Последното е еквивалентно на $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz \equiv 0 \pmod{p}$. От друга страна $|x|, |y|, |z| < \sqrt[3]{p}$ дава $|x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz| < 13p$. Също така да забележим, че ако $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz < 0$, то тройката $(-x, -y, -z)$ ще даде естествено число, делящо се на $p$.
Остана да отбележим, че $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz \neq 0$. Наистина, ако $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$, то имаме $(x + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4}z)((x - \sqrt[3]{2}y)^2 + (x - \sqrt[3]{4}z)^2 + (\sqrt[3]{2}y - \sqrt[3]{4}z)^2) = 0$, т.е $x = \sqrt[3]{2}y = \sqrt[3]{4}z$ или $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} = 0$, чиито единствени решения в цели числа са $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ (първото следва т.к $\sqrt[3]{2}$ е ирационално, а второто следва от факта, че $x^3 - 2$ е минималният полином на $\sqrt[3]{2}$ над рационалните числа).

**Оценяване.** (7 точки) 2т. за лемата; 1т. за избор на просто число $p \equiv 2 \pmod 3$); 1т. за доказателство, че $\sqrt[3]{2}$ съществува по модул $p$; 1т. за доказване, че съществува $n$ с $|n| < 13$; 2т. за отхвърляне на случая $n = 0$.

**Задачите са предложени от:** 8.1, 8.3 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.4 – Мирослав Маринов; 9.1,10.1 – Недялка Димитрова; 9.2 – Константин Делчев; 9.3 – Ангел Гушев; 9.4 – Младен Вълков; 10.2 – Константин Делчев и Станислав Харизанов; 10.3 – Стоян Боев; 10.4, 11.3 – Александър Иванов; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.3, 12.4 – Кристиян Василев.