Université de La Rochelle
L2 Mathématiques

2020-2021

Mathématiques Générales 2

TD 5

Exercice 1 Soient $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

1) Montrer que $u_n \sim_{+\infty} v_n$.

2) Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont-elles de même nature ?

Exercice 2 Etudier la nature des séries de terme général : (préciser quand c'est possible si la série est convergente, absolument convergente, semi-convergente ou divergente)

$$u_n = \frac{a^n}{n!},\ a \in \mathbb{C} \qquad u_n = na^{n-1},\ a \in \mathbb{C} \qquad u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n + \sin n}} \qquad u_n = \frac{\sin^2 n}{n}$$

Exercice 3 Etudier la nature des séries : (préciser quand c'est possible si la série est convergente, absolument convergente, semi-convergente ou divergente)

$$u_n = (-1)^n \ln\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big),\ n \geq 2 \qquad u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!} \qquad u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$u_n = \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\Big) \qquad u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \qquad u_n = \sin\big(\tfrac{n^2+1}{n}\pi\big)$$

Exercice 4 Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!\, 2^{n-k}}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Indication : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.