

Scan

A5318

Krewer & ...

Ponderation ..

1. sequence

594

COMBINATOIRE. — Pondération entière minimale de \mathbb{N} telle que pour tout k toutes les k -parties de \mathbb{N} aient des poids distincts. Note (*) de Germain Kreweras et Miguel-Angel Alvarez Rodriguez, présentée par Marcel-Paul Schützenberger.

On exhibe une application $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout entier $k \geq 0$ toutes les sommes de valeurs sur les parties de cardinal k de \mathbb{N} soient distinctes. On établit que s peut être définie par $s_0 = 0, s_1 = 1$ et $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-p_n}$ où $(p_1 p_2 \dots p_n \dots)$ désigne la suite (1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 ...), et que la suite s est minimale en ce sens que chaque s_{n+1} est la plus petite valeur possible pour $s_0 s_1 \dots s_n$ donnés.

COMBINATORICS. — Minimal Integer Weighting of \mathbb{N} such that for any k all the k -subsets of \mathbb{N} have Unequal Weights.

A mapping $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is exhibited, such that for any integer $k (\geq 0)$ all the sums of values on the k -subsets of \mathbb{N} are unequal. It is proved that s can be defined by $s_0 = 0, s_1 = 1$ and $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-p(n)}$, where $(p_1 p_2 \dots p_n \dots)$ is the sequence (1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 ...), and that the sequence s is minimal in the sense that s_{n+1} is the smallest possible value for given $s_0 s_1 \dots s_n$.

1. On veut former une suite $s = (s_0 s_1 \dots s_n \dots)$ d'entiers non négatifs telle que la somme de k termes extraits de s ne soit jamais égale à la somme de k autres termes extraits de s , et cela quel que soit k , avec en outre la condition que, pour tout n, s_{n+1} soit la plus petite valeur compatible avec $s_0 s_1 \dots s_n$ donnés.

Une telle suite est évidemment injective ($k = 1$) et croissante; ses premiers termes sont $s_0 = 0, s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 4$ (3 serait trop petit pour $k = 2$, puisque $0 + 3 = 1 + 2$), $s_4 = 7$ (5 et 6 seraient trop petits pour $k = 2$), etc.

Le résultat central de la présente Note est que cette suite s satisfait, pour $n \geq 1$, à la récurrence :

(1) $s_{n+1} = 2s_n - s_{n-p_n}$

où $(p_1 p_2 \dots p_n \dots)$ désigne la suite particulière (1 2 2 3 3 3 ...) (1 terme égal à 1, 2 termes égaux à 2, ..., i termes égaux à i ...). Cette suite p_n a été rencontrée par divers auteurs (voir références dans [1]).

Les 16 premiers termes de la suite s sont :

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s_n = 0$	1	2	4	7	13	24	44	84	161	309	594	1164	2284	4484	8807

A5318

La démonstration complète est relativement longue. Nous en indiquons ici les principales étapes.

2. Il est commode de raisonner sur les différences $d_n = s_n - s_{n-1}$.

On montre aisément que pour qu'une suite s satisfasse à (1), il faut et il suffit que la suite d des différences satisfasse à :

(2) $d_{n+1} = d_n + d_{n-1} + \dots + d_{n-p_n+1}$

La propriété à établir équivaut alors à la suivante :

d_{n+1} est le plus petit entier positif qui ne soit pas combinaison linéaire de $d_1 d_2 \dots d_n$ à l'aide de coefficients $x_1 x_2 \dots x_n$ formant une « suite ternaire contrainte ». Par « suite ternaire » nous entendons une suite telle que x_1 et toutes les différences $x_{i+1} - x_i$

appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$ (il y a 3^n suites ternaires), et l'adjectif « contrainte » signifie que l'on impose la condition $x_n=0$ (le nombre de suites ternaires contraintes de n termes est le coefficient de t^n dans le développement de $(1+t+t^2)^n$).

Nous appellerons \mathcal{T}_n l'ensemble de toutes les suites ternaires, \mathcal{T}'_n celui des suites ternaires contraintes, et pour toute suite X nous appellerons hauteur de $X=(x_1 \dots x_n)$ le nombre $h(X)=d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$. La propriété énoncée se décompose alors en deux parties :

(A) tout entier d tel que $0 \leq d \leq d_{n+1} - 1$ est hauteur d'une suite de \mathcal{T}'_n (certains entiers plus grands possèdent d'ailleurs la même propriété);

(B) l'entier d_{n+1} n'est hauteur d'aucune suite de \mathcal{T}'_n .

Les outils principaux des démonstrations sont les trois lemmes suivants, dont nous ne donnons ici que l'énoncé.

LEMME 1. — La suite de terme général $\inf\{p_i, n-i\}$ a pour hauteur $d_{n+1} - 1$.

LEMME 2. — La suite de terme général $\sup\{0, i-n+p_n+1\}$ est plus haute que la suite P_n de terme général p_i , et la différence des hauteurs est $1+d_\alpha+d_{\alpha+1}+\dots+d_\beta$, où $\alpha=n-p$ et $\beta=n-q$ lorsque n est le q -ième des entiers tels que $p_n=p$.

LEMME 3. — La suite de terme général $\inf\{i, n+p_n-i\}$ est plus haute que P_n et la différence de leurs hauteurs est majorée par d_{n+2} .

3. La proposition (A) résulte de l'existence d'une suite de hauteur d dans un ensemble plus restreint que \mathcal{T}'_n , à savoir l'ensemble \mathcal{T}''_n des suites ternaires non négatives majorées par la suite qui fait l'objet du lemme 1. Cette existence résulte elle-même de la possibilité, chaque fois que l'on dispose dans \mathcal{T}''_n d'une suite X de hauteur positive $d \leq d_{n+1} - 1$, de trouver dans \mathcal{T}''_n une suite d'un type particulier, de même hauteur que X , à partir de laquelle on peut construire, toujours grâce au lemme 1, une nouvelle suite de hauteur $d-1$ appartenant encore à \mathcal{T}''_n .

La proposition (B), elle, s'appuie principalement sur un nouveau lemme qui est la partie la moins évidente de toute la démonstration.

LEMME 4. — Il n'existe dans \mathcal{T}_n aucune suite dont la hauteur dépasse d'une unité celle de la suite P_n .

Ce qui se prête à une démonstration par récurrence, c'est une proposition plus forte, à savoir l'impossibilité de trouver une telle suite dans un certain ensemble \mathcal{X}_n qui inclut \mathcal{T}_n .

Il est commode de prendre pour \mathcal{X}_n l'ensemble des suites X de n termes dont les u premiers forment une « suite ternaire contrainte » U et les $v=n-u$ suivants forment une « suite de Catalan » V ; nous appelons ainsi une suite d'entiers commençant par 0 ou 1 et telle que l'on ait toujours $0 \leq x_{i+1} \leq x_i + 1$ (le nombre de telles suites, pour une longueur donnée, est un nombre de Catalan). Exemple :

$$X = \underbrace{(1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ -1 \ 0)}_U \ \underbrace{1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 4}_V \in \mathcal{X}_{22}.$$

Si $X \in \mathcal{X}_n$ et si tous les termes de V sont $\leq p_n - 1$, on démontre (à l'aide du lemme 3) que la suite X est trop basse. Sinon, la valeur maximale des termes de V est $s \geq p_n$ et deux cas sont à distinguer.

Le premier cas est celui où seuls sont égaux à s le dernier terme de V et peut être un ou plusieurs de ses prédécesseurs immédiats (cas irréductible). Dans ce cas l'impossibilité de $h(X) = h(P_n) + 1$ résulte du fait que X peut être prouvée trop haute si $s \geq p_n + 2$, et résulte de l'hypothèse de récurrence si $s = p_n$. Le seul cas qui exige une discussion plus approfondie

est celui où $s = p_n + 1$; on montre qu'alors la suite X est *en général* trop haute, sauf peut être si $n = p(p+1)/2$. Dans ce dernier cas, si l'on pose $r = [(p-1)(p-2)/2] + 1$ et si $x_r > 3 - p$, X est encore trop haute; mais si x_r prend sa plus petite valeur possible $3 - p$, on montre que l'égalité $h(X) = h(P_n) + 1$ n'est possible que s'il existe dans \mathcal{F}_{r-1} une suite Z telle que $h(Z) = h(P_{r-1}) + 1$, ce qui est exclu par l'hypothèse de récurrence (X peut alors être trop haute ou trop basse).

Enfin s'il existe dans V un terme x_i égal à s immédiatement suivi d'un terme x_{i+1} plus petit, on peut *réduire* X en augmentant x_{i+1} et en diminuant ses p_i prédécesseurs, ce qui, par suite de (2), donne une nouvelle suite, de même hauteur que X et toujours $\in \mathcal{X}_n$. Par des réductions successives on se ramène soit au cas où $s \leq p_n - 1$, soit au cas irréductible.

Une fois établi le lemme 4, la propriété (B) s'en déduit avec l'aide du lemme 3, ce qui établit le résultat annoncé.

(*) Remise le 28 février 1983.

[1] D. E. KNUTH, *The art of Computer Programming*, 1968.

Institut de Statistique, 4, place Jussieu, 75005 Paris.