Scan A5318

Krewerar & [illegible]

Pondération…

1 sojane

COMBINATOIRE. — *Pondération entière minimale de* $\mathbb{N}$ *telle que pour tout* k *toutes les* k*-parties de* $\mathbb{N}$ *aient des poids distincts.* Note (*) de **Germain Kreweras** et **Miguel-Angel Alvarez Rodriguez,** présentée par Marcel-Paul Schützenberger.

On exhibe une application $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout entier $k \geqq 0$ toutes les sommes de valeurs sur les parties de cardinal k de $\mathbb{N}$ soient distinctes. On établit que s peut être définie par $s_0=0$, $s_1=1$ et $s_{n+1}=2s_n-s_{n-p_n}$ où $(p_1 p_2 \ldots p_n \ldots)$ désigne la suite (1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 ...), et que la suite s est minimale en ce sens que chaque s_{n+1} est la plus petite valeur possible pour $s_0 s_1 \ldots s_n$ donnés.

COMBINATORICS. — Minimal Integer Weighting of $\mathbb{N}$ such that for any k all the k-subsets of $\mathbb{N}$ have Unequal Weights.

A mapping $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is exhibited, such that for any integer $k\,(\geqq 0)$ all the sums of values on the k-subsets of $\mathbb{N}$ are unequal. It is proved that s can be defined by $s_0=0$, $s_1=1$ and $s_{n+1}=2s_n-s_{n-p(n)}$, where $(p_1 p_2 \ldots p_n \ldots)$ is the sequence (1 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 ...), and that the sequence s is minimal in the sense that s_{n+1} is the smallest possible value for given $s_0 s_1 \ldots s_n$.

1. On veut former une suite $s=(s_0 s_1 \ldots s_n \ldots)$ d'entiers non négatifs telle que la somme de k termes extraits de s ne soit jamais égale à la somme de k autres termes extraits de s, et cela *quel que soit* k, avec en outre la condition que, pour tout n, s_{n+1} soit la plus petite valeur compatible avec $s_0 s_1 \ldots s_n$ donnés.

Une telle suite est évidemment injective ($k=1$) et croissante; ses premiers termes sont $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=2$, $s_3=4$ (3 serait trop petit pour $k=2$, puisque $0+3=1+2$), $s_4=7$ (5 et 6 seraient trop petits pour $k=2$), etc.

Le résultat central de la présente Note est que cette suite s satisfait, pour $n \geqq 1$, à la récurrence :

$$s_{n+1}=2s_n-s_{n-p_n}, \tag{1}$$

où $(p_1 p_2 \ldots p_n \ldots)$ désigne la suite particulière (1 2 2 3 3 3 ...) (1 terme égal à 1, 2 termes égaux à 2, ..., i termes égaux à i ...). Cette suite p_n a été rencontrée par divers auteurs (*voir* références dans [1]).

Les 16 premiers termes de la suite s sont :

$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$s_n=0$	1	2	4	7	13	24	44	84	161	309	594	1 164	2 284	4 484	8 807

La démonstration complète est relativement longue. Nous en indiquons ici les principales étapes.

2. Il est commode de raisonner sur les différences $d_n=s_n-s_{n-1}$.

On montre aisément que pour qu'une suite s satisfasse à (1), il faut et il suffit que la suite d des différences satisfasse à :

$$d_{n+1}=d_n+d_{n-1}+\ldots+d_{n-p_n+1}. \tag{2}$$

La propriété à établir équivaut alors à la suivante :

d_{n+1} est le plus petit entier positif *qui ne soit pas* combinaison linéaire de $d_1 d_2 \ldots d_n$ à l'aide de coefficients $x_1 x_2 \ldots x_n$ formant une « suite ternaire contrainte ». Par « suite ternaire » nous entendons une suite telle que x_1 et toutes les différences $x_{i+1}-x_i$

appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$ (il y a 3^n suites ternaires), et l'adjectif « contrainte » signifie que l'on impose la condition $x_n=0$ (le nombre de suites ternaires contraintes de n termes est le coefficient de t^n dans le développement de $(1+t+t^2)^n$).

Nous appellerons $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de toutes les suites ternaires, $\mathcal{T}'_n$ celui des suites ternaires contraintes, et pour toute suite X nous appellerons *hauteur* de $X=(x_1 \dots x_n)$ le nombre $h(X)=d_1 x_1+\dots+d_n x_n$. La propriété énoncée se décompose alors en deux parties :

(A) tout entier d tel que $0 \leqq d \leqq d_{n+1}-1$ est hauteur d'une suite de $\mathcal{T}'_n$ (certains entiers plus grands possèdent d'ailleurs la même propriété);

(B) l'entier d_{n+1} n'est hauteur d'aucune suite de $\mathcal{T}'_n$.

Les outils principaux des démonstrations sont les trois lemmes suivants, dont nous ne donnons ici que l'énoncé.

LEMME 1. — *La suite de terme général* $\inf\{p_i, n-i\}$ *a pour hauteur* $d_{n+1}-1$.

LEMME 2. — *La suite de terme général* $\sup\{0, i-n+p_n+1\}$ *est plus haute que la suite* P_n *de terme général* p_i, *et la différence des hauteurs est* $1+d_\alpha+d_{\alpha+1}+\dots+d_\beta$, *où* $\alpha=n-p$ *et* $\beta=n-q$ *lorsque* n *est le* q*-ième des entiers tels que* $p_n=p$.

LEMME 3. — *La suite de terme général* $\inf\{i, n+p_n-i\}$ *est plus haute que* P_n *et la différence de leurs hauteurs est majorée par* d_{n+2}.

3. La proposition (A) résulte de l'existence d'une suite de hauteur d dans un ensemble plus restreint que $\mathcal{T}'_n$, à savoir l'ensemble $\mathcal{T}''_n$ des suites ternaires non négatives majorées par la suite qui fait l'objet du lemme 1. Cette existence résulte elle-même de la possibilité, chaque fois que l'on dispose dans $\mathcal{T}''_n$ d'une suite X de hauteur positive $d \leqq d_{n+1}-1$, de trouver dans $\mathcal{T}''_n$ une suite d'un type particulier, de même hauteur que X, à partir de laquelle on peut construire, toujours grâce au lemme 1, une nouvelle suite de hauteur $d-1$ appartenant encore à $\mathcal{T}''_n$.

La proposition (B), elle, s'appuie principalement sur un nouveau lemme qui est la partie la moins évidente de toute la démonstration.

LEMME 4. — *Il n'existe dans* $\mathcal{T}_n$ *aucune suite dont la hauteur dépasse d'une unité celle de la suite* P_n.

Ce qui se prête à une démonstration par récurrence, c'est une psoposition plus forte, à savoir l'impossibilité de trouver une telle suite dans un certain ensemble $\mathcal{K}_n$ *qui inclut* $\mathcal{T}_n$.

Il est commode de prendre pour $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des suites X de n termes dont les u premiers forment une « suite ternaire contrainte » U et les $v=n-u$ suivants forment une « suite de Catalan » V; nous appelons ainsi une suite d'entiers commençant par 0 ou 1 et telle que l'on ait toujours $0 \leqq x_{i+1} \leqq x_i+1$ (le nombre de telles suites, pour une longueur donnée, est un nombre de Catalan). Exemple :

$$X=(\underbrace{1\ 0\ 1\ 0\ -1\ -2\ -1\ 0}_{U}\ \underbrace{1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 4}_{V}) \in \mathcal{K}_{22}.$$

Si $X \in \mathcal{K}_n$ et si tous les termes de V sont $\leqq p_n-1$, on démontre (à l'aide du lemme 3) que la suite X est trop basse. Sinon, la valeur maximale des termes de V est $s \geqq p_n$ et deux cas sont à distinguer.

Le premier cas est celui où seuls sont égaux à s le dernier terme de V et peut être un ou plusieurs de ses prédécesseurs immédiats (*cas irréductible*). Dans ce cas l'impossibilité de $h(X)=h(P_n)+1$ résulte du fait que X peut être prouvée trop haute si $s \geqq p_n+2$, et résulte de l'hypothèse de récurrence si $s=p_n$. Le seul cas qui exige une discussion plus approfondie est celui où $s=p_n+1$; on montre qu'alors la suite X est *en général* trop haute, sauf peut être si $n=p(p+1)/2$. Dans ce dernier cas, si l'on pose $r=[(p-1)(p-2)/2]+1$ et si $x_r > 3-p$, X est encore trop haute; mais si x_r prend sa plus petite valeur possible $3-p$, on montre que l'égalité $h(X)=h(P_n)+1$ n'est possible que s'il existe dans $\mathcal{T}_{r-1}$ une suite Z telle que $h(Z)=h(P_{r-1})+1$, ce qui est exclu par l'hypothèse de récurrence (X peut alors être trop haute ou trop basse).

Enfin s'il existe dans V un terme x_i égal à s immédiatement suivi d'un terme x_{i+1} plus petit, on peut *réduire* X en augmentant x_{i+1} et en diminuant ses p_i prédécesseurs, ce qui, par suite de (2), donne une nouvelle suite, de même hauteur que X et toujours $\in \mathcal{K}_n$. Par des réductions successives on se ramène soit au cas où $s \leqq p_n - 1$, soit au cas irréductible.

Une fois établi le lemme 4, la propriété (B) s'en déduit avec l'aide du lemme 3, ce qui établit le résultat annoncé.

(*) Remise le 28 février 1983.

[1] D. E. Knuth, *The art of Computer Programming*, 1968.

Institut de Statistique, 4, place Jussieu, 75005 Paris.