Scan A3320
A5530

Tomescu

2 pages from book

Ioan Tomescu, Introducere în Combinatorica, 1972.

A3320
A5530

3320
5530

Dacă X este mulţimea vîrfurilor grafului G, orice colorare minimală a lui G are o clasă care conţine vîrful x şi o submulţime a lui $X\setminus\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}$. Dar $|X\setminus\{x, x_1,\ldots,x_{k-1}\}| = n-k$ şi deci numărul partiţiilor minimale ale lui X care conţin în aceeaşi clasă vîrful x împreună cu r vîrfuri din mulţimea $X\setminus\{x, x_1,\ldots,x_{k-1}\}$, unde $0\leqslant r\leqslant n-k$ este majorat de $\binom{n-k}{r}(k-1)^{n-k-r}$, ţinînd seama de ipoteza inducţiei. Într-adevăr, r vîrfuri pot fi alese din cele $n-k$ vîrfuri în $\binom{n-k}{r}$ moduri diferite şi numărul maxim al partiţiilor minimale ale unui graf G cu $n-1-r$ vîrfuri şi $\gamma(G) = k-1$ este egal cu $(k-1)^{n-k-r}$. Deci

$$C_m(G)\leqslant\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k}{r}(k-1)^{n-k-r}=k^{n-k},$$

egalitatea avînd loc numai în cazul cînd $\{x, x_1,\ldots,x_{k-1}\}$ este un k-subgraf complet şi vîrfurile rămase sînt izolate. Deci am demonstrat prin inducţie că pentru orice graf G cu n vîrfuri şi numărul cromatic egal cu k, $C_m(G)\leqslant k^{n-k}$, maximul fiind atins numai în cazul cînd G este compus dintr-un k-subgraf complet şi din $n-k$ vîrfuri izolate. Să remarcăm că acest graf este graful unic care are $\gamma(G)=k$ şi un număr minim de $\binom{k}{2}$ muchii.

COROLAR. *Numărul maxim de colorări minimale ale unui graf cu n vîrfuri este egal cu* $\max\limits_{r=[x],\{x\}}(r^{n-r})$, *unde x este numărul real care verifică ecuaţia $x(1+\ln x)=n$.*

Într-adevăr, numărul maxim al colorărilor minimale ale unui graf cu n vîrfuri este egal cu $\max\limits_{k=1,\ldots,n}(k^{n-k})$ şi ecuaţia $x(1+\ln x)=n$ se obţine egalînd cu zero derivata funcţiei x^{n-x}. Acest număr este egal în acelaşi timp cu numărul maxim de relaţii de echivalenţă $R^*\subset R\subset X\times X$, avînd un număr minim de clase, relaţia R fiind o relaţie binară simetrică şi reflexivă iar $|X|=n$. Numărul maxim de colorări minimale ale unui graf cu n vîrfuri creşte foarte repede odată cu n, aşa cum rezultă din tabelul 15.1.

O $(k+r)$-colorare a unui graf G cu n vîrfuri şi numărul cromatic egal cu k este o partiţie a mulţimii vîrfurilor sale cu $k+r$ clase, unde $1\leqslant r\leqslant n-k$, astfel încît două vîrfuri care aparţin unei aceleiaşi clase să nu fie legate printr-o muchie.

Ţinînd seama de exemplul 2, cap. 4, se deduce că numărul $C(n,k,r)$ al $(k+r)$ - colorărilor unui graf compus dintr-un [illegible] graf complet şi din $n-k$ vîrfuri izolate este dat pentru orice $1\leqslant r\leqslant n-k$ de expresia $C(n,k,r)=\sum_{p=r}^{n-k}\binom{n-k}{p}S(p,r)\,k^{n}$ [illegible], unde $S(p,r)$ sînt numerele lui Stirling de speţa a doua. Numerele

N4625

Tabelul 15.1

n	max $C_m(G)$	n	max $C_m(G)$
1	1	9	1 024
2	1	10	4 096
3	2	11	16 384
4	4	12	78 125
5	9	13	390 625
6	27	14	1 953 125
7	81	15	10 077 696
8	256	16	60 466 176

3320

$C(n,k,r)$ pentru n [illegible] k şi $1\leqslant r\leqslant n-k$ verifică relaţiile de recurenţă următoare:

$$C(n,k,r)=C(n-1,k,r-1)+(k+r)\,C(n-1,\ldots$$

şi

$$C(n,k,r)=\sum_{q=0}^{n-k-r}\binom{n-k}{q}C(n-1-q,k-1,r).$$

Prima relaţie de recurenţă se obţine plecînd de la colorările unui graf compus dintr-un k-subgraf complet şi din $n-k-1$ vîrfuri izolate prin adăugarea unui vîrf izolat, iar cea de-a doua se obţine plecînd de la colorările unui graf format dintr-un $(k-1)$ - subgraf complet şi din $n-k$ vîrfuri izolate prin adăugarea unui nou vîrf care se leagă de toate vîrfurile $(k-1)$ - subgrafului complet, deoarece în acest mod se obţin fără repetiţii toate $(k+r)$ - colorările, al căror număr l-am notat prin $C(n,k,r)$. În [216] se demonstrează în mod analog cu propoziţia 1, ţinînd seama de (15.1), că numărul maxim al $(k+r)$ - colorărilor unui graf G avînd n vîrfuri şi numărul cromatic egal cu k este egal cu $C(n,k,r)$ pentru orice $1\leqslant r\leqslant n-k$, iar singurul graf care are acest număr maxim de ziţii $i_1, i_2, \ldots, i_k$ pot fi alese din mulţimea celor n poziţii în $\binom{n}{k}$ moduri, deci

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}.$$

Numărul permutărilor de n obiecte fără puncte fixe se obţine acum scăzînd din numărul tuturor permutărilor, egal cu $n!$, numărul permutărilor care admit măcar un punct fix, deci

$$P(n) = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}(n-k)! + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}.$$

ceea ce se mai scrie

$$P(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right). \quad (3.8)$$

Numărul $P(n)$ mai poate fi calculat prin recurenţă ţinînd seama de relaţiile $P(1) = 0$; $P(n) = nP(n-1) + (-1)^n$. Numărul permutărilor de n obiecte cu p puncte fixe este deci egal cu $\binom{n}{p} P(n-p)$, deoarece cele p puncte fixe pot fi alese în $\binom{n}{p}$ moduri şi celelalte puncte nu mai sînt fixe, deci la fiecare alegere a celor p puncte fixe există $P(n-p)$ permutări ale celor $n-p$ obiecte rămase fără puncte fixe. Se observă că în acest mod se obţin fără repetiţii toate permutările cu p puncte fixe, de unde rezultă expresia de mai înainte.

Exemplul 3. D e t e r m i n a r e a n u m ă r u l u i f u n c ţ i i l o r c a r e d e p i n d e f e c t i v d e t o a t e v a r i a b i l e l e. Fie o funcţie $g: E^k \to F$, unde $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ şi $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$, adică o funcţie $g(x_1, \ldots, x_k)$ de k variabile care iau valori din mulţimea E, funcţia g luînd valori în mulţimea F. Numărul acestor funcţii g este egal cu $|F|^{|E^k|} = m^{n^k}$. Se spune că funcţia g nu depinde efectiv sau esenţial de variabila x_i, dacă ea este constantă în componenta x_i, adică fiind dat un sistem oarecare de valori $(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, x'_{i+1}, \ldots, x'_k) \in E^{k-1}$, pentru orice $\alpha, \beta \in E$ există relaţia

$$g(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, \alpha, x'_{i+1}, \ldots, x'_k) = g(x'_1, \ldots, x'_{i-1}, \beta, x'_{i+1}, \ldots, x'_k).$$

Numărul funcţiilor care nu depind efectiv de q variabile ($q \leqslant k$) este egal cu numărul funcţiilor $g: E^{k-q} \to F$, adică cu $m^{n^{k-q}}$, deoarece funcţiile respective sînt constante în q dintre variabile şi pot fi identificate cu funcţiile de $k-q$ variabile definite pe E^{k-q} cu valori în F.

Dacă notăm

$$A_i = \{g: E^k \to F \mid g \text{ nu depinde efectiv de variabila } x_i\}$$

şi cu $E(n, m, k)$ numărul funcţiilor $g: E^k \to F$ care depind efectiv de toate variabilele, atunci cu formula lui Sylvester obţinem

$$E(n, m, k) = m^{n^k} - \sum_{i=1}^{k}|A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^k\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|.$$

Ţinînd seamă de definiţia mulţimilor A_i, deducem

$$E(n, m, k) = m^{n^k} - \binom{k}{1} m^{n^{k-1}} + \binom{k}{2} m^{n^{k-2}} - \ldots + (-1)^k m, \quad (3.9)$$

deoarece cele p variabile de care funcţia g nu depinde efectiv pot fi alese din mulţimea celor k variabile în $\binom{k}{p}$ moduri distincte.

Dacă $E = F = \{0, 1\}$, atunci funcţiile $g: E^k \to F$ sînt funcţii booleene de k variabile şi numărul lor este egal cu 2^{2^k}. Numărul funcţiilor booleene de k variabile care depind efectiv de toate variabilele se obţine din formula (3.9) în care facem $m = n = 2$:

$$E(2, 2, k) = 2^{2^k} - \binom{k}{1} 2^{2^{k-1}} + \binom{k}{2} 2^{2^{k-2}} - \ldots + (-1)^k 2. \quad (3.10)$$

Dacă o funcţie booleană g nu depinde efectiv de o variabilă x_i, există o formă normală disjunctivă [138] care utilizează numai operaţiile de disjuncţie, conjuncţie şi negaţie, formă care generează funcţia g şi care nu conţine variabila x_i. De exemplu, pentru $k = 2$, $E(2, 2, 2) = 10$ şi deci dintre cele 16 funcţii booleene de două variabile 10 depind efectiv de toate variabilele.

Cele şase funcţii booleene de două variabile care nu depind efectiv de toate variabilele sînt date în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$a: g = 0$

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$b: g = 1$

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$c: g = x_1$

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$d: g = \bar{x}_1$

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$e: g = x_2$

x_1	x_2	$g(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f: g = \bar{x}_2$

Astfel funcţiile a şi b sînt funcţiile constante şi nu depind nici de x_1, nici de x_2, funcţiile c şi d nu depind de x_2, dar depind de x_1, iar funcţiile e şi f nu depind de x_1 dar depind de x_2.

Exemplul 4 ne indică o aplicaţie în teoria grafurilor. Fiind dat un graf finit neorientat $G = (X, U)$ cu X mulţimea vîrfurilor şi U mulţimea muchiilor, un subgraf complet C este o mulţime de vîrfuri ale grafului G care sînt legate în toate modurile posibile prin muchii din U. Un subgraf complet cu k vîrfuri va fi numit un k-subgraf complet. Vom presupune în continuare că $2 \leqslant k \leqslant n$, unde n este numărul vîrfurilor grafului G. Gradul unui vîrf $x \in X$ se notează $d(x)$ şi este egal prin definiţie cu numărul muchiilor care au ca extremitate vîrful x. Este clar că dacă graful G nu conţine k-subgrafuri

8) Grupul putere H^G, unde G este un grup de permutări ale mulţimii X cu $|X| = n$ şi H este un grup de permutări ale mulţimii Y cu $|Y| = m$, este un grup de permutări ale mulţimii Y^X a funcţiilor $f: X \to Y$. Elementele sale sînt perechi (g,h) cu $g \in G$, $h \in H$ care acţionează astfel :

$$(g,h)f(x) = hfg(x).$$

Acest grup are ordinul $|G|\,|H|$ şi polinomul său caracteristic este

$$P(H^G; x_1, \ldots, x_{m^n}) = \frac{1}{|G|\,|H|} \sum_{\substack{g \in G \\ h \in H}} \prod_{k=1}^{m^n} x_k^{\lambda_k(g,h)},$$

unde

$$\lambda_1(g,h) = \prod_{k \geq 1} \sum_{r|k} [r\lambda_r(h)]^{\lambda_k(g)}$$

şi pentru $k > 1$,

$$\lambda_k(g,h) = \frac{1}{k} \sum_{r|k} \mu(r,k)\lambda_1(g^r,h^r),$$

unde $\mu(r,k)$ este funcţia lui Möbius a laticei divizorilor, care va fi prezentată în capitolul următor.

Aplicaţie. O funcţie booleană $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variabile este o funcţie $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Această funcţie se poate realiza cu ajutorul unei scheme cu contacte, a cărei conductibilitate să fie chiar funcţia booleană dată [138]. Efectuînd permutări şi negaţii ale literelor care corespund contactelor care apar într-o schemă optimă pentru funcţia $f(x_1, \ldots, x_n)$, adică o schemă care conţine un număr minim de contacte, se vor obţine tot scheme minime pentru alte funcţii booleene care se obţin din funcţia dată prin aceleaşi transformări efectuate asupra variabilelor.

Se pune astfel problema clasificării funcţiilor booleene, a multipolilor etc. în raport cu grupul hiperoctaedric, care este produsul dintre grupul C_2^n al negaţiilor variabilelor şi grupul S_n al permutărilor variabilelor, sau în raport cu subgrupuri ale acestui grup.

Grupul C_2 este mulţimea $\{0,1\}$ cu operaţia de adunare suma modulo 2, iar $C_2^n = \underbrace{C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2}_{n \text{ factori}}$, produsul fiind produsul direct al grupurilor definit mai înainte.

Grupul hiperoctaedric de n variabile, $G_n = \{(i, \sigma) \mid i \in C_2^n \text{ şi } \sigma \in S_n\}$ care acţionează astfel asupra unei funcţii booleene de n variabile :

$$(i,\sigma)f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma^{-1}(1)}^{i_1}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}^{i_n}),$$

unde $i = (i_1, i_2, \ldots i_n)$ cu $i_j \in \{0,1\}$ pentru $j = 1, \ldots, n$, iar $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$.

Numărul de clase de echivalenţă ale funcţiilor booleene de n variabile, al căror număr este egal cu 2^{2^n}, în raport cu grupul hiperoctaedric G_n este dat în tabelul 9.2.

În ultima coloană este trecut numărul funcţiilor booleene degenerate de n variabile, unde $E(2,2,n)$ se calculează cu (3.10).

Detalii asupra calculului indicatorului de cicluri al grupului G_n, ca şi tabelul obţinut de Laboratorul de Calcul al Universităţii din Harvard care conţine pentru fiecare din cele 402 tipuri de funcţii booleene de patru variabile schema minimală corespunzătoare sînt date în cartea lui M. Harrison [101]. Pentru $n > 4$ creşterea rapidă a numărului de tipuri de funcţii booleene în raport cu grupul G_n face această metodă a alcătuirii de cataloage pentru cîte un reprezentant din fiecare clasă de echivalenţă inabordabilă cu mijloacele actuale.

A 221

Tabelul 9.2

n	Numărul de clase în raport cu G_n	2^{2^n}	$2^{2^n} - E(2,2,n)$
1	3	4	2
2	6	16	6
3	22	256	38
4	402	65 536	942
5	1 228 158	4 294 967 296	325 262
6	400 507 806 843 728		

5530

Studiul clasificării funcţiilor booleene a fost iniţiat de D. Slepian [201], iar şcoala românească de teoria automatelor finite a obţinut rezultate numeroase privind clasificarea diferitelor clase de funcţii booleene, a sistemelor de funcţii booleene şi a schemelor cu contacte şi relee în raport cu grupul hiperoctaedric sau cu subgrupuri ale acestuia (*P. Constantinescu* [35]-[39], *T. Gaşpar* [69]-[71], *Gr. Moisil* [136], *R. Popescu* [162], [163], *S. Rudeanu* [186], *Al. Şchiop* [71], [195]).

9.4. NUMĂRAREA GRAFURILOR CU VÎRFURI NEETICHETATE

Orice grup G de permutări ale mulţimii X induce pe mulţimea perechilor $\{x, y\}$ cu $x, y \in X$ şi $x \neq y$ un grup de permutări notat $G^{(2)}$ astfel : o permutare $g \in G$ defineşte o permutare $\bar{g}$ a mulţimii perechilor, astfel încît $\bar{g}\{x, y\} = \{g(x), g(y)\}$ cu $g(x) \neq g(y)$, deoarece g este o aplicaţie injectivă. Se arată fără nici o dificultate că aplicaţia $\bar{g}$ astfel definită este o permutare a mulţimii perechilor (neordonate) $\{x, y\}$ cu $x \neq y$ şi că mulţimea $G^{(2)} = \{\bar{g} \mid g \in G\}$ este un grup de permutări.

Două grafuri (X,U) şi (X,V), cu U, respectiv V mulţimile de muchii, se numesc *izomorfe* dacă există o bijecţie $g: X \to X$, adică