1548
→ 1200

SUR LE NOMBRE D'ESPACES LINÉAIRES NON ISOMORPHES DE n POINTS

par Jean Doyen
Stagiaire de recherches F.N.R.S.
Université de Bruxelles

1. Notions préliminaires

1.1. Reprenant la définition donnée en 1961 par P. Libois [3], nous appellerons *espace linéaire* tout ensemble d'êtres élémentaires dénommés *points*, dans lequel certains sous-ensembles sont distingués et dénommés *droites*. Nous exigerons que ces données satisfassent aux axiomes suivants : linear spaces

i) deux points distincts quelconques appartiennent à une et une seule droite ;

ii) toute droite contient au moins deux points.

La notion d'espace linéaire, qui a déjà donné lieu à de nombreux développements (on pourra se reporter notamment à des articles de P. Libois [4] et de P. de Witte [2] ainsi qu'à un texte de F. Buekenhout [1]), a été dégagée par abstraction à partir de l'étude d'espaces classiques (projectifs, affins, euclidiens, Minkowskiens, Cayléens, etc...). L'axiome *i*) traduit une propriété importante commune à ces espaces. L'axiome *ii*) exclut l'existence de droites vides ou n'ayant qu'un seul point et donne à la notion d'espace linéaire un degré de généralité convenable.

Il résulte de la définition ci-dessus que deux droites distinctes d'un espace linéaire ont au plus un point commun. Si deux droites ont un point commun, nous dirons qu'elles se coupent en ce point ou qu'elles sont sécantes en ce point. Lorsqu'un point appartient à une droite, on dira que la droite passe par ce point, que ce point est situé sur la droite, etc... Trois points d'un espace linéaire seront dits *alignés* s'ils appartiennent à une même droite.

Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, t. XIX, 1967.

1.2. Nous appellerons *isomorphisme* d'un espace linéaire L sur un espace linéaire L' toute bijection de L sur L' qui applique toute droite de L sur une droite de L'. Deux espaces linéaires seront dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre.

Un *automorphisme* d'un espace linéaire L sera un isomorphisme de L sur lui-même. Il est équivalent de définir un automorphisme de L comme une permutation des points de L qui applique trois points alignés sur trois points alignés.

1.3. Nous dirons qu'une partie V d'un espace linéaire L est une *variété linéaire* (ou simplement une *variété*) de L si toute droite contenant deux points distincts de V est entièrement contenue dans V.

Cette définition est évidemment basée sur la connaissance d'espaces classiques. On en déduit immédiatement que toute variété linéaire d'un espace linéaire est elle-même un espace linéaire, que dans tout espace linéaire la partie vide, un point, une droite, l'espace tout entier sont des variétés linéaires, enfin que *toute intersection de variétés linéaires est une variété linéaire.*

Ce dernier résultat, aux multiples conséquences, permet l'introduction de nouveaux concepts, dont celui qui va être développé maintenant et pour lequel on s'inspire de la théorie des espaces topologiques.

1.4. Un espace linéaire sera dit *connexe* s'il n'est pas la réunion de deux variétés disjointes et non vides.

Dans un espace linéaire quelconque, nous appellerons *composante connexe* toute variété connexe maximale (par rapport à l'inclusion).

Enfin si L est un espace linéaire et P un point de L, nous dirons qu'un point Q est *accessible* de P s'il existe une suite finie de points $P = P_1, P_2, \dots, P_n = Q$ telle que toute droite P_iP_{i+1} ($i = 1, \dots, n - 1$) possède au moins trois points.

Enonçons sans démonstration quelques résultats importants (pour plus de détails, on pourra consulter [1]) :

Dans un espace linéaire L, tout point appartient à une et une seule composante connexe ; le complémentaire L − V d'une variété V est une variété si et seulement si toute droite joignant un point de V à un point de L — V est uniquement formée de ces deux points ; la composante connexe d'un point P coïncide avec l'ensemble des points accessibles de P.

2. Dénombrement d'espaces linéaires finis

2.1. Le reste de cette note sera consacré essentiellement aux espaces linéaires *finis*, c'est-à-dire formés d'un nombre fini n de points.

2.2. Un problème qui se pose de manière naturelle mais qui est loin d'être résolu est le suivant : combien y a-t-il d'espaces linéaires finis non isomorphes ayant un nombre donné de points ?

De manière un peu plus précise, désignons par $N(n)$ le nombre d'espaces linéaires non isomorphes de n points et par $N_c(n)$ le nombre d'espaces linéaires connexes non isomorphes de n points (on a évidemment $N_c(n) \leqslant N(n)$). Il semble que le problème qui consiste à trouver une expression donnant les valeurs de $N(n)$ ou de $N_c(n)$ en fonction de n soit particulièrement difficile. Tout ce qu'on peut espérer pour l'instant, c'est une estimation de ces deux nombres. Nous nous proposons d'en donner des limitations inférieure et supérieure.

$N(n)$

$N_c(n)$

2.3. En fait notre étude a débuté par la recherche systématique de tous les espaces linéaires non isomorphes ayant au plus 9 points. Cette construction « expérimentale » est aisée pour les espaces ayant au plus 7 points, mais devient déjà assez longue pour les espaces de 8 points. Néanmoins, comme on le verra par la suite, elle ne manque pas d'intérêt pour l'obtention de résultats plus généraux.

Nous avons dressé une table de tous les espaces linéaires non isomorphes ayant au plus 9 points (il y en a exactement 500). Pour chacun de ces espaces, nous avons déterminé le groupe de ses automorphismes ainsi que le nombre de classes de transitivité de ce groupe sur les points. Ces divers renseignements, qui figurent également dans la table, jouent un rôle essentiel dans la démonstration de certains résultats que nous allons établir.

Nous tenons un exemplaire de cette table à la disposition de tout lecteur intéressé.

1548
1200

2.4. Voici les valeurs de $N(n)$ et de $N_c(n)$ pour les premières valeurs de n :

n	N(n)	N_c(n)
0	1	1
1	1	1
2	1	0
3	2	1
4	3	1
5	5	2
6	10	4
7	24	13
8	69	42
9	384	308

1548
1200

2.5. Nous allons établir les théorèmes suivants :

Théorème A.

La fonction $f : n \rightarrow N(n)$ *est convexe, c'est-à-dire que*

$$N(n) \leqslant \frac{1}{2}[N(n-1) + N(n+1)] \qquad \textit{pour tout } n > 0$$

Théorème B.

$$N_c(n) > 2^{n-1} \qquad \textit{pour tout } n \geqslant 9$$

Théorème C.

$$N(n) > 2^n \qquad \textit{pour tout } n \geqslant 10$$

Nous démontrerons aussi que $N(n) \leqslant 2^{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}$ pour tout n avec une inégalité stricte pour $n \geqslant 4$.

3. Démonstration du théorème A

3.1. *Définition.* Soient L_1, L_2 deux espaces linéaires, disjoints ou non, et L l'ensemble somme de L_1, L_2. Chacun des espaces L_1, L_2 est plongé canoniquement dans l'ensemble L par une injection. On peut donc munir L d'une structure naturelle d'espace linéaire dont les droites sont les images canoniques des droites de L_1 ou L_2 et les paires de points non contenues dans une des droites précédentes. Nous dirons que l'espace linéaire L est la *somme* des espaces L_1, L_2 et nous écrirons $L = L_1 + L_2$. Cette définition s'étend aisément au cas d'une famille quelconque d'espaces linéaires.

3.2. *Proposition. Si* L_1 *et* L_2 *sont deux espaces linéaires non isomorphes et* L *un espace linéaire connexe, les espaces* $L_1 + L$ *et* $L_2 + L$ *sont non isomorphes.*

Démonstration. Désignons par V_1 l'image de L par l'injection canonique qui plonge L dans $L_1 + L$. V_1 est clairement une composante connexe de $L_1 + L$ isomorphe à L et la variété complémentaire $W_1 = (L_1 + L) - V_1$ est isomorphe à L_1. Désignons de même par V_2 la composante connexe de $L_2 + L$ qui est l'image de L par l'injection canonique qui plonge L dans $L_2 + L$. V_2 est isomorphe à L et la variété complémentaire $W_2 = (L_2 + L) - V_2$ est isomorphe à L_2.

Supposons qu'il existe un isomorphisme σ de $L_1 + L$ sur $L_2 + L$ et montrons que s'il en est ainsi, il existe un isomorphisme σ' de $L_1 + L$ sur $L_2 + L$ appliquant V_1 sur V_2.

Soit V' la composante connexe de $L_2 + L$ sur laquelle σ applique V_1.

Si $V' = V_2$, alors $\sigma' = \sigma$. Dans le cas contraire, les composantes connexes V' et V_2 sont nécessairement disjointes. Soit τ un isomorphisme entre V' et V_2. τ induit sur les points de $L_2 +$ L une permutation τ' qui fixe tout point extérieur à $V' \cup V_2$ et qui applique tout point de $V' \cup V_2$ sur son correspondant par τ. On vérifie facilement que τ' est un automorphisme de $L_2 + L$. Dès lors, $\sigma' = \sigma\tau'$ est un isomorphisme de $L_1 + L$ sur $L_2 + L$ qui applique V_1 sur V_2, donc aussi W_1 sur W_2.

On en déduit que L_1 et L_2 sont isomorphes, ce qui contredit l'hypothèse.

3.3. *Définitions.* Nous appellerons *droite maximale* d'un espace linéaire *fini* L toute droite de L ayant un nombre de points supérieur ou égal au nombre de points de toute autre droite de L.

Nous dirons aussi qu'un point P d'un espace linéaire L est *libre* sur une droite D de L si P est un point de D et si toute autre droite de L passant par P n'a que deux points.

Enfin nous appellerons *point isolé* d'un espace linéaire toute composante connexe de cet espace réduite à un seul point.

3.4. *Proposition. Soient* L_1 *et* L_2 *deux espaces linéaires finis non isomorphes,* D_1 *une droite maximale de* L_1, D_2 *une droite maximale de* L_2. *Les espaces linéaires* L'_1 *et* L'_2 *construits à partir de* L_1 *et* L_2 *en introduisant un point libre* P_1 *sur* D_1 *et un point libre* P_2 *sur* D_2 *sont non isomorphes.*

Démonstration. Désignons par D'_1 et D'_2 les droites maximales des espaces L'_1 et L'_2 obtenus respectivement par introduction d'un point libre P_1 sur D_1 et d'un point libre P_2 sur D_2. Il est clair que D'_1 est la seule droite maximale de L'_1 et que D'_2 est la seule droite maximale de L'_2.

Supposons qu'il existe un isomorphisme σ de L'_1 sur L'_2 et montrons que s'il en est ainsi, il existe un isomorphisme σ' de L'_1 sur L'_2 qui applique P_1 sur P_2.

σ applique nécessairement D'_1 sur D'_2, donc P_1 sur un certain point P de D'_2, P étant libre sur D'_2. Si $P = P_2$, alors $\sigma' = \sigma$. Dans le cas contraire, la permutation τ des points de L'_2 qui échange P et P_2 et qui fixe tous les autres points de L'_2 est un automorphisme de cet espace. Dès lors, $\sigma' = \sigma\tau$ est un isomorphisme de L'_1 sur L'_2 qui applique P_1 sur P_2.

σ' induit alors de manière naturelle une bijection de L_1 sur L_2 qui est en fait un isomorphisme de L_1 sur L_2, d'où la contradiction.

3.5. *Théorème* A.

La fonction $f : n \to N(n)$ *est convexe, c'est-à-dire que*

$$N(n) \leqslant \frac{1}{2}[N(n-1) + N(n+1)] \qquad \textit{pour tout } n > 0$$

Démonstration

a) En ajoutant un point isolé à chacun des $N(n)$ espaces linéaires non isomorphes de n points, on obtient $N(n)$ espaces linéaires de $n + 1$ points qui sont deux à deux non isomorphes en vertu de la proposition 3.2 (appliquée au cas particulier où L n'a qu'un seul point).

b) Tout espace de n points ayant au moins un point isolé peut évidemment être obtenu en ajoutant un point à un espace de $n - 1$ points. Il en résulte qu'il y a exactement $N(n) - N(n-1)$ espaces linéaires non isomorphes de n points n'ayant pas de point isolé.

Dès lors, en introduisant un point libre sur une droite maximale de chacun des espaces linéaires non isomorphes de n points sans point isolé, on obtient $N(n) - N(n-1)$ espaces linéaires de $n + 1$ points qui sont deux à deux non isomorphes en vertu de la proposition 3.4. De plus, comme ils n'ont pas de point isolé, ils ne sont certainement pas isomorphes aux $N(n)$ espaces construits en *a*).

On a donc :

$$N(n+1) \geqslant 2N(n) - N(n-1)$$

ce qui démontre le résultat annoncé.

3.6. *Problème.* La fonction $f_c : n \to N_c(n)$ est-elle convexe pour $n \geqslant 3$? (il est facile de démontrer qu'elle est strictement croissante pour $n \geqslant 4$).

4. Démonstration du théorème B

4.1. *Définitions.* Soient L_1, L_2 deux espaces linéaires, V_1 et V_2 des variétés isomorphes non vides contenues respectivement dans L_1, L_2 et σ un isomorphisme de V_1 sur V_2. Soit L l'ensemble somme de L_1, L_2.

Convenons que les images canoniques dans L de deux points $P_1 \in L_1$ et $P_2 \in L_2$ sont équivalentes si $P_2 = \sigma(P_1)$; ceci permet de définir une relation d'équivalence R dans L. Dans l'ensemble quotient L/R, chacun des espaces L_1, L_2 est plongé canoniquement par une injection. De ce fait, L/R possède une structure naturelle d'espace linéaire dont les droites sont les images canoniques des droites de L_1 ou L_2 et les paires de points de L/R non contenues dans une des droites précédentes. *L'espace* L/R *est l'espace linéaire obtenu par recollement des espaces* L_1, L_2 *le long de* V_1 *et* V_2 *suivant* σ.

Intuitivement, on obtient le recollement L/R en identifiant tout point de V_1 avec son image par σ et en complétant le nouvel ensemble par des droites ayant deux points (un point dans $L_1 - V_1$ et un point dans $L_2 - V_2$).

En fait, dans ce qui va suivre, nous considérerons uniquement le cas particulier où V_1 et V_2 sont des points de L_1 et L_2 si bien que l'isomorphisme σ ne devra pas être précisé. Nous parlerons alors de *recollement en un point.*

Nous dirons qu'un point P d'un espace linéaire L est un *point de recollement* de cet espace s'il est possible de trouver dans L deux variétés linéaires V_1 et V_2 ayant au moins deux points telles que $V_1 \cap V_2 = \{ P \}$ et $V_1 \cup V_2 = L$. Il est clair que dans ce cas l'espace L peut être obtenu par recollement des espaces V_1 et V_2 au point P.

4.2. *Proposition. Dans tout espace linéaire fini connexe* L, *il existe au moins un point qui n'est pas point de recollement de* L.

Démonstration. Supposons que tout point de L soit un point de recollement de L.

Soient P_1 un point de L, V_1 et V_1' deux variétés de L ayant au moins deux points telles que $V_1 \cap V_1' = \{ P_1 \}$ et $V_1 \cup V_1' = L$. Puisque L est connexe et peut être obtenu par recollement de V_1 et V_1' en P_1, on voit facilement que V_1 et V_1' sont connexes. V_1 peut donc être considéré comme un espace linéaire fini connexe ayant moins de points que L. Soit P_2 un point de V_1 distinct de P_1. Nous allons montrer que P_2 est un point de recollement de V_1.

En effet, P_2 est un point de recollement de L. Désignons par W_1 et W_1' deux variétés de L ayant au moins deux points telles que $W_1 \cap W_1' = \{ P_2 \}$ et $W_1 \cup W_1' = L$. W_1 et W_1' sont connexes. Soient $V_2 = W_1 \cap V_1$ et $V_2' = W_1' \cap V_1$. Ainsi définis, V_2 et V_2' sont deux variétés de V_1, $V_2 \cap V_2' = \{ P_2 \}$ et $V_2 \cup V_2' = V_1$. P_1 appartient soit à W_1, soit à W_1'. Supposons que $P_1 \in W_1'$. Dès lors $P_1 \in V_2'$ et V_2' contient au moins deux points. Montrons qu'il en est de même pour V_2. Pour cela, remarquons que $W_1 \cap V_1' = \phi$ sinon W_1 serait la réunion des deux variétés $V_2 = W_1 \cap V_1$ et $W_1 \cap V_1'$ disjointes et non vides et ne serait pas connexe. Donc W_1 est inclus dans V_1 d'où il résulte que $V_2 = W_1$ contient au moins deux points. P_2 est donc bien un point de recollement de V_1.

On peut répéter avec V_2 le raisonnement fait sur V_1 (et V_2 contient moins de points que V_1). Comme L est fini, on trouvera après un nombre suffisamment grand d'étapes un espace linéaire connexe V_i ayant moins de 5 points et contenant au moins un point de recollement, ce qui est absurde.

Notons que si dans la définition d'un point de recollement on n'exige pas que V_1 et V_2 contiennent au moins deux points, le résultat ci-dessus n'est plus valable car tout point P d'un espace linéaire L est alors point de recollement de cet espace, les variétés V_1 et V_2 étant le point P et l'espace L tout entier.

D'autre part on trouve facilement des exemples d'espaces linéaires finis non connexes ou infinis connexes dont tous les points sont des points de recollement.

4.3. *Proposition. Pour tout entier naturel k* :

$$N_c(2k) \geqslant N_c(k) \,.\, N_c(k+1).$$

Démonstration. Soient L et L′ deux espaces linéaires de $2k$ points pour lesquels nous ferons les hypothèses suivantes :

a) L provient du recollement en un point P de deux variétés connexes V et W ayant respectivement k points et $k+1$ points (d'où il résulte que $k \geqslant 3$). P n'est un point de recollement ni de l'espace V ni de l'espace W.

b) L′ provient du recollement en un point P′ de deux variétés connexes V′ et W′ ayant respectivement k points et $k+1$ points. P′ n'est un point de recollement ni de l'espace V′ ni de l'espace W′.

c) Les espaces de l'une au moins des paires $\{V, V'\}$ et $\{W, W'\}$ sont non isomorphes.

Nous allons montrer que L et L′ sont non isomorphes.

Supposons qu'il existe un isomorphisme σ de L sur L′. σ applique V sur une variété connexe de k points $\overline{V}$ de L′ et W sur une variété connexe de $k+1$ points $\overline{W}$ de L′.

Si $\overline{V} = V'$, σ applique P sur P′ car P est le seul point de V par où passe une droite ayant au moins trois points non contenue entièrement dans V et P′ est le seul point de V′ ayant la même propriété. On en déduit que $\overline{W} = W'$ et σ induit donc un isomorphisme de V sur V′ et de W sur W′, ce qui contredit l'hypothèse *c*).

Si $\overline{V}$ est contenu dans W′, W′ est la réunion de $\overline{V}$ et d'un point, donc est non connexe, ce qui contredit l'hypothèse *b*).

Enfin si $\overline{V}$ a en commun avec V' un point $P_1 \neq P'$ et en commun avec W' un point $P_2 \neq P'$, $\overline{V}$ contient nécessairement le point P' sinon $\overline{V}$ serait non connexe, étant la réunion des variétés $\overline{V} \cap V'$ et $\overline{V} \cap W'$ disjointes et non vides. Un raisonnement analogue s'appliquant à $\overline{W}$, et $\overline{W}$ n'ayant en commun avec $\overline{V}$ que le point P', les variétés $\overline{V} \cap V'$ et $\overline{W} \cap V'$ n'ont en commun que le point P' et contiennent au moins deux points. Donc P' est un point de recollement de V' et l'hypothèse *b*) est contredite.

On voit donc que L et L' sont non isomorphes.

Nous appuyant sur ce résultat préliminaire, nous allons construire $N_c(k) \,.\, N_c(k+1)$ espaces connexes non isomorphes de $2k$ points de la façon suivante :

Etant donnés un espace connexe L de k points et un espace connexe L' de $k+1$ points, recollons-les en identifiant un point P de L et un point P' de L', P et P' étant choisis de telle façon qu'ils ne soient pas des points de recollement respectivement de L et L' (ce qui est toujours possible en vertu de la proposition 4.2.). Les $N_c(k) \,.\, N_c(k+1)$ espaces linéaires de $2k$ points ainsi construits sont connexes et deux à deux non isomorphes en vertu du résultat préliminaire ci-dessus (cela pour $k \geqslant 3$). On peut donc écrire :

$$N_c(2k) \geqslant N_c(k) \,.\, N_c(k+1) \qquad \textit{pour tout } k \geqslant 3$$

Mais on vérifie que cette inégalité est encore satisfaite pour $0 \leqslant k \leqslant 2$, d'où le résultat annoncé.

4.4. *Proposition. Pour tout entier naturel* $k \geqslant 1$:

$$N_c(2k+1) \geqslant \frac{1}{2} N_c(k+1) \cdot [N_c(k+1) + 1] + N_c(k) \cdot N_c(k+1)$$

Démonstration

a) Etant donnés deux espaces linéaires connexes L et L' de $k+1$ points, recollons-les en identifiant un point P de L et un point P' de L', P et P' n'étant pas points de recollement respectivement de L et L'. Si on recolle de cette façon d'une part tout espace connexe de $k+1$ points avec une copie de lui-même et d'autre part toutes les paires d'espaces connexes non isomorphes de $k+1$ points, un raisonnement analogue à celui développé en 4.3 montre que, si $k \geqslant 2$, tous les espaces linéaires connexes de $2k+1$ points ainsi obtenus sont deux à deux non isomorphes et qu'ils sont au nombre de

$$\frac{1}{2} \mathrm{N}_c(k+1) \cdot [\mathrm{N}_c(k+1)+1]$$

b) Soit L un des $\mathrm{N}_c(k) \,.\, \mathrm{N}_c(k+1)$ espaces connexes non isomorphes de $2k$ points construits en 4.3 (avec $k \geqslant 3$). L contient deux variétés connexes V et W telles que $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \{ \mathrm{P} \}$ et $\mathrm{V} \cup \mathrm{W} = \mathrm{L}$, V ayant exactement $k-1$ points distincts de P que nous noterons $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{k-1}$ et W ayant exactement k points distincts de P que nous noterons $\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}'_2, \ldots, \mathrm{P}'_k$. A partir de L, construisons un espace linéaire connexe $\bar{\mathrm{L}}$ de $2k+1$ points de la façon suivante : nous conviendrons que les $k-1$ droites de deux points $\mathrm{P}_1\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}_2\mathrm{P}'_2, \ldots, \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}'_{k-1}$ de L ont toutes en commun un nouveau point Q et nous joindrons Q à P et à P'_k par des droites de deux points. Nous allons démontrer que les $\mathrm{N}_c(k) \,.\, \mathrm{N}_c(k+1)$ espaces linéaires connexes de $2k+1$ points ainsi construits sont deux à deux non isomorphes pour $k \geqslant 5$.

Pour cela, notons que par Q ne passent dans $\bar{\mathrm{L}}$ que deux droites de deux points, alors que par tout point P_i ($i = 1, \ldots, k-1$) il en passe au moins $k-1$ et par tout point P'_j ($j = 1, \ldots, k$) au moins $k-2$. Donc si $k \geqslant 5$, le point Q jouit d'une propriété que n'ont pas les points P_i et P'_j.

De plus, Q jouit d'une propriété qui le différencie de P. En effet, il est possible de trouver dans $\bar{\mathrm{L}}$ deux variétés connexes V de k points et W de $k+1$ points telles que $\mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \{ \mathrm{P} \}$ et que par le seul point de $\bar{\mathrm{L}}$ extérieur à $\mathrm{V} \cup \mathrm{W}$ ne passent que deux droites de deux points. Or une propriété analogue n'est pas satisfaite par Q car s'il existait dans $\bar{\mathrm{L}}$ deux variétés connexes V' de k points et W' de $k+1$ points telles que $\mathrm{V}' \cap \mathrm{W}' = \{ \mathrm{Q} \}$ et que par le seul point de $\bar{\mathrm{L}}$ extérieur à $\mathrm{V}' \cup \mathrm{W}'$ ne passent que deux droites de deux points, ce point extérieur ne pourrait être que P, mais alors la variété connexe V serait la réunion des variétés $\{ \mathrm{P} \}$, $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}'$ et $\mathrm{V} \cap \mathrm{W}'$ disjointes et non vides, ce qui est absurde.

En somme, nous avons construit $\mathrm{N}_c(k) \,.\, \mathrm{N}_c(k+1)$ espaces connexes de $2k+1$ points en introduisant un nouveau point dans chacun des espaces connexes non isomorphes obtenus en 4.3., mais en opérant de telle façon que ce nouveau point puisse être facilement « reconnu » une fois la construction faite.

Dès lors, s'il existait un isomorphisme σ entre deux espaces $\bar{L}$ et $\bar{L}'$ construits par ce procédé à partir de deux espaces non isomorphes L et L', σ appliquerait le point Q de $\bar{L}$ sur le point Q' de $\bar{L}'$, donc induirait un isomorphisme entre L et L', d'où la contradiction.

c) Les espaces construits en *b*) ne sont pas isomorphes à ceux construits en *a*). Supposons en effet qu'il existe un isomorphisme σ d'un des espaces $\bar{L}$ obtenus en *b*) sur un des espaces L obtenus en *a*). P désignant le point de recollement de L commun aux deux variétés connexes de $k + 1$ points, il est clair que σ applique le point Q de $\bar{L}$ sur le point P de L puisque par tout autre point de L passent au moins k droites de deux points et qu'on a supposé $k \geqslant 5$. Mais par un raisonnement analogue à celui fait en *b*), on voit que Q ne peut pas être un point de recollement de $\bar{L}$ commun à deux variétés connexes de $k + 1$ points, ce qui permet de conclure.

d) Il résulte de *a*), *b*) et *c*) que l'inégalité annoncée est vérifiée pour tout $k \geqslant 5$. On voit facilement qu'elle l'est encore pour $1 \leqslant k \leqslant 4$.

4.5. *Remarque. Si on pouvait établir que*

$$N_c(n) > 2^{n-1} \qquad \textit{pour} \quad 9 \leqslant n \leqslant 17,$$

on aurait :

$$N_c(n) > 2^{n-1} \qquad \textit{pour tout } n \geqslant 9.$$

En effet, si dans les inégalités 4.3 et 4.4 on suppose $N_c(k) > 2^{k-1}$ et $N_c(k+1) > 2^k$, on obtient :

$$N_c(2k) > 2^{k-1} \,.\, 2^k = 2^{2k-1},$$

et $$N_c(2k+1) > \frac{1}{2} \,.\, 2^k \,.\, (2^k + 1) + 2^{k-1} \,.\, 2^k > 2^{2k}.$$

S'il est vrai que $N_c(n) > 2^{n-1}$ pour $9 \leqslant n \leqslant 17$, les inégalités ci-dessus permettent alors de démontrer par induction le résultat annoncé, la première s'appliquant à toutes les valeurs paires de n à partir de $n = 18$ et la seconde à toutes les valeurs impaires de n à partir de $n = 19$.

On sait déjà que $N_c(9) = 308 > 2^8$. Pour établir le théorème B, il reste donc à montrer que $N_c(n) > 2^{n-1}$ pour $10 \leqslant n \leqslant 17$. Nous utiliserons pour cela de façon tout à fait explicite la construction de tous les espaces linéaires non isomorphes ayant au plus 9 points ainsi que la détermination pour chacun de ces 500 espaces du groupe de ses automorphismes, ou plus précisément du nombre de classes de transitivité de ce groupe sur les points.

En pratique, il faut examiner séparément chacun des 8 cas correspondant aux 8 valeurs particulières de n pour lesquelles on veut démontrer l'inégalité. Pour certaines de ces valeurs, la démonstration est assez pénible. Afin de ne pas rebuter le lecteur, nous lui ferons grâce des détails et nous nous contenterons de traiter trois exemples qui lui donneront un aperçu des méthodes employées.

4.6. *Définitions*. Nous appellerons *espace linéaire centré* tout couple (L, P) où L est un espace linéaire et P un point de L. Nous dirons que P est le *centre* de L. Deux espaces linéaires centrés (L, P) et (L′, P′) seront dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de L sur L′ qui applique P sur P′.

On voit immédiatement que pour trouver le nombre d'espaces linéaires centrés non isomorphes qu'on peut obtenir à partir d'espaces linéaires $L_1, \ldots, L_k$ deux à deux non isomorphes, il suffit de compter le nombre de classes de transitivité du groupe des automorphismes de chacun de ces espaces sur les points et d'en faire la somme.

D'autre part, nous dirons qu'une droite D d'un espace linéaire L est une *antenne* de cet espace si D a au moins trois points et si tous les points de D sauf un sont libres sur D (cf. 3.3).

4.7. *Proposition*

$$N_c(10) > 2^9.$$

Démonstration.

a) La table de tous les espaces linéaires non isomorphes ayant au plus 9 points, dont nous avons signalé l'existence en 2.3, nous permet d'affirmer qu'il y a 137 espaces connexes centrés non isomorphes de 8 points n'ayant pas d'antenne de 3 points. Si on recolle au centre de chacun de ces espaces un espace formé d'une seule droite de 3 points, on démontre facilement que les 137 espaces de 10 points ainsi construits sont deux à deux non isomorphes. Ils ont une seule antenne de 3 points.

b) On vérifie dans la table qu'il y a 284 espaces connexes non isomorphes de 9 points n'ayant aucune antenne de 3 points ou en ayant au moins deux. Introduisons un point libre sur une droite maximale de chacun de ces espaces. En vertu de la proposition 3.4, les 284 espaces de 10 points qu'on obtient de cette manière sont deux à deux non isomorphes. Ils ont une seule droite maximale et ne sont pas isomorphes aux espaces obtenus en *a*) car ces derniers n'ont qu'une seule antenne de 3 points.

c) Soit L un espace linéaire fini de n points ayant au moins deux droites maximales D_1 et D_2 sans point commun. Construisons à partir de L un espace linéaire $\bar{L}$ de $n+1$ points en introduisant dans L un nouveau point Q commun à D_1 et D_2 et joint aux points extérieurs à $D_1 \cup D_2$ par des droites de deux points. L'espace $\bar{L}$ a exactement deux droites maximales se coupant en Q. On voit aisément que les espaces $\bar{L}$ et $\bar{L}'$ obtenus de cette manière à partir de deux espaces L et L′ non isomorphes sont non isomorphes (on peut "reconnaître" le nouveau point qu'on a introduit grâce au fait qu'il est le seul point commun aux deux droites maximales de $\bar{L}$).

Considérons alors tous les espaces linéaires non isomorphes de 9 points, connexes ou non, ayant au moins deux droites maximales D_1 et D_2 sans point commun et tels que quand on complète ces espaces par un nouveau point commun à D_1 et D_2, les espaces de 10 points obtenus soient connexes et aient soit zéro soit au moins deux antennes de 3 points. Les 131 espaces de 10 points ainsi construits ne sont isomorphes ni aux espaces *a*) qui ont une seule antenne de 3 points ni aux espaces *b*) qui ont une seule droite maximale.

d) On peut vérifier dans la table qu'il y a aussi 131 espaces non isomorphes de 9 points, connexes ou non, ayant les propriétés suivantes : ils ont au moins deux droites maximales D_1 et D_2 sans point commun et au moins deux points P_1 et P_2 extérieurs à $D_1 \cup D_2$, la droite P_1P_2 n'ayant que deux points, de telle façon que quand on les complète par un nouveau point Q commun à D_1, à D_2 et à la droite P_1P_2 et qu'on joint Q par des droites de deux points à tout point extérieur à $D_1 \cup D_2 \cup \{P_1, P_2\}$, les espaces obtenus soient connexes et aient soit zéro soit au moins deux antennes de 3 points. Les 131 espaces de 10 points ainsi construits n'ont que deux droites maximales par le point d'intersection desquelles passe une droite de 3 points. On démontre comme en *c*) que tous ces espaces sont deux à deux non isomorphes. De plus, ils ne sont isomorphes ni aux espaces *a*) qui ont une seule antenne de 3 points ni aux espaces *b*) qui ont une seule droite maximale ni aux espaces *c*) dont les deux droites maximales se coupent en un point qui n'est situé sur aucune droite de 3 points.

Il résulte de *a*), *b*), *c*) et *d*) que :

$$N_c(10) \geqslant 137 + 284 + 131 + 131 = 683 > 2^9.$$

4.8. *Proposition* $\quad N_c(16) > 2^{15}$.

Démonstration. On voit dans la table qu'il y a 156 espaces linéaires connexes centrés non isomorphes de 8 points dont le centre n'est pas un point de recollement et 1687 espaces linéaires connexes centrés non isomorphes de 9 points dont le centre n'est pas un point de recollement. On peut démontrer que tous les espaces linéaires connexes de 16 points obtenus en recollant en leurs centres chacun de ces espaces de 8 points avec chacun de ces espaces de 9 points sont deux à deux non isomorphes, d'où :

$$N_c(16) \geqslant 156 \,.\, 1687 = 263172 > 2^{15}.$$

4.9. *Proposition*. $\quad N_c(17) > 2^{16}$.

Démonstration. En introduisant un point libre sur une des droites maximales de chacun des espaces de 16 points construits en 4.8, on obtient des espaces connexes de 17 points deux à deux non isomorphes, d'où :

$$N_c(17) \geqslant 263172 > 2^{16}.$$

5. Démonstration du théorème C

5.1. *Proposition. Pour tout entier naturel* $n > 1$:

$$N(n) \geqslant N_c(n) + N(n-1)$$

Démonstration. En vertu de la proposition 3.2, les $N(n-1)$ espaces linéaires de n points construits en ajoutant un point isolé à tous les espaces linéaires non isomorphes de $n-1$ points sont deux à deux non isomorphes. Comme ils sont aussi non connexes, l'inégalité ci-dessus en résulte.

5.2. *Théorème* C.

$$N(n) > 2^n \qquad \textit{pour tout } n \geqslant 10.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si $N(n-1) > 2^{n-1}$ (avec $n \geqslant 10$), il résulte de l'inégalité 5.1 et du théorème B que

$$N(n) > 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Comme on sait que $N(9) = 384$ et que $N_c(10) \geqslant 683$ (cf. proposition 4.7), on tire de l'inégalité 5.1 que :

$$N(10) \geqslant 683 + 384 = 1067 > 2^{10}.$$

Dès lors, une simple induction montre que $N(n) > 2^n$ pour tout $n \geqslant 10$.

5.3. *Remarque*

Il est évident que la connaissance des triples de points alignés d'un espace linéaire L quelconque est équivalente à la connaissance des droites, donc détermine complètement la structure linéaire de L.

Considérons alors l'ensemble T des triples non ordonnés de points distincts d'un espace linéaire L de n points et définissons une application f de T dans l'ensemble $\{0, 1\}$ de la façon suivante : l'image par f d'un triple de T est 1 ou 0 selon que les points de ce triple sont ou non alignés dans L. A tout espace linéaire L de n points est ainsi associée une et une seule application f, mais si $n \geqslant 4$ toute application f de T dans $\{0, 1\}$ ne détermine pas un espace linéaire L.

On en déduit qu'on a

$$N(n) \leqslant 2^{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}$$

pour tout entier naturel n avec une inégalité stricte pour $n \geqslant 4$.

5.4. *Problème*. Est-il vrai que $N(n) > 2N(n-1)$ pour toute valeur de $n \geqslant 7$? Il semble qu'il soit déjà très difficile de montrer que $N(n) > 2N(n-1)$ pour n suffisamment grand.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Buekenhout, *Espaces linéaires*. Institut de Mathématique, U.L.B. (1967).

[2] P. de Witte, Combinatorial properties of finite linear spaces. *Bull. Soc. Math. Belg.*, XVIII (1966), p. 133-141.

[3] P. Libois, Géométrie de la Relativité restreinte. *Bull. Soc. Math. Belg.*, XIV (1962), p. 381-388.

[4] P. Libois, Quelques espaces linéaires. *Bull. Soc. Math. Belg.*, XVI (1964), p. 13-22.
