

INSTITUT DE STATISTIQUE
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

CAHIERS DU BUREAU UNIVERSITAIRE
DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

SÉRIE RECHERCHE

Cahier n° 15

G. KREWERAS

SUR LES ÉVENTAILS DE SEGMENTS

~~A. M. DECAILLOT~~

~~UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE PRIMALE-DUALE~~

1970
PARIS

A108
A9766
A1263
A80936
A79
A1906
A3432
A5021
A94811
A94256
A259475
A80934

fang

SUR LES ÉVENTAILS DE SEGMENTS

par

G. KREWERAS

1. INTRODUCTION : EVENTAILS ET PONTS

1.1 – Dans tout ce qui suit, nous employons le mot *segment* dans son sens usuel : a et b étant deux éléments d'un ensemble N totalement ordonné par la relation \leq , et tels que $a \leq b$, nous appellerons *segment* $[a, b]$ l'ensemble

$$[a, b] = \{x \mid x \in N, a \leq x \leq b\};$$

a et b seront appelés respectivement les extrémités gauche et droite de $[a, b]$.

De fait, N sera presque toujours un ensemble fini de cardinal n , isomorphe du point de vue ordinal à $\{1, 2, \dots, n\}$ que nous désignerons en abrégé par $[1, n]$; nous dirons alors que $[a, b]$ est un segment *de* $[1, n]$. Pour éviter des répétitions fastidieuses du mot "cardinal", nous emploierons parfois le mot "longueur" à sa place quand il s'agira de segments. Il faut noter que, de ce fait, la longueur du segment $[a, a]$ sera 1, et non 0 comme dans les contextes d'analyse classique.

Nous appellerons *éventail* tout ensemble de segments dont *aucun n'est inclus dans un autre*. Deux segments d'un même éventail ne peuvent donc notamment avoir ni même extrémité gauche, ni même extrémité droite. Il en résulte qu'il y a toujours sur un éventail de k segments un *ordre naturel des segments*, qui sera en général celui que l'on adoptera pour leur énumération; ainsi, pour l'éventail des segments $[a_i, b_i]$ avec $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, on aura :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_k$$

$$b_1 < b_2 < \dots < b_i < \dots < b_k$$

en même temps que les k inégalités $a_i \leq b_i$.

Les éventails de segments peuvent se rencontrer dans la représentation d'un grand nombre de réalités concrètes. Dans la plupart des cas chaque segment représente un "phénomène" qui a un commencement (extrémité gauche) et une fin (extrémité droite), les phénomènes eux-mêmes ayant un ordre de succession commun au moins approximativement à leurs commencements et à leurs fins : cela peut être le cas pour le parc de machines d'un atelier, pour les clients présents dans une file d'attente, etc.

Nous dirons qu'un éventail est *connexe* si deux segments consécutifs quelconques de cet éventail ont au moins un point commun. Pour figurer un éventail quelconque, il peut être commode de représenter ses segments horizontalement, à des altitudes successives croissantes (fig. 1) ; si l'éventail n'est pas connexe, il peut être intéressant, pour gagner de l'espace, de redescendre à l'altitude initiale au début de chaque nouvelle composante connexe (fig. 2).

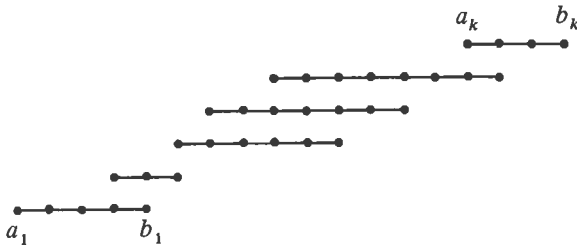


Fig. 1



Fig. 2

Un éventail de segments peut évidemment donner lieu, et cela d'un grand nombre de manières, à une description partielle à l'aide d'un ou plusieurs paramètres. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux paramètres descriptifs suivants :

- nombre total de segments
- extrémité gauche du dernier segment
- nombre de segments ponctuels (de longueur 1)
- cardinal de la réunion des segments (ou *longueur couverte* par l'éventail)
- nombre maximum de segments deux à deux disjoints (ou *ouverture* de l'éventail).

– nombre maximum de segments deux à deux sécants (ou *épaisseur* de l'éventail)

– longueur du plus grand segment.

Pour l'ensemble \mathcal{G}_n de tous les éventails de segments de $[1, n]$, ensemble dont nous préciserons le cardinal, nous déterminerons le nombre d'éventails pour lesquels l'un de ces paramètres a une valeur donnée. Notre objet essentiel sera d'établir que les lois de distribution finies correspondantes appartiennent à trois types principaux que nous nommerons (α) (β) (γ) et d'en étudier les propriétés les plus importantes.

Indiquons que certaines des propriétés étudiées pourraient être aisément exprimées dans le langage de la théorie des graphes, que nous n'emploierons cependant pas ici. Les graphes dits "d'intervalles" ont notamment fait l'objet de divers travaux (cf. [1], [2], [4], [6]) dont celui-ci peut à certains égards être considéré comme un complément ou un développement.

1.2 – Très étroitement apparentée à la notion d'éventail est la notion de *pont*, que l'on rencontre notamment en statistique en liaison avec certains problèmes de scrutin, de ruine des joueurs ou de files d'attente. Nous appellerons *pont* de portée p un chemin qui, dans le plan quadrillé \mathbb{Z}^2 , joint le point $O(x_0, y_0)$ au point $P(x_0 + p, y_0 + p)$ en $2p$ étapes satisfaisant aux conditions suivantes :

1/ p des étapes sont "sud-nord", c'est-à-dire font passer d'un point (x, y) au point $(x, y + 1)$ et p sont "ouest-est", c'est-à-dire font passer d'un point (x, y) au point $(x + 1, y)$; c'est l'existence de ces deux seules sortes d'étapes qui permet, par convention, l'emploi du mot "chemin".

2/ aucun des points de \mathbb{Z}^2 par où passe le chemin n'est situé strictement au sud-est (c'est-à-dire au-dessous et/ou à droite) de la droite OP (fig. 3).

Le mot "pont" a une justification intuitive lorsque l'on se dispose de façon à faire apparaître au lieu de la figure 3 la figure 4 : il vaut mieux parler alors d'étapes ascendantes et d'étapes descendantes, que nous noterons respectivement c et d . Un pont dont le point de départ O est connu peut ainsi se définir à l'aide d'un *mot* employant p fois chacune des deux lettres c et d , étant entendu que la i -ième occurrence de c doit toujours précéder la i -ième occurrence de d ($i \in \{1, 2, \dots, p\}$). Pour les ponts comme pour les éventails, nous nous intéresserons à un certain nombre de paramètres descriptifs, en empruntant cette fois leurs noms, pour des raisons némotecniques évidentes, à une simili-technologie rudimentaire des ponts. Nous appellerons ainsi :

culée : tout point du chemin OP situé *sur* la droite OP , en précisant *culée intermédiaire* s'il ne s'agit ni de O ni de P

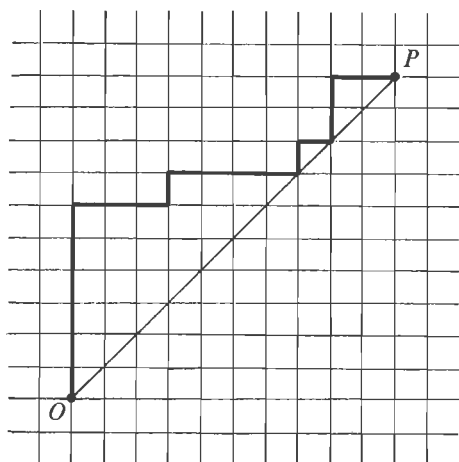


Fig. 3

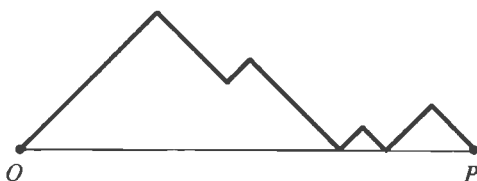


Fig. 4

arche : toute partie du chemin OP située entre deux culées consécutives

pile : tout point du chemin OP qui est point d'aboutissement d'une étape d et point de départ d'une étape c ; en particulier toute culée intermédiaire est une pile, mais il sera commode de convenir que O et P ne sont pas des piles

arcade : toute partie du chemin OP située soit entre O et la première pile, soit entre deux piles consécutives, soit entre la dernière pile et P

sommet : tout point du chemin OP qui est point d'aboutissement d'une étape c et point de départ d'une étape d (il y a un sommet et un seul par arcade)

hauteur : (d'un point quelconque du chemin OP) : excès, lorsque ce point est atteint, du nombre d'occurrences de c sur le nombre d'occurrences de d

hauteur d'un pont (ou d'une arche) : hauteur maximale des points du chemin correspondant (ou de la partie de chemin).

Les ponts ne jouant ici qu'un rôle secondaire (puisque notre objectif est avant tout l'étude des éventails de segments), nous en étudierons un moins grand nombre de paramètres descriptifs.

Nous examinerons, cependant, outre la portée, les paramètres suivants :

- nombre d'arcades
- nombre d'arches
- hauteur.

A cause des parentés qui seront précisées entre les notions de pont et d'éventail, nous rencontrerons, à propos de distribution des ponts de portée donnée suivant les valeurs de ces paramètres, des lois des trois mêmes types déjà mentionnés. Dans certains cas, c'est précisément le langage des ponts qui se révélera commode pour résoudre un problème qui se sera d'abord posé en termes d'éventails de segments.

1.3 – Nous définirons, pour commencer, deux opérations, que nous appellerons toutes deux des *semi-dérivations*, qui feront correspondre l'une à tout pont un éventail, l'autre à tout éventail un pont, et qui ne seront ni l'une ni l'autre susceptibles d'une opération inverse univoque.

Considérons un pont OP de portée p , de culées extrêmes O (0, 0) et P (p , p). En dehors du cas où ce pont se réduirait à une *arcade* unique, il existe un ensemble non-vide de piles. Si ces piles sont au nombre de k , la i -ième d'entre elles ayant pour coordonnées (a_i, b_i) , on a évidemment les inégalités

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_k$$

$$b_1 < b_2 < \dots < b_i < \dots < b_k$$

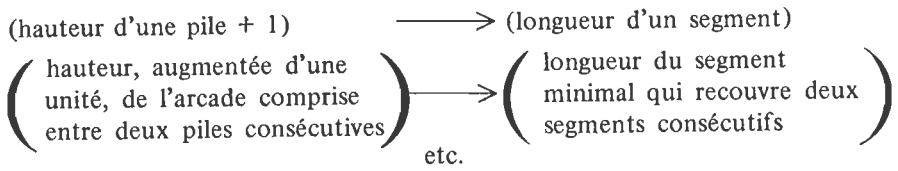
et $a_i \leq b_i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

L'ensemble des k segments $[a_i, b_i]$ est donc bien un éventail ; c'est lui que nous nommerons par définition l'éventail semi-dérivé de OP.

Dans le cas particulier, que nous avons provisoirement exclu, où le pont OP se compose d'une seule arcade (ou, si l'on veut, est défini par le mot particulier $c^p d^p$), nous dirons qu'il lui correspond par semi-dérivation l'éventail *vide*.

Notons que cette semi-dérivation fait correspondre les uns aux autres certains paramètres descriptifs. Ainsi, par exemple :

$$\begin{array}{l} \text{(nombre de piles)} \longrightarrow \text{(nombre de segments)} \\ \left(\begin{array}{l} \text{nombre de culées} \\ \text{intermédiaires} \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{nombre de segments} \\ \text{ponctuels} \end{array} \right) \end{array}$$



Remarquons que si l'éventail semi-dérivé d'un pont donné se compose de k segments, on a $a_1 \geq 1$ et $b_k \leq p - 1$. Si le pont OP est de portée p , son éventail semi-dérivé est un éventail de segments de $[1, p - 1]$.

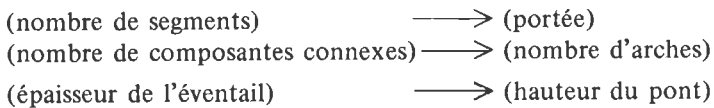
Remarquons enfin que le pont qui est transformé, par semi-dérivation, en un éventail donné E n'est pas déterminé, même si l'on impose, comme nous le ferons toujours, son point de départ O. Si E se compose de segments de $[1, n]$, il faudrait, pour déterminer le pont "semi-primitif", se donner en outre son point d'arrivée P, ou, ce qui revient au même, sa portée p ; celle-ci peut être n'importe quel entier $\geq n + 1$.

Considérons maintenant un éventail E de k segments de $[1, n]$, et définissons de la manière suivante un pont OP que nous appellerons le *pont semi-dérivé de E*.

Si $[a_i, b_i]$ est le i -ième segment de E dans l'ordre naturel de ces segments ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$), considérons la *somme cartésienne* S des extrémités de ces segments; cette somme cartésienne se compose toujours de $2k$ éléments, même si l'on a parfois $a_i = b_i$ (segment ponctuel) ou $a_j = b_i$. Enumérons alors les éléments de S dans l'ordre croissant, étant entendu que si une extrémité gauche et une extrémité droite ont la même valeur numérique on donne toujours la *priorité à l'extrémité gauche*, que ce soit celle du même segment ou celle d'un autre segment.

On peut, lors de cette énumération, noter c toute rencontre d'une extrémité gauche et d toute rencontre d'une extrémité droite. On obtient ainsi un mot utilisant k fois chacune des deux lettres c et d ; de plus, en raison de $a_i \leq b_i$ et de la règle de priorité à gauche, la i -ième occurrence de c précède toujours la i -ième occurrence de d . C'est le *pont OP* défini par ce *mot* que nous appellerons par définition le *pont semi-dérivé de E*.

Si E est l'éventail vide, nous lui ferons correspondre par semi-dérivation le "pont vide" OO. En ce qui concerne les paramètres descriptifs, cette nouvelle semi-dérivation fournit notamment les correspondances suivantes :



Notons que l'opération inverse de cette seconde semi-dérivation n'est pas plus déterminée que celle de la première (l'est même moins, pourrait-on dire). Cependant, si l'on se donne un pont OP , tous les éventails qui fournissent ce pont par semi-dérivation sont "ordinalement isomorphes" : cette affirmation résume le fait que l'ordre "croissant avec priorité à gauche" sur la somme cartésienne des extrémités fournit toujours le même *mot* en c et d . Deux éventails ordinalement isomorphes ont non seulement même nombre de segments, même nombre de composantes connexes et même épaisseur, mais aussi, évidemment, même *ouverture* (nombre maximal de segments deux à deux *non* sécants, paramètre auquel ne correspond par semi-dérivation rien de spécialement simple).

2. NOMBRES DE CATALAN ; LOI (α)

2.1 — Le résultat le plus classique relatif aux ponts concerne le nombre total de ponts de portée donnée p (cf. [3], par exemple).

Une des manières possibles de l'établir repose sur la remarque de base que le nombre des ponts de portée p est égal au nombre des ponts à une seule arche de portée $p + 1$: on s'en rend compte immédiatement en considérant un pont quelconque joignant $O(0, 0)$ à $P(p, p)$ comme partie d'un pont à une seule arche joignant $O'(0, -1)$ à $P'(p + 1, p)$ (fig. 5).

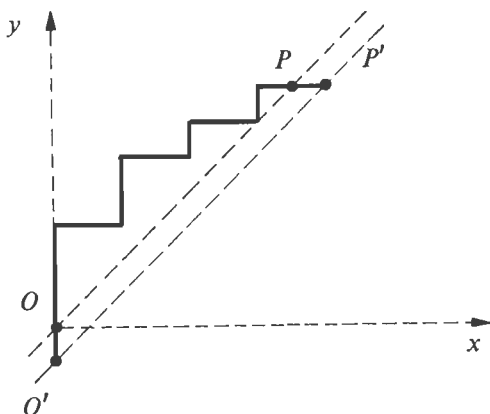


Fig. 5

On peut alors appeler u_p^k , pour tout entier positif k , le nombre de ponts de portée p ayant k arches ; $u_p^k = 0$ si $p = 0, 1, \dots, k - 1$. On conviendra bien entendu que $u_0^0 = 1$ et que $u_p^0 = 0$ pour $p > 0$.

Il est clair que

$$u_p^k = \sum_h u_h^{k-1} u_{p-h}^1,$$

l'indice de sommation h pouvant varier théoriquement de 0 à p (mais seules donnent des termes non nuls les valeurs de h qui appartiennent à $[k - 1, p - 1]$). Cela suffit à établir que, si l'on introduit la fonction génératrice

$$u^k(t) = \sum_{p=k}^{+\infty} u_p^k(t),$$

on a $u^k(t) = u^{k-1}(t)u^1(t)$ et par conséquent

$$u^k(t) = [u^1(t)]^k \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (1)$$

Mais si l'on appelle $u(t)$ la fonction génératrice du nombre total u_p de ponts de portée p , on a

$$u(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots + u_p t^p + \dots,$$

et la remarque de base se traduit par

$$u^1(t) = t u(t). \quad (2)$$

D'autre part on a

$$u(t) = 1 + u^1(t) + \dots + u^k(t) + \dots = \frac{1}{1 - u^1(t)} = \frac{1}{1 - t u(t)}.$$

Il en résulte que la fonction $u(t)$ satisfait à l'équation

$$t [u(t)]^2 - u(t) + 1 = 0, \quad (3)$$

ce qui permet de conclure qu'elle est définie, pour $|t| < 1/4$, par le développement de Mac-Laurin de

$$u(t) = \frac{1 - (1 - 4t)^{1/2}}{2t}.$$

A partir de là, il suffit d'utiliser le résultat classique relatif au développement de $(1 + z)^m$ pour m non entier (ici = $1/2$) pour conclure que

$$u_p = \frac{(2p)!}{p! (p + 1)!}. \quad (4)$$

Ces nombres u_p , appelés parfois *nombres de Catalan*, ont les valeurs ci-après pour $p \in [0, 11]$:

$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$u_p =$	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

A108

L'approximation de Stirling permet, par ailleurs, de dire que u_p croît de manière équivalente à $4^p / \sqrt{p\pi}$.

Mais les équations (2) et (3) entraînent que :

$$[u^1(t)]^2 = u^1(t) - t ;$$

en multipliant les deux membres par $[u^1(t)]^{k-2}$ et en tenant compte de (1), on voit que

$$u^k(t) = u^{k-1}(t) - tu^{k-2}(t),$$

d'où

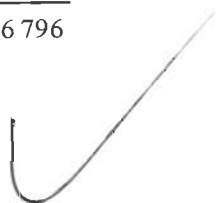
$$u_p^k = u_p^{k-1} - u_{p-1}^{k-2} \quad (5)$$

Cette relation de double récurrence en p et k a deux conséquences :

1/ Elle permet de former les colonnes successives du tableau suivant, dont chaque case est ainsi la somme de sa "voisine sud" et de sa "voisine nord-ouest" :

u_p^k	(portée)											
	$p = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
(arches)												
$k = 0$		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	✓
2			1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	✓
3				1	3	9	28	90	297	1001	3432	✓
4					1	4	14	48	165	572	2002	✓
5						1	5	20	75	275	1001	
6							1	6	27	110	429	
7								1	7	35	154	
8									1	8	44	
9										1	9	
10											1	
		1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

A = 9766



Bien entendu la formation de chaque colonne commence par le 1 de la diagonale, qui correspond au fait qu'il n'y a qu'un pont de portée p ayant p arches, à savoir le pont défini par $cdcdcd \dots cd = (cd)^p$; cette formation n'exige donc pas la connaissance a priori des nombres de Catalan, qu'elle permet au contraire de retrouver, soit en haut des colonnes successives soit (avec décalage) en sommes des colonnes successives.

2/ La relation (5) permet de justifier une expression condensée de u_p^k , à savoir

$$u_p^k = C_{2p-k-1}^{p-k} - C_{2p-k-1}^{p-k-1} \quad (6)$$

ou

$$u_p^k = \frac{k(2p-k-1)!}{p!(p-k)!} \quad (7)$$

Telle est la loi que nous appelons de type (α) : c'est celle qui répartit les u_p ponts de portée p suivant le nombre k de leurs arches.

Par semi-dérivation, on voit immédiatement que la même loi (α) répartit les éventails de segments de $[1, p-1]$ ou $[1, n]$ suivant le nombre $k-1$ de leurs segments punctuels.

2.2 – Une autre disposition possible des nombres du tableau des u_p^k est celle figurée ci-dessous :

A 7766
again

9	1	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862	4862
8	1	8	35	110	275	572	1001	1430	1430	
7	1	7	27	75	165	297	429			
6	1	6	20	48	90	132	132			
5	1	5	14	28	42	42				
4	1	4	9	14	14					
3	1	3	5	5						
2	1	2	2							
1	1	1								
$y = 0$	1									
	$x = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Chacun des nombres est alors somme de son voisin ouest et de son voisin sud. Avec cette disposition il suffit d'imaginer ces nombres affectés aux points (x, y) de Z^2 qui définissent leurs emplacements, pour voir que chacun d'eux compte précisément les chemins par lesquels on peut atteindre son emplacement à partir de $(0, 0)$ sans jamais passer au-dessous de la diagonale $y = x$.

Ce nombre est, par suite de l'expression (6) et de la nouvelle disposition adoptée, égal à

$$\alpha(x, y) = C_{x+y}^x - C_{x+y}^{x-1}$$

Ce résultat peut du reste s'obtenir par un procédé classique consistant à considérer deux sortes de chemins parmi les C_{x+y}^x chemins qui joignent $O(0, 0)$ à (x, y) : les $\alpha(x, y)$ qui ne passent en aucun point situé strictement au sud-est de $y = x$, et ceux qui ont au moins un point sur la droite $y = x - 1$, notamment un point d'abscisse maximale M (fig. 6). Mais à chacun de ces derniers on peut, par une symétrie de sa partie OM par rapport à la droite $y = x - 1$, faire correspondre un chemin joignant $O'(1, -1)$ à (x, y) .

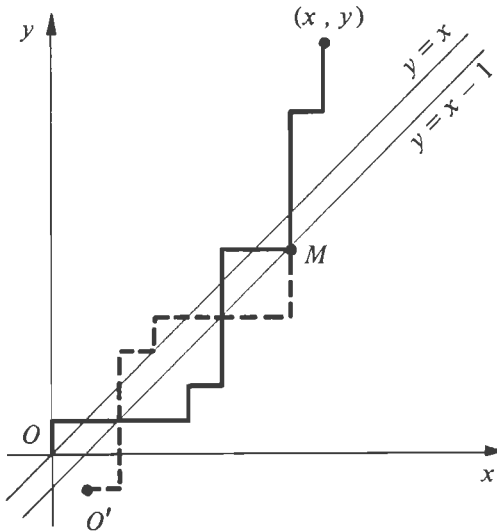


Fig. 6

En tout cas il est facile de déduire de là le nombre de ponts de portée p pour lesquels la *dernière pile* a une abscisse égale à x ($1 \leq x \leq p - 1$) : c'est tout simplement le nombre $\alpha(x, p - 1)$. On voit ainsi que la loi (α) est également celle suivant laquelle les ponts de portée donnée sont distribués suivant l'abscisse de leur dernière pile (abscisse que l'on prend égale à 0 par convention pour le pont trivial $c^p d^p$).

Par semi-dérivation, on voit que la même loi (α) donne la distribution des éventails de segments de $[1, n]$ suivant l'extrémité gauche du dernier segment.

2.3 – Enfin montrons, en raisonnant cette fois directement sur les éventails de segments de $[1, n]$, que c'est encore la même loi (α) qui donne leur répartition suivant la *longueur totale couverte*.

Considérons, en effet, les éventails de segments de $[1, n]$ qui couvrent h points et appelons provisoirement $\alpha'(h, n)$ le nombre de ces éventails. Il y a deux sortes de tels éventails :

1/ ceux pour lesquels le point n n'est pas couvert, et qui sont donc des éventails de segments de $[1, n - 1]$ couvrant h points (il y a $\alpha'(h, n - 1)$ tels éventails)

2/ les éventails pour lesquels n est l'un des h points couverts, éventails qui forment un ensemble A .

Or cet ensemble A peut être mis facilement en bijection avec l'ensemble B de tous les éventails de $[1, n]$ qui couvrent $h - 1$ points, et cela de la façon suivante :

– partant d'un éventail de A , en considérer les segments dans l'ordre inverse de l'ordre naturel, c'est-à-dire en commençant par le plus à droite, et supprimer les extrémités gauches des segments successifs (ce qui diminue leurs longueurs d'une unité) jusqu'à ce que l'une de ces suppressions ait pour effet de diminuer d'une unité le nombre de points couverts, qui devient ainsi égal à $h - 1$;

– partant d'un éventail de B , considérer le point non couvert le plus à droite ; si c'est n , adjoindre comme dernier segment le segment ponctuel $[n, n]$; dans tout autre cas, joindre le point en question au segment qui commence immédiatement à sa droite, et prolonger de même d'un point vers la gauche tous les segments qui sont après lui dans l'ordre naturel.

On voit ainsi que A a même cardinal que B , c'est-à-dire $\alpha'(n, h - 1)$. Finalement donc :

$$\alpha'(h, n) = \alpha'(h, n - 1) + \alpha'(h - 1, n)$$

Les $\alpha'(h, n)$ satisfont ainsi à la même double récurrence que les $\alpha(x, y)$; il ne reste qu'à s'assurer que les deux récurrences s'amorcent de la même manière, ce qui est bien le cas, pour conclure que c'est encore suivant une loi (α) que se répartissent les éventails suivant ce nouveau paramètre.

2.4 – A titre d'exemple, nous donnons ci-après la répartition effective des 14 éventails de segments de $[1, 3]$ suivant les trois paramètres considérés ; par abréviation nous notons chaque éventail entre parenthèses, en donnant les segments dans l'ordre naturel et écrits eux-mêmes sous les formes ab ou a au lieu de $[a, b]$ ou $[a, a]$. La loi (α) apparaîtra chaque fois en dernière colonne.

		Eventails						Nombre
I. Nombre de segments ponctuels	0	\emptyset	(12)	(13)	(23)	(12,23)	5	
	1	(1)	(2)	(3)	(1,23)	(12,3)	5	
	2	(1,2)	(1,3)	(2,3)			3	
	3	(1,2,3)					1	
II. Extrémité gauche du dernier segment	3	(3)	(1,3)	(2,3)	(12,3)	(1,2,3)	5	
	2	(2)	(23)	(1,2)	(1,23)	(12,23)	5	
	1	(1)	(12)	(13)			3	
	0	\emptyset (par convention)					1	
III. Nombre de points couverts	3	(13)	(1,23)	(12,3)	(12,23)	(1,2,3)	5	
	2	(23)	(12)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	5	
	1	(1)	(2)	(3)			3	
	0	\emptyset					1	

Le tableau récapitulatif ci-après permet de s'assurer que les trois paramètres I, II, III sont fonctionnellement indépendants non seulement deux à deux, mais aussi dans leur ensemble.

	\emptyset	(1)	(2)	(3)	(12)	(13)	(23)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1,23)	(12,3)	(12,23)	(1,2,3)
I	0	1	1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	0	3
II	0	1	2	3	1	1	2	2	3	3	2	3	2	3
III	0	1	1	1	2	3	2	2	2	2	3	3	3	3

Enfin il est intéressant de noter que les lois (α) ont une loi limite particulièrement simple : en effet si l'on divise par son total u_p la colonne p du tableau des u_p^k , on voit, par suite de (7) et (4), que

$$u_p^k = \frac{k(2p-k-1)!}{p!(p-k)!} \cdot \frac{p!(p+1)!}{(2p)!} = \frac{k(p+1)_{k+1}}{(2p)_{k+1}}$$

(notation de Vandermonde)
 $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$

Quand p augmente indéfiniment, cette fraction, qui est le quotient de deux polynômes en p , tend vers $k/2^{k+1}$, expression qui définit la loi limite cherchée ; il s'agit d'une "loi binomiale négative".

3. SEGMENTS EN NOMBRE IMPOSE ; LOI (β)

3.1 — Examinons maintenant l'ensemble \mathfrak{S}_n des éventails de segments de $[1, n]$ du point de vue du nombre total de segments dont ils se composent. Le cardinal de \mathfrak{S}_n est égal à u_{n+1} comme on le voit par semi-dérivation de tous les ponts de portée $n + 1$. Nous appellerons β_n^s le nombre d'éventails de s segments de $[1, n]$.

Il est d'abord intéressant d'établir, avant tout calcul, que

$$\beta_n^s = \beta_n^{n-s} . \quad (8)$$

Pour cela, convenons d'associer à toute suite (strictement) croissante X de points de $[1, n]$ une autre suite croissante \bar{X} , que nous dirons complémentaire de X , et qui aura pour termes tous les points de $[1, n]$ qui n'appartiennent pas à X . Il est clair que, pour s donné, l'ensemble de toutes les suites croissantes de s termes de $[1, n]$ est partiellement ordonné par la relation de majoration terme à terme, que nous noterons $X \leq Y$. Cela dit nous allons démontrer la proposition suivante, simple mais nullement triviale :

$$X \leq Y \iff \bar{X} \geq \bar{Y} \quad (9)$$

Il suffit bien entendu de montrer l'une des deux implications, p.e. celle qui va de gauche à droite ; nous le ferons par récurrence sur le nombre s de termes de X et Y , et pour tout n . L'implication est triviale pour $s = 0$, puisque \bar{X} et \bar{Y} coïncident alors tous deux avec la suite $1, 2, \dots, n$.

Soient alors deux suites croissantes X et Y ,

$$X = (x_1 \dots x_{s-1} x_s) = (X' x_s)$$

$$Y = (y_1 \dots y_{s-1} y_s) = (Y' y_s) .$$

Supposons que $X \leq Y$, ce qui veut dire que $X' \leq Y'$ et $x_s \leq y_s$. X' et Y' ont des complémentaires \bar{X}' et \bar{Y}' qui peuvent s'obtenir à partir de \bar{X} et \bar{Y} par intercalation, à la place convenable, d'un terme $\xi = x_s$ pour la première et d'un terme $\eta = y_s$ pour la seconde. Comme on a $\xi \leq \eta$ il est impossible que le rang j auquel η apparaît dans \bar{Y}' soit inférieur au rang i auquel ξ apparaît dans \bar{X}' ; on a donc $i \leq j$, d'où l'une ou l'autre des deux dispositions

$$\bar{X}' = (\dots \xi \dots) \quad (i = j)$$

$$\bar{Y}' = (\dots \eta \dots)$$

ou

$$\bar{X}' = (\dots \xi \dots \bar{x}'_j \dots) \quad (i < j)$$

$$\bar{Y}' = (\dots \bar{y}'_i \dots \eta \dots)$$

Dans les deux cas on passe de \bar{X}' à \bar{X} par suppression de ξ et de \bar{Y}' à \bar{Y} par suppression de η . Dans le premier cas, le fait que $\bar{X} \geq \bar{Y}$ est une évidence ; dans le second cas ($i < j$), les inégalités terme à terme sont inchangées avant la i -ième et après la j -ième, et renforcées en ce qui concerne les autres ; la fig. 7 indique les correspondances entre termes de même rang de \bar{X} et \bar{Y} .

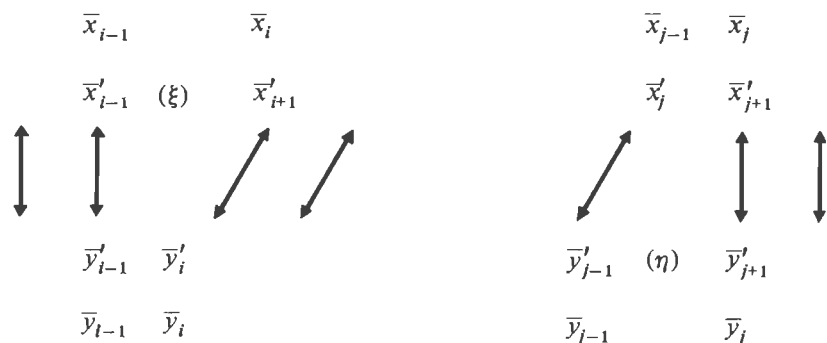


Fig. 7

La proposition (9) est ainsi établie par récurrence dans tous les cas. Elle a notamment pour conséquence que le nombre de manières de choisir deux suites croissantes de points de $[1, n]$ dont l'une majore l'autre terme à terme est le même si l'on impose aux suites d'avoir s termes ou si on leur impose d'avoir $n - s$ termes ; d'où finalement l'égalité (8) annoncée, puisque chacun de ces choix revient précisément au choix d'un éventail de s segments de $[1, n]$, défini par la suite des extrémités gauches et la suite des extrémités droites de ses segments.

3.2 – Pour effectuer le calcul proprement dit de β_n^s , qui en particulier confirmera l'égalité (8), il peut être commode de se servir d'un théorème général sur les suites de Young (suites non-croissantes d'entiers non-négatifs) ; cf. [7]. Aux termes de ce théorème, si Z et Z' sont deux telles suites composées d'un même nombre h de termes, et que $Z' \leq Z$ au sens de la majoration terme à terme, le nombre de manières dont on peut *intercaler* entre Z' et Z s nouvelles suites de Young Z_1, \dots, Z_s respectant les conditions

$$Z' \leq Z_1 \leq \dots \leq Z_s \leq Z$$

est donné par un déterminant $D_s(Z, Z')$, d'ordre h , et dont l'élément général (ligne i , colonne j) est le nombre binomial $C_{z_i - z'_j + s}^{i-j+s}$; z_i et z'_j désignent respectivement le i -ième terme de Z et le j -ième terme de Z' .

Nous suivons, ici et également plus loin, la convention proposée dans [7] de considérer comme distinctes, lorsque $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$, les deux fonctions de deux arguments habituellement notées C_u^v ou $\binom{u}{v}$, fonctions qui sont confondues seulement pour $(u, v) \in \mathbf{N}^2$; nous posons

$$\binom{u}{v} = \begin{cases} (u)_v / v! & \text{si } v \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{si } v \in \mathbf{Z} - \mathbf{N} \end{cases}$$

$$C_u^v = \binom{u}{u-v}.$$

Or les conditions

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_s \leq n$$

$$1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_s \leq n$$

peuvent prendre la forme équivalente

$$0 \leq x_1 - 1 \leq x_2 - 2 \leq \dots \leq x_s - s \leq n - s$$

$$0 \leq y_1 - 1 \leq y_2 - 2 \leq \dots \leq y_s - s \leq n - s.$$

Le problème est ainsi ramené à l'intercalation de s suites de Young de 2 termes, $Z_i = (y_i - i, x_i - i)$, avec $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, entre la suite $Z' = (0, 0)$ et la suite $Z = (n - s, n - s)$. En vertu du théorème cité, cela est possible d'un nombre de manières égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} C_n^s & C_n^{s-1} \\ C_n^{s+1} & C_n^s \end{vmatrix},$$